Mirando hacia el futuro

Sección a cargo de

Antonio Viruel

Perspectivas en combinatoria

por

Marc Noy y Oriol Serra

1. Introducción

La combinatoria es el arte de contar. En su acepción contemporánea, contiene también el estudio de estructuras discretas. Además de ser un recurso imprescindible en todas las áreas de las matemáticas, llegando a desarrollar sofisticados métodos de enumeración y estructuras combinatorias complejas, puede decirse que la combinatoria ha llegado a su madurez como disciplina matemática a partir de la segunda mitad del siglo XX, incorporando herramientas de casi todas las ramas de las matemáticas y planteando problemas que han llegado a atraer la atención de buena parte de los matemáticos contemporáneos. Además de la intensidad con que la informática ha proporcionado una cantidad ingente de problemas y aplicaciones, uno de los elementos decisivos en este proceso de maduración se puede identificar con la personalidad del matemático húngaro Paul Erdős. Algunos de los problemas que Erdős promovió han sido el germen de desarrollos matemáticos intensos que han abierto amplias perspectivas para la matemática del siglo XXI.

Este artículo discute tres áreas particularmente activas en las últimas décadas y en las que se plantean retos que, a nuestro juicio, configuran una parte importante del futuro desarrollo de la combinatoria: la teoría extremal, la combinatoria aditiva y los grafos aleatorios. Los tres temas se encuentran estrechamente relacionados y aportan elementos que, en cierto modo, constituyen un cuerpo de herramientas y métodos característicos de la combinatoria. Aunque estos tres temas no agotan las perspectivas contemporáneas de la combinatoria, ilustran la naturaleza de sus problemas y técnicas. Al final del artículo se mencionan algunos desarrollos recientes que contribuyen a dar una imagen más completa de las perspectivas actuales del antiguo arte de contar.

Por fortuna, la combinatoria cuenta con investigadores que poseen una inclinación especial hacia el arte de comunicar. El blog *Combinatorics and more* de Gil

Kalai[1] contiene relatos casi instantáneos de algunos de los avances más significativos en el área realizados en los últimos años. Los blogs de Terry Tao[2] o de Timothy Gowers[3] mantienen también una puesta al día de muchos temas de combinatoria enlazados en un contexto matemático amplio. Bajo riesgo de ser absorbido por un fascinante torrente de ideas matemáticas, estas fuentes permiten formarse una idea de la vitalidad del área y de la orientación de su desarrollo en el futuro inmediato.

2. Teoría extremal y método de regularidad de Szemerédi

La pregunta básica en la teoría extremal de grafos es la de determinar el máximo número de aristas en un grafo que no contiene un subgrafo dado. Este es el problema más característico dentro de la denominada teoría extremal en combinatoria, que abarca problemas diversos, no solo en grafos sino en otras estructuras combinatorias.

El problema original fue planteado y resuelto por Pál Turán en 1941, dando el valor preciso para el máximo número de aristas $\mathrm{ex}(n, K_{r+1})$ de un grafo de n vértices que no contiene un grafo completo K_{r+1} (que contiene todos los pares de vértices como aristas) de orden $r+1$. El teorema de Turán establece que

$$\mathrm{ex}(n, K_{r+1}) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2} + o(n).$$

Además, el mismo teorema proporciona la única estructura extremal posible, el denominado grafo de Turán $T_{n,r}$, que contiene el máximo posible de aristas sin contener K_{r+1} como subgrafo. El grafo de Turán consiste en una partición lo más equilibrada posible de los n vértices en r partes, cada una de tamaño $\lfloor n/r \rfloor$ o $\lceil n/r \rceil$, y todas las aristas que unen vértices en partes distintas.

Erdős tuvo la visión de apreciar el potencial matemático que planteaba el problema y la solución de Turán, y propuso una solución elegante y completa del problema extremal en teoría de grafos. Esta solución, contenida en el teorema de Erdős-Stone, proporciona el valor máximo del número de aristas en un grafo de orden n que no contiene un grafo dado H en términos de su número cromático $\chi(H)$. Recordemos que el número cromático de H es el mínimo tamaño de una partición del conjunto de vértices en partes estables (que no contienen aristas). El teorema de Erdős-Stone establece que, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n(\epsilon)$ tal que, para todo $n \geq n_0$,

$$\left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} - \epsilon\right)\frac{n^2}{2} \leq \mathrm{ex}(n, H) \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(H) - 1} + \epsilon\right)\frac{n^2}{2}. \qquad (1)$$

La demostración más común del teorema de Erdős-Stone refleja un aspecto importante de la naturaleza del problema: se prueba que, para n suficientemente grande, el umbral de aristas descrito en el teorema hace inevitable la aparición de un grafo de Turán con $\chi(H)$ partes en el que se puede sumergir el grafo H. El fenómeno

[1] `https://gilkalai.wordpress.com`
[2] `https://terrytao.wordpress.com`
[3] `https://gowers.wordpress.com`

de aparición de estructuras ordenadas simplemente por cuestiones de densidad (de aristas en este caso) es uno de los temas recurrentes en la obra matemática de Erdős. Uno de sus exponentes más brillantes fue el desarrollo del denominado método de regularidad, creado por Szemerédi en su solución de la conjetura de Erdős-Turán: todo conjunto de enteros con densidad positiva contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

El método de regularidad está basado en la observación de que un grafo suficientemente grande denso (en aristas) contiene necesariamente una estructura particular que describe cualitativa y cuantitativamente la parte aleatoria y la parte estructurada de cualquier estructura combinatoria (o matemática en general). Esta observación, el denominado *Lema de Regularidad de Szemerédi*, se puede describir de la siguiente forma:

> *Para todo $\epsilon > 0$ existen $M = M(\epsilon)$ y $n_0 = n_0(\epsilon)$ tales que cualquier grafo de $n \geq n_0$ vértices admite una partición de su conjunto de vértices en M partes iguales de modo que los grafos inducidos para casi todo par de partes son pseudoaleatorios.*

El enunciado preciso cuantifica los términos «para casi todo par» y «pseudoaleatorio» en términos de ϵ. El término pseudoaleatorio indica que la densidad relativa de aristas entre subconjuntos suficientemente grandes de un par dado difieren en menos de ϵ de la densidad del par que los contiene. Los pares con esta propiedad se denominan regulares y dan el nombre al lema de regularidad. El Lema de Regularidad solo tiene sentido para grafos densos, cuyo número de aristas es una proporción positiva del número total posible. En otro caso, la conclusión del enunciado no aporta información estructural relevante.

El Lema de Regularidad ha resultado un instrumento muy potente para el tratamiento de problemas extremales, tanto en combinatoria como en teoría de números. El instrumento ha sido completado con los denominados *lemas de conteo*, que dan estimaciones asintóticas del número de subgrafos específicos contenidos en un grafo denso, el denominado *Blow-up Lemma*, que establece que los pares regulares en grafos densos se comportan como grafos bipartitos completos en relación a la inmersión de grafos pequeños, y el *lema de eliminación*, que asegura que la existencia de un número pequeño de subgrafos específicos permite su eliminación suprimiendo un pequeño número de aristas. Este conjunto de resultados constituyen el denominado método de regularidad, que supuso una de las contribuciones que valieron a Endré Szemerédi el premio Abel 2012.

El método de regularidad ha sido sistemáticamente aplicado a la resolución de numerosas conjeturas abiertas en teoría extremal de grafos. Algunas de las más notables se han resuelto en los últimos años (ver, por ejemplo, Komlós y Simonovits [30] o Kühn y Osthus [31]).

La demostración de Szemerédi del teorema que lleva su nombre fue durante años considerada de una complejidad conceptual difícil de digerir, lo cual motivó el desarrollo de técnicas alternativas. Entre las más eficientes se encuentran las desarrolladas por Furstenberg en el contexto de la teoría ergódica, que permitió extender notablemente el enunciado del teorema original de Szemerédi al caso multidimensional y a la existencia de configuraciones más complejas que las progresiones aritméticas, en particular configuraciones definidas a través de polinomios. Una de estas extensiones trata la versión de densidad del denominado teorema de Hales-Jewett, un resultado originado en la teoría de juegos. El teorema de Hales-Jewett pertenece a la teoría de Ramsey, precedente conceptual en algún sentido del método de regularidad. El teorema básico de Ramsey establece que, para cualquier n, existe $N_0 = N_0(n)$ tal que cualquier partición de las aristas de un grafo completo de $N \geq N_0$ vértices contiene en alguna de sus partes un grafo completo de orden n. El teorema de Hales-Jewett es un enunciado análogo en el que el universo de referencia es el conjunto de palabras sobre un alfabeto, y el objeto que se encuentra en alguna parte de cualquier partición, si las palabras son de suficiente longitud, es lo que se denomina una línea combinatoria. La versión de densidad del teorema de Hales-Jewett establece que una línea combinatoria aparece en una subconjunto de palabras por el solo hecho de que sea suficientemente denso. Una de las aplicaciones de esta versión de densidad es precisamente el teorema de Szemerédi, codificando las progresiones aritméticas en términos de líneas combinatorias.

La obtención por métodos puramente combinatorios de los resultados obtenidos por medio de la teoría ergódica fue uno de los proyectos que se completaron en los últimos años del siglo XX. La clave estaba en una correcta extensión del lema de regularidad de Szemerédi a hipergrafos, grafos cuyas aristas son conjuntos de vértices de tamaño $k \geq 2$, siendo los grafos el caso $k = 2$. Esta extensión fue realizada independientemente por Gowers en un monumental trabajo publicado en *Annals of Mathematics* [18], por Nagle, Rödl y Schacht [37], y por Austin y Tao [4]. Esta generalización ha abierto un enorme abanico de aplicaciones y, en particular, proporciona una demostración simple y elegante del teorema de Szemerédi. En un *tour de force* final se obtuvieron tres demostraciones distintas de la versión de densidad del teorema de Hales-Jewett por medio de uno de los primeros proyectos *Polymath*[4], un esfuerzo colaborativo abierto en la red que plantea cuestiones interesantes sobre el proceso de creación matemática (o científica en general) en el siglo XXI.

El estudio de grandes redes es uno de los retos matemáticos actuales. Sus aplicaciones en física estadística, en redes de comunicaciones o en computación cuántica promovieron el desarrollo de un proyecto originado en el Theory Group de Microsoft Research en Redmond cuyo resultado es la monografía *Large Networks and Graph Limits* de Lóvasz [33]. El objetivo último del proyecto es definir una métrica adecuada en el espacio de grafos para la obtención de nociones útiles de límites de grafos.

Siguiendo el contexto planteado por Benjamini y Schramm, el concepto de límite de una sucesión de grafos se basa en la convergencia de sucesiones de homomorfismos. Un homomorfismo entre grafos es una aplicación que preserva las aristas. Dados dos grafos H y G, la probabilidad que una aplicación aleatoria de H en G sea un homomorfismo se denota por $t(H, G)$. Una sucesión de grafos G_n es convergente si, para cada grafo H, la sucesión $t(H, G_n)$ converge. Este planteamiento proporciona una definición adecuada de grafo límite en el espacio denominado de *grafones.*

[4]`https://gowers.wordpress.com/category/polymath1/`

Para grafos densos proporciona también una interpretación analítica del lema de regularidad, que se expresa diciendo que el espacio de grafones es compacto en la topología derivada de la métrica anterior. Por otra parte, el uso de homomorfismos como herramienta para la definición de esta topología conduce a una algebrización del espacio de grafos que proporciona un lenguaje sucinto y eficaz en el contexto de las denominadas *flag algebras*, introducidas por Razborov [43] en su asombrosa resolución del problema de enumeración de triángulos en grafos en términos de la densidad de aristas.

Las múltiples conexiones que este proyecto de grafos límite establece entre análisis, álgebra, estadística, física, informática teórica, teoría de grafos, topología y probabilidad, y los múltiples problemas que plantea en estos diversos ámbitos, lo convierten en una de las áreas más activas en la combinatoria contemporánea.

Gran parte de los resultados en teoría extremal de grafos mencionados hasta aquí cobran su mayor potencia en el estudio de grafos densos. Estos resultados se desvanecen en general cuando se estudian problemas análogos en grafos dispersos. Sin embargo, los fenómenos que aparecen al considerar grafos con densidad positiva de aristas permanecen en el caso de grafos aleatorios o pseudaleatorios. Los primeros se construyen a través de diversos modelos, de los cuales el de Erdős-Rényi, ampliamente descrito en el apartado 4, es el que ofrece el mejor contexto para su análisis. Las propiedades generales de grafos aleatorios son capturadas por el comportamiento de estadísticos simples, en particular por el número de ciclos de longitud 4, lo que conduce a la noción de grafos pseudoaleatorios.

De nuevo el problema que consolidó desarrollos diversos en las versiones aleatorias de los resultados anteriores procede de la teoría combinatoria de números. Resolviendo un viejo problema planteado por Legendre, pero que subyacía en conjeturas de Erdős y Turán, Green y Tao [20] probaron la existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas en los números primos. La aproximación general al problema tenía por objetivo desarrollar un teorema de Szemerédi relativo. Esto es, determinar conjuntos de números tales que cualquier subconjunto denso contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. La propiedad que permite estas extensiones es precisamente la naturaleza pseudoaleatoria (en un sentido preciso que no detallamos aquí) de estos conjuntos, y una parte sustancial de la demostración de Green y Tao consiste en verificar esta propiedad para el conjunto de primos.

La obtención de versiones dispersas del teorema de Szemerédi en el contexto combinatorio fue desarrollada por Kohayakawa [28], Conlon y Gowers [12] y Schacht [45]. En estos trabajos se desarrollan versiones dispersas del método de regularidad para conjuntos aleatorios combinando aplicaciones en teoría extremal, teoría combinatoria de números y teoría de Ramsey.

Uno de los teoremas que ilustran la naturaleza de estos resultados es precisamente la versión aleatoria del teorema de Szemerédi: para cualquier $k \geq 3$ existe un umbral $p_k(n)$ a partir del cual cualquier conjunto aleatorio de los primeros n enteros que contiene cada elemento con probabilidad $p \geq p_k(n)$ independientemente, tiene la propiedad de que cualquiera de sus subconjuntos de densidad relativa positiva contiene con alta probabilidad (para $n \to \infty$) una progresión aritmética de longitud k.

La versión dispersa del teorema extremal de Erdős-Stone establece el umbral de probabilidad para el que, dados un grafo F y $\epsilon > 0$, un grafo aleatorio $G(n, p(n))$, en el modelo de Erdős-Rényi, tiene la propiedad de que cualquier subgrafo H con al menos

$$e(H) \geq \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + \epsilon\right) e(G(n, p_n))$$

aristas, contiene una copia de F.

La obtención de estas versiones dispersas del método de regularidad, de hecho anticipadas hace más de una década por Rödl y Frankl, han abierto también excitantes perspectivas de desarrollo en el futuro inmediato.

3. Combinatoria aditiva

El uso de métodos combinatorios para la resolución de problemas en teoría de números, la más profunda pasión de Paul Erdős, es característico de sus matemáticas. En la sección anterior se ha descrito la forma en que la conjetura de Erdős-Turán y su resolución por Szemerédi sirven de hilo conductor a desarrollos profundos experimentados por la combinatoria en las últimas décadas. El problema planteado por la conjetura de Erdős-Turán forma parte de una serie de problemas que tradicionalmente se englobaban en la denominada teoría aditiva de números, y que contienen problemas célebres como la conjetura de Goldbach, el problema de Waring, los conjuntos de Sidon o el problema de suma-producto, entre otros. La característica común en todos ellos es el análisis de propiedades relacionadas con la estructura aditiva de los conjuntos de números. El contexto general de este tipo de problemas cristaliza con la monografía *Additive Combinatorics* de Tao y Vu [46], en la que se acuña el término de combinatoria aditiva para referirse a problemas como los mencionados en el contexto de un grupo aditivo (abeliano o no), o de las relaciones entre las estructuras de grupo aditivo y multiplicativo en anillos o cuerpos. Los métodos del análisis de Fourier, probabilísticos y puramente combinatorios constituyen la combinación típica para el análisis de este tipo de problemas y forman parte consustancial de la combinatoria aditiva, de la que la combinatoria aporta la naturaleza de los problemas, además de una parte de las técnicas de análisis.

Un resultado ilustrativo del tipo de problemas que aborda la combinatoria aditiva es el célebre teorema de Freiman. La suma de Minkoswski de dos conjuntos A, B en un grupo aditivo es el conjunto $A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$. La desigualdad de Brunn-Minkowski proporciona una cota inferior justa del volumen de $A+B$ en relación al volumen de los sumandos en el espacio euclídeo d-dimensional: si $A, B \subset \mathbb{R}^d$ son conjuntos compactos d-dimensionales (no contenidos en un hiperplano) entonces

$$(\mathrm{vol}(A + B))^{1/d} \geq (\mathrm{vol}(A))^{1/d} + (\mathrm{vol}(B))^{1/d}.$$

Para el caso de conjuntos finitos de enteros se tiene la desigualdad análoga

$$|A + B| \geq |A| + |B| - 1,$$

en la que se da la igualdad si y solo si A y B son progresiones aritméticas con la misma diferencia. El estudio del problema de Waring (el número mínimo de sumandos con los que cualquier entero se expresa como suma de potencias k-ésimas) condujo a Freiman a analizar la estructura de los conjuntos cuya suma es pequeña. Dado un conjunto finito de enteros A, el tamaño de su doble, $|2A| = |A + A|$, se encuentra entre $2|A| - 1$ y $|A|^2/2$. Se dice que la suma es pequeña si $|A + A| = c|A|$ para una constante c (y $|A|$ grande). El teorema de Freiman describe esta estructura:

> *Si un conjunto de enteros A satisface $|2A| \leq c|A|$ entonces existe una progresión aritmética d-dimensional de la que A es un subconjunto denso. La densidad de A en la progresión y su dimensión d dependen solo de c.*

La mejor manera de describir una progresión aritmética d-dimensional es a través de los denominados homomorfismos de Freiman. En el contexto aditivo, en el que la relación relevante es la adición, un homomorfismo $f : A \subset G \to H$ del subconjunto A de un grupo aditivo G en un grupo aditivo H es una aplicación que preserva las sumas: $x + y = x' + y' \Rightarrow f(x) + f(y) = f(x') + f(y')$. Por supuesto, un homomorfismo de grupos tiene esta propiedad, pero la estructura global algebraica no es necesariamente relevante para los homomorfismos de Freiman. Una progresión aritmética d-dimensional es la imagen en $\mathbb{Z}$ de un producto de intervalos en $\mathbb{Z}^d$ por un homomorfismo de Freiman.

Ruzsa [44] dio una demostración extremadamente elegante del teorema de Freiman que combina métodos combinatorios (las desigualdades de Plünecke y el teorema de Menger de conectividad en grafos), geométricos (los teoremas de Minkowski), analíticos (vecindades de Böhr) y las ideas de Freiman. Es por ello que se suele referir al resultado como el teorema de Freiman-Ruzsa.

La determinación cuantitativa de la relación entre la densidad de A en la progresión aritmética y su dimensión constituye uno de los problemas abiertos más relevantes en el área. Tratándose de un problema básico, sus aplicaciones son múltiples y todas ellas adolecen de la debilidad en la estimaciones de estas relaciones cuantitativas.

Además de su demostración del teorema de Freiman, Ruzsa dio una versión del teorema para grupos abelianos de torsión acotada. En este caso, la estructura se describe en términos de densidad en clases laterales por algún subgrupo. Ello conduce a la noción de *grupos aproximados*, conjuntos en grupos arbitrarios para los que el tamaño de su producto $|A \cdot A|$ difiere poco del tamaño del conjunto A. El desarrollo de un teorema de Freiman general para grupos generales culminó con el monumental trabajo de Breuillard, Green y Tao [7] en el que las técnicas probabilísticas, de teoría ergódica, combinatorias y analíticas convergen en un resultado que puede verse como una extensión del teorema de Gromov sobre la relación entre el crecimiento de los conjuntos A^n, $n \in \mathbb{N}$, en grupos y su estructura algebraica.

El crecimiento de $|A^n|$ para un subconjunto finito A en un grupo está relacionado con los recientes avances en la resolución de otra de las importantes conjeturas abiertas en las últimas décadas. Interpretando A como un conjunto de generadores, se trata de analizar el crecimiento de las bolas en el grafo de Cayley $\Gamma = \mathrm{Cay}(G, A)$, donde $G = \langle A \rangle$ es el grupo generado por A. La conjetura de Babai establece que el diámetro de Γ es el menor posible, del orden de $\log |G|$, cuando G es un grupo simple. Para algunas elecciones de G y A, se puede demostrar, usando por ejemplo el teorema del agujero espectral de Selberg, que se obtienen familias de expansores, grafos en los que la frontera $|\partial X|$ de un conjunto X de vértices satisface $|\partial X| \geq c|X|$ para una constante uniforme para toda la familia. Los expansores han sido extensamente estudiados por sus conexiones con la geometría, la combinatoria y, especialmente, por sus aplicaciones en teoría algorítmica y en teoría de la información (véase, por ejemplo, Lubotzky [34]). Una de las consecuencias de la propiedad de expansión es precisamente el valor logarítmico del diámetro del grafo. A pesar de todas las evidencias sobre la conjetura, solo los recientes resultados de Harald Helfgott, primero para grupos simples de Lie y después para grupos alternados (ver [23], por ejemplo) han constituido pasos decisivos hacia la resolución de la conjetura. La demostración contiene algunos de los elementos típicos de la combinatoria aditiva: análisis de Fourier en cuerpos finitos, el lema de Balog-Szemerédi-Gowers, que establece una relación entre el número de cuádruples (x, y, z, t) con $x + y = z + t$, $x, y, z, t \in A$ y el tamaño de $A + A$, y estimaciones en el problema suma-producto relacionadas con la conjetura de Erdős y Szemerédi según la cual $\min\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geq |A|^{2-\epsilon}$. Cada uno de estos ingredientes constituye en sí mismo un intenso campo de investigación.

Concluimos esta breve panorámica del desarrollo reciente en combinatoria aditiva volviendo al método de regularidad de Szemerédi. Green [19] dio una versión del lema de regularidad para grupos abelianos, donde la estructura descrita en el lema de regularidad adopta una naturaleza algebraica. Una de las consecuencias de la versión algebraica de Green es el siguiente lema de eliminación:

> *Para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que si la ecuación*
>
> $$a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = 0$$
>
> *tiene menos de $\delta|G|^{k-1}$ soluciones en un subconjunto A de un grupo abeliano G, entonces la supresión de $\epsilon|A|$ elementos de A elimina todas las soluciones.*

El lema de eliminación tiene numerosas aplicaciones en combinatoria aditiva, entre las que se cuenta el teorema de Szemerédi para progresiones de longitud 3 en grupos abelianos. La extensión del lema de eliminación a sistemas de ecuaciones en grupos abelianos, a grupos compactos y en algunas versiones a grupos no abelianos, por medio del lema de regularidad para hipergrafos, extiende estas aplicaciones a diversos contextos. Una de las más notables es la demostración de la versión multidimensional del teorema de Szemerédi, de la que se contaba solo con pruebas ergódicas, a un amplio espectro de contextos, que incluyen los enteros, los cuerpos finitos o los grupos abelianos de torsión acotada (véase [11], por ejemplo).

4. Grafos aleatorios

El estudio de estructuras aleatorias tiene una larga tradición en combinatoria. Propiedades de permutaciones, particiones, árboles y otros objetos aleatorios han sido estudiadas profusamente en el contexto de la combinatoria enumerativa. Véase la multitud de resultados recogidos en [15].

De todos modos, los objetos más estudiados han sido los grafos aleatorios. El modelo clásico fue introducido por Erdős y Rényi en un famoso artículo hace más de 50 años [14], y desde entonces se ha convertido en una de las áreas más activas de la combinatoria, con varios libros y miles de artículos publicados desde entonces. El modelo original es $G(n, M)$, que consiste en grafos etiquetados con n vértices y M aristas, con la distribución uniforme. Posteriormente se vio que es más conveniente trabajar en el modelo $G(n, p)$, con n vértices etiquetados y donde cada posible arista se tira independientemente con probabilidad p. El modelo $G(n, M)$ se aproxima bien mediante $G(n, p)$ cuando $M = p\binom{n}{2}$; este último tiene la gran ventaja de que las aristas aparecen de forma *independiente*, lo cual permite calcular probabilidades de sucesos complejos. Las referencias estándar en este campo son [5, 25].

El modelo $G(n, p)$

El modelo $G(n, p)$ cobra toda su fuerza cuando $p = p(n)$ es una función de n. El concepto más importante en este contexto es el de *umbral.* Si A es una propiedad de grafos (ser conexo, hamiltoniano, contener un triángulo, etc.), decimos que $p_0(n)$ es un umbral para la propiedad A si

$$\mathbb{P}(G(n, p) \text{ satisface } A) \to \begin{cases} 0 & \text{si } p/p_0 \to 0, \\ 1 & \text{si } p/p_0 \to \infty. \end{cases}$$

Toda propiedad monótona (invariante por adición de aristas) tiene un umbral. Se ha determinado el umbral para muchas propiedades importantes monótonas de grafos: ser conexo, hamiltoniano, contener un grafo H como subgrafo, no ser plano, etc. Otras propiedades más complejas requieren herramientas más avanzadas, como el método de las ecuaciones diferenciales para analizar la evolución de algoritmos aleatorios. Sigue siendo un área activa, en la que se investigan propiedades de $G(n, p)$ cada vez más difíciles con herramientas cada vez más sofisticadas.

El fenómeno que ha recibido más atención es la aparición de la componente gigante. En este caso, el umbral toma otra forma. Si $p = c/n$, el grafo es ralo, en el sentido de que tiene solamente un número lineal de aristas. Cuando $c = 1$ se produce una transición de fase espectacular, ya detectada en el trabajo original de Erdős y Rényi.

Teorema 1. *Sea $p = c/n$. Entonces $G(n, p)$ satisface:*

1. *Si $c < 1$, todas las componentes conexas son árboles o tienen un único ciclo, y su tamaño es $O(\log n)$.*
2. *Si $c > 1$, hay una única componente gigante, es decir, que contiene una fracción positiva de los vértices. Las restantes componentes tienen tamaño $O(\log n)$.*

Desde entonces, este resultado se ha refinado en múltiples direcciones, especialmente analizando la estructura fina de $G(n, p)$ cerca del punto crítico $p = 1/n$, y las demostraciones se han simplificado utilizando procesos de ramificación y otras herramientas de la teoría de la probabilidad. Por ejemplo, un problema planteado ya en [14], determinar la probabilidad de que $G(n, 1/n)$ sea un grafo plano, ha sido resuelto solo recientemente [39].

Otro fenómeno de transición de fase fascinante es la k-colorabilidad. Una propiedad monótona A tiene un *umbral fino* p_0 si para todo $\epsilon > 0$ se tiene

$$\mathbb{P}(G(n, (1-\epsilon)p_0) \text{ satisface } A) \to 0,$$
$$\mathbb{P}(G(n, (1+\epsilon)p_0) \text{ satisface } A) \to 1.$$

Por ejemplo, la propiedad de ser conexo tiene un umbral preciso, pero la de contener un triángulo no (hablamos entonces de un umbral grueso).

Un famoso resultado [1] afirma que la propiedad de no ser k-coloreable tiene un umbral fino $d_k(n)$ para $k \geq 3$ fijo. Se conjetura que $d_k(n)$ tiende a una constante d_k. Es decir, existe una constante d_k tal que, para todo $\epsilon > 0$, si un grafo aleatorio tiene menos de $(d_k - \epsilon)n$ aristas es k-coloreable, y si tiene más de $(d_k + \epsilon)n$ no lo es. Suponiendo la conjetura cierta, se han dedicado muchos esfuerzos a estimar el valor de d_k. Un argumento elemental muestra que

$$d_k \leq 2k \log k - \log k,$$

mientras que Achlioptas y Naor [2] demostraron, en un famoso trabajo, que

$$d_k \geq 2k \log k - 2 \log k - 2.$$

Recientemente, Coja-Oghlan y Vilenchik [10] han resuelto casi el problema, al demostrar que

$$2k \log k - \log k - 2 \log 2 \leq d_k \leq 2k \log k - \log k - 1.$$

Este resultado utiliza de manera rigurosa las ideas del método de la cavidad, un método heurístico de la física estadística, que predice con precisión el umbral de k-colorabilidad y otros problemas de naturaleza combinatoria.

OTROS MODELOS

Como hemos visto, el modelo $G(n, p)$ permite un análisis extremadamente preciso, pero tiene sus limitaciones. En primer lugar, el modelo no refleja bien las propiedades de las redes que uno encuentra en las aplicaciones, ya sean redes sociales, económicas o biológicas, redes que divergen fuertemente del modelo $G(n, p)$. Un parámetro básico es la distribución de los grados de los vértices. Sea d_k la probabilidad de que un vértice aleatorio tenga grado k. Se observa que la distribución $\{d_k\}_{k\geq 0}$ en redes grandes como internet suele tener una cola pesada (*heavy tail*), es decir, que no decrece exponencialmente. La distribución de grados en $G(n, p)$ es binomial $B(n-1, p)$, que tiende a Poisson(λ) si $np \to \lambda$, cuya cola decrece exponencialmente. Por contra, en las redes del mundo real suele decrecer como una potencia $k^{-\alpha}$.

El modelo de grafos aleatorios generalizados (ver [24] para este y otros modelos no homogéneos) permite obtener grafos no homogéneos, en los que no todos los vértices tienen el mismo grado. Básicamente, se tiene un peso para cada vértice y la probabilidad de una arista xy depende de los pesos de x e y. Los pesos pueden ser deterministas o variables independientes idénticamente distribuidas. Esto da una gran flexibilidad y permite obtener modelos adaptados a situaciones muy diversas. El modelo más general es el estudiado en [6], en términos de medidas de Borel en espacios métricos.

En otra dirección, tenemos el modelo de *adhesión preferente*. Es un modelo en el que se añaden vértices dinámicamente y se conectan a los vértices ya existentes dependiendo de su grado. El principio es que los vértices con grado elevado tienen más probabilidad de *atraer* nuevos vértices.

Finalmente, mencionamos el modelo $G(n, r)$ de grafos geométricos aleatorios [40]. Se toman n puntos aleatorios independientemente en un dominio geométrico (un cuadrado, un círculo, etc.) y se crea una arista entre dos puntos si están a distancia menor que r (que, en general, es una función de n). Igual que en el modelo $G(n, p)$, se ha determinado el umbral de numerosas propiedades, así como la existencia de una transición de fase que da lugar a la componente gigante. En dimensión dos, el caso más estudiado, el grado esperado de un vértice en $G(n, r)$ es aproximadamente $\pi r^2 n$. Esto explica por qué $G(n, r)$ tiene propiedades en parte similares a $G(n, p = \sqrt{r})$. Por ejemplo, el umbral para ser conexo es de orden $\log n/n$ en $G(n, p)$ y de orden $\sqrt{\log n/n}$ en $G(n, r)$.

5. Grafos aleatorios con restricciones

El modelo $G(n, p)$ no es útil para estudiar clases de grafos definidas por una condición global. Por ejemplo, si queremos analizar grafos aleatorios sin triángulos, o grafos regulares, o grafos acíclicos, no es posible obtener un modelo satisfactorio si tiramos las aristas de manera independiente. En estos casos hay que buscar un modelo alternativo, generalmente basado en contar grafos con ciertas propiedades.

A partir de ahora, $\mathcal{G}$ denota una clase de grafos etiquetados, $\mathcal{G}_n$ los grafos en $\mathcal{G}$ con n vértices y $g_n = |\mathcal{G}_n|$. Un grafo aleatorio es un grafo de $\mathcal{G}_n$ con la distribución uniforme $1/g_n$. Es decir, todos los grafos de $\mathcal{G}_n$ tienen la misma probabilidad. Nuestro interés se centra en estudiar las propiedades típicas de un grafo aleatorio cuando $n \to \infty$. Decimos que un suceso A se satisface *con alta probabilidad* si $\mathbb{P}_{\mathcal{G}_n}(A) \to 1$ cuando $n \to \infty$.

Grafos regulares

Un grafo es d-regular si todos los vértices tienen grado d. Supondremos d fijo, aunque en general d puede ser una función de n. En el modelo de *emparejamientos* tenemos n celdas etiquetadas $\{1, 2, \ldots, n\}$, y cada una de ellas contiene d elementos distinguibles, de forma que dn sea par. Un emparejamiento es una partición en $nd/2$ pares disjuntos. Si pensamos en las celdas como vértices y en los elementos como semiaristas, un emparejamiento de los nd elementos, al contraer las celdas a vértices, da lugar a un multigrafo d-regular con n vértices: es un multigrafo ya que pueden aparecer lazos (dos elementos de una misma celda emparejados) y aristas múltiples (varios pares de elementos de dos celdas emparejados).

El número de emparejamientos de $2N$ objetos es $(2N)!/(N!\,2^N)$. Por lo tanto, el número de multigrafos que obtenemos es

$$(dn-1)!! = \frac{(dn)!}{(dn/2)!\,2^{dn/2}}. \tag{2}$$

La probabilidad de obtener un multigrafo dado depende del número de lazos y de aristas de cada multiplicidad, pero un grafo simple se obtiene de exactamente $(d!)^n$ maneras, con lo cual la distribución sobre grafos simples es uniforme. Esto nos da el modelo uniforme: tiramos un emparejamiento al azar y lo rechazamos si tiene lazos o aristas dobles.

Sea $E(n,d)$ el conjunto de emparejamientos y $R(n,d)$ el conjunto de grafos d-regulares simples, ambos con la distribución uniforme. Para probar propiedades en $R(n,d)$ (el modelo que realmente nos interesa) podemos trabajar en $E(n,d)$ (el modelo en el que podemos calcular), condicionando sobre el suceso de que el grafo resultante sea simple. El hecho siguiente es consecuencia directa de que todos los grafos simples tienen la misma probabilidad:

> *Sea A un suceso (un conjunto de grafos) en $R(n,d)$ y sea A' el conjunto de los emparejamientos en $E(n,d)$ que corresponden a grafos en A. Entonces*
> $$\mathbb{P}_{R(n,d)}(A) = \mathbb{P}_{E(n,d)}(A')\mathbb{P}(\text{Simple}).$$

Sea $k \geq 1$ fijo. La probabilidad de que un emparejamiento de $E(n,d)$ contenga k pares disjuntos es

$$p_k = \frac{(dn-2k-1)!!}{(dn-1)!!} \sim \frac{1}{(dn)^k}, \qquad n \to \infty.$$

El resultado anterior permite estimar la probabilidad de sucesos elementales en $E(n,d)$ y, por proyección, en $G(n,d)$.

La probabilidad de ser simple puede estimarse de la siguiente manera. Supongamos d fijo. Se demuestra que, en el espacio $E(n,d)$, el número X_k de ciclos de longitud $k \geq 1$, para k fijo, converge hacia una variable Poisson de parámetro $\lambda_k = (d-1)^k/(2k)$, cuando $n \to \infty$. Además, $X_1, \ldots, X_k$ son asintóticamente independientes. El grafo asociado a un emparejamiento es simple si no tiene ciclos de longitudes uno y dos. Usando el lema anterior, se deduce que

$$\mathbb{P}(\text{Simple}) \sim e^{-\lambda_1}e^{-\lambda_2} = \exp\left(\frac{1-d^2}{4}\right).$$

No tenemos una fórmula exacta para el número de grafos regulares, pero la fórmula (2), junto con la estimación anterior y la de Stirling, proporciona una estimación precisa.

Teorema 2. *Para d fijo, el número de grafos d-regulares con n vértices es*

$$|R_{n,d}| \sim \sqrt{2}e^{(1-d^2)/4}n^{dn/2}\left(\frac{d^d}{e^d(d!)^2}\right)^{n/2}.$$

El hecho de que el número de ciclos de longitud fija tenga una distribución de Poisson implica lo siguiente: localmente un grafo aleatorio d-regular es como un árbol d-regular. De hecho, la longitud del ciclo más corto es de orden $\log n$.

El modelo de emparejamientos ha sido clave para demostrar propiedades profundas de grafos regulares aleatorios (ver [47] para una panorámica). Por ejemplo, un grafo d-regular es, con alta probabilidad, d-conexo, hamiltoniano y no tiene automorfismos no triviales. Su número cromático es igual a k, $k+1$ o $k+2$, donde k es el menor entero tal que $d < 2k \log k$. Muy recientemente se ha demostrado ([9]) que el número cromático se concentra en un único valor.

En definitiva, tenemos un modelo $E(n,d)$ en el que podemos contar y, por lo tanto, podemos estimar probabilidades de sucesos elementales. Utilizando técnicas de probabilidad, tales como los métodos del primer y segundo momento, es posible demostrar propiedades relevantes de grafos aleatorios d-regulares. El modelo se extiende con facilidad a grafos con una secuencia de grados fija $(d_1,\ldots,d_n)$ con $\sum d_i$ par, siempre que $\max\{d_i\}$ sea acotado. Mucho más difícil es el análisis de $G(n,d)$ cuando d es una función de n, especialmente el caso denso $d = cn$.

Clases de grafos monótonas

Una clase de grafos $\mathcal{G}$ es *monótona* si cumple lo siguiente: si $G \in \mathcal{G}$ y H es un subgrafo de G, entonces $H \in \mathcal{G}$. Un grafo es H-libre si no contiene H como subgrafo. La clase de grafos H-libres es claramente monótona. Un problema difícil es estimar el número de grafos H-libres. Si $\mathrm{ex}(H,n)$ es la función extremal de H, entonces existen grafos H-libres con este número de aristas. Por lo tanto, tal como hemos visto en el apartado 2, si $\chi(H) = r+1 \geq 3$, el número de grafos H-libres es al menos

$$2^{\left(1-\frac{1}{r}+o(1)\right)\binom{n}{2}}.$$

Erdős, Frankl y Rödl [13] probaron que este es el orden de magnitud correcto.

Teorema 3. *Sea $\chi(H) = r+1$. Entonces el número de grafos H-libres con n vértices es de orden*

$$2^{\left(1-\frac{1}{r}+o(1)\right)\binom{n}{2}}.$$

Este es un resultado muy poco preciso, ya que el término $o(1)$ puede esconder un factor tan grande como $2^{n^{2-\epsilon}}$. Veamos cómo en algunos casos se pueden obtener estimaciones mucho más precisas.

Dadas dos clases de grafos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$, decimos que *casi todo grafo* de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{B}$ si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{A}_n|}{|\mathcal{B}_n|} = 1.$$

Claramente, un grafo bipartito no tiene triángulos. Lo sorprendente es que casi todos los grafos sin triángulos son bipartitos, es decir, prohibir un triángulo implica, asintóticamente, prohibir cualquier ciclo impar. Esto fue demostrado por primera vez por Erdős, Kleitman y Rothschild en los años 1970. La demostración se basa en contar grafos, pero de una forma mucho menos precisa que en el apartado anterior sobre grafos regulares. Este resultado tiene como consecuencia que un buen modelo de grafos sin triángulos aleatorios son los grafos bipartitos aleatorios. Para estos, tenemos el modelo $G(n_1, n_2, 1/2)$: una bipartición de los vértices $V = A \cup B$ con $|A| = n_1, |B| = n_2$, y aristas entre vértices de A y de B independientemente con probabilidad $1/2$. Este modelo se analiza como $G(n,p)$; de hecho, no es difícil ver que si $n = |V|$, entonces n_1 y n_2 difieren en $O(\log n)$ con alta probabilidad.

Un grafo r-partito no puede contener el grafo completo K_{r+1}. El siguiente resultado, demostrado en [29], es una importante generalización.

TEOREMA 4. *Para r fijo, casi todos los grafos K_{r+1}-libres son r-partitos.*

Más en general, sea H un grafo con número cromático $\chi(H) = r + 1$, $r \geq 2$. Nuevamente, un grafo r-partito es H-libre, ya que, si no, H sería r-coloreable. ¿Podemos asegurar que casi todos los grafos H-libres son r-partitos? En general no, pero hay una propiedad que sí permite obtener esta conclusión. Decimos que una arista e de un grafo G es crítica si $\chi(G-e) < \chi(G)$. Prömel y Steger [41] demostraron el siguiente resultado, que generaliza los anteriores.

TEOREMA 5. *Sea H un grafo con $\chi(H) = r + 1 \geq 3$ y tal que contiene una arista crítica. Entonces casi todos los grafos H-libres son r-partitos. El recíproco también es cierto: si casi todos los grafos que no contienen H son r-partitos, entonces H contiene una arista crítica.*

Claramente, cualquier arista de un grafo completo es crítica, con lo que el teorema 5 implica el teorema 4.

El problema es mucho más difícil si H es bipartito, una situación que no cubre el teorema anterior. El caso prototípico es $H = C_4$. La función extremal de C_4 es de orden $\frac{1}{2}n^{3/2}$, de modo que hay al menos $2^{\frac{1}{2}n^{3/2}}$ grafos C_4-libres. Kleitman y Winston [27] probaron una cota superior $2^{1.082n^{3/2}}$, pero determinar la constante exacta sigue siendo una cuestión abierta.

CLASES DE GRAFOS HEREDITARIAS

Decimos que un grafo G contiene H como subgrafo inducido si existe un conjunto de vértices $U \subseteq V(G)$ tal que U, junto con todas las aristas de G que unen vértices de U, es isomorfo a H. Denotamos $\operatorname{Forb}(H)$ la clase de grafos que no contienen H como subgrafo inducido. La diferencia entre prohibir subgrafos ordinarios e inducidos es grande. Por ejemplo, hemos visto que el número de grafos que no contienen C_4 es de orden $2^{n^{3/2}}$. Sin embargo, $|\operatorname{Forb}(C_4)_n|$ es mucho mayor. Tomemos un grafo completo A y un grafo vacío B, ambos con $n/2$ vértices, y aristas cualesquiera entre A y B. Es fácil ver que dicho grafo no contiene C_4 inducido. Deducimos que $|\operatorname{Forb}(C_4)_n| \geq 2^{n^2/4}$. De hecho, es una muy buena estimación. Decimos que un grafo es *partido* (*split* en inglés) si el conjunto de vértices puede partirse en un grafo completo y un grafo vacío. Por el argumento anterior tenemos que

$$\text{Grafos partidos} \subset \text{Forb}(C_4).$$

Prömel y Steger (1991) probaron que casi todos los grafos de $\text{Forb}(C_4)$ son partidos, así que de nuevo tenemos un modelo adecuado para grafos C_4-libres aleatorios.

Una clase muy relevante en teoría de grafos y optimización combinatoria es la clase de grafos *perfectos*. Un grafo G es perfecto si, para cada subgrafo inducido H de G, se tiene $\chi(H) = w(H)$, donde $w(H)$ es el máximo tamaño de un subgrafo completo. Con esta definición, parece improbable que podamos analizar grafos perfectos aleatorios, pero no es así. Un grafo G es *partido generalizado* ($\mathcal{PG}$) si bien G o su complementario satisfacen la siguiente propiedad: el conjunto de vértices puede partirse en un grafo completo A y una colección disjunta de grafos completos $B_1, \ldots, B_k$ de manera que no hay aristas entre B_i distintos. Dejamos al lector demostrar el hecho de que

$$\mathcal{PG} \subset \text{Grafos perfectos} \subset \text{Forb}(C_5).$$

Nuevamente, tenemos un resultado que nos dice que casi todo grafo de $\text{Forb}(C_5)$ es partido generalizado [42]. La consecuencia es muy sorprendente: casi todos los grafos perfectos son $\mathcal{PG}$, que es una clase muy sencilla. Utilizando este hecho, McDiarmid y Yolov (comunicación personal) han demostrado, por ejemplo, que casi todo grafo perfecto es hamiltoniano.

Grafos aleatorios planos

Consideremos la clase $\mathcal{P}$ de grafos planos, una clase de gran importancia en combinatoria. Hasta hace pocos años no sabíamos cómo analizar grafos aleatorios en $\mathcal{P}$. La solución de Giménez y Noy [17] al problema de estimar asintóticamente el número de grafos planos abrió la puerta al análisis fino de grafos planos aleatorios. En [17] se analizan parámetros básicos como el número de aristas y componentes conexas. En trabajos posteriores se analizan parámetros más complejos como el diámetro o el grado máximo de los vértices. A continuación describimos algunas propiedades básicas de un grafo aleatorio G de $\mathcal{P}$, que se satisfacen con alta probabilidad:

- Es conexo con probabilidad[5] $p \approx 0.96$. El número de componentes conexas se distribuye como $1 + \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda = -\log(p) \approx 0.037$. La mayor componente conexa contiene «casi todos» los vértices, en el sentido de que su complemento tiene tamaño esperado constante.
- El número X_n de aristas es asintóticamente normal con $\mathbb{E}(X_n) \sim \mu n \approx 2.21n$ (recordemos que un grafo plano tiene como mucho $3n - 6$ aristas). Más aún, X_n está fuertemente concentrado: la probabilidad de que $|X_n - \mu_n| > \epsilon n$ es exponencialmente pequeña para todo $\epsilon > 0$.

[5] Todas las constantes que aparecen en lo que sigue son aproximaciones de constantes bien definidas, calculables analíticamente con tanta precisión como se desee.

- Para cada grafo conexo plano H fijo, G contiene un número lineal de copias disjuntas de H.
- Para cada $k \geq 1$, el número esperado de vértices de grado k es $\sim d_k n$, donde los d_k son calculables. Se tiene $\sum_{k\geq 1} d_k = 1$.

Las técnicas para probar estos resultados son analíticas. Si g_n es el número de grafos planos con n vértices, se demuestra en [17] que la serie

$$G(z) = \sum_n \frac{g_n}{n!} z^n$$

es analítica en $z = 0$ y tiene radio de convergencia $\rho \approx 0.37$ (la presencia de $n!$ en el denominador se debe a que los grafos son *etiquetados*). Cerca de ρ se tiene una expansión singular

$$G(z) = g(z) + h(z)(1 - z/\rho)^{5/2},$$

donde g y h son analíticas en ρ. Utilizando los teoremas de transferencia de Flajolet y Odlyzko (ver [15]), se puede estimar g_n como

$$\frac{g_n}{n!} \sim c \cdot n^{-7/2} \rho^{-n}, \qquad c = \frac{h(\rho)}{\Gamma(-5/2)}. \tag{3}$$

Para estudiar parámetros estadísticos se añade una variable y se analizan funciones analíticas bivariadas. Por ejemplo, si $g_{n,k}$ es el número de grafos planos con n vértices y k aristas, la serie

$$G(z,w) = \sum_{n,k} \frac{g_{n,k}}{n!} z^n w^k$$

contiene toda la información sobre la distribución de la variable aleatoria X_n igual al número de aristas. Nótese que $G(z,1) = G(z)$. La función generadora de probabilidad (FGP) de X_n es

$$p_{X_n}(w) = \sum_k \frac{g_{n,k}}{g_n} = \frac{[z^n]G(z,w)}{[z^n]G(z,1)},$$

donde $[z^n]$ extrae el coeficiente de z^n de una serie. Para w fijo, $G(z,w)$ tiene una singularidad en $\rho(w)$, de forma que $\rho(1) = \rho$. Igual que estimamos $g_n = [z^n]G(z,1)$, podemos estimar, para w fijo,

$$\frac{[z^n]G(z,w)}{n!} \sim c(w) n^{-7/2} \rho(w)^{-n}.$$

Esto da una estimación de $p_{X_n}(w)$, lo cual permite, utilizando una versión asintótica del teorema del límite central y el teorema de continuidad de Levy, demostrar la convergencia hacia una ley normal. Para los restantes parámetros se procede de forma similar viendo que la FGP de la variable en cuestión (una vez normalizada) converge hacia la FGP de una variable conocida.

Otros parámetros de grafos planos más complejos, especialmente parámetros extremales, requieren bastante más esfuerzo. Mencionamos los siguientes, obtenidos por Drmota, Giménez, Noy y otros colaboradores (véase [38] para las referencias concretas).

- El diámetro, la máxima distancia entre dos vértices, es de orden $n^{1/4\pm\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$. Para ello se utiliza la convergencia de mapas aleatorios (como espacios métricos discretos) hacia un espacio métrico conocido como la *superficie browniana*, que es una esfera topológica «rugosa» como el movimiento browniano. Esta es un área muy activa en combinatoria y física estadística, donde los mapas aleatorios son un modelo para la «gravedad cuántica».
- El grado máximo de los vértices se concentra en $c \log n$, donde $c \approx 2.53$. Se trata de un resultado muy técnico que utiliza herramientas analíticas y probabilísticas, especialmente los llamados generadores de Boltzmann.
- El tamaño Y_n de la componente 2-conexa más grande converge hacia una ley estable de parámetro $3/2$, cuya densidad se expresa en términos de la función de Airy. Se tiene $\mathbb{E}(Y_n) \sim 0.95n$, es decir, contiene el 95 % de los vértices. Las restantes componentes 2-conexas son de tamaño $O(n^{2/3})$.

Clases cerradas por menores

El siguiente paso natural después de analizar grafos planos son grafos en una superficie. Sea $\mathcal{S}^g$ la superficie orientable de género g. Se ha obtenido en [8] una estimación precisa para el número de grafos que pueden realizarse en $\mathcal{S}^g$ (sin cruces de aristas), similar a (3) pero con término polinomial $n^{-5(g-1)/2-1}$ en lugar de $n^{-7/2}$. Es decir, el crecimiento exponencial no cambia con el género. También se demuestra en [8] que un grafo aleatorio de género g fijo tiene las mismas propiedades estadísticas que un grafo plano. Una excepción es el hecho de que un grafo aleatorio de género g tiene una única componente 3-conexa no plana, un hecho que permite distinguir la lógica monádica de segundo orden en grafos planos y en grafos de género positivo.

Todavía más general es considerar clases de grafos cerradas por menores. Un grafo H es un menor de G si H puede obtenerse a partir de un subgrafo de G mediante contracción de aristas. Una clase de grafos $\mathcal{G}$ es cerrada por menores si, siempre que $G \in \mathcal{G}$ y H es un menor de G, entonces $H \in \mathcal{G}$. El estudio de estas clases ha sido uno de los grandes temas de la combinatoria moderna [32]. La clase de grafos de género fijo es cerrada por menores, ya que la contracción de aristas mantiene la inmersión en una superficie. En este contexto, McDiarmid [35] ha obtenido notables resultados sobre grafos aleatorios que requieren hipótesis sorprendentemente poco restrictivas. Los resultados son bastante menos precisos que los que se obtienen con métodos analíticos pero se aplican a clases mucho más generales. Los métodos son muy ingeniosos y relativamente elementales, basados en doble conteo y en argumentos básicos de probabilidad. La monografía [36] pretende recoger y complementar ambos enfoques, el analítico y el combinatorio.

6. Comentarios finales

Para concluir, mencionamos brevemente tres soluciones recientes de conjeturas de gran relevancia que demuestran la vitalidad de la combinatoria y su fuerte imbricación en la matemática contemporánea.

Las matroides, también llamadas geometrías combinatorias, generalizan al mismo tiempo las matrices (de ahí el nombre) y los grafos. Fueron definidas for Whitney en los años 1930 como una abstracción de la independencia lineal en espacios vectoriales. Dos problemas famosos de matroides han sido resueltos recientemente. La conjetura de Rota de 1970 afirma que, para cada cuerpo finito $\mathbb{F}$, la clase de las matroides representables sobre $\mathbb{F}$ (correspondientes a matrices con coeficientes en $\mathbb{F}$) tiene un número finito de menores prohibidos. Estos son las obstrucciones elementales: por ejemplo, para las matroides asociadas a grafos planos las obstrucciones son los grafos de Kuratowski K_5 y $K_{3,3}$. Geelen, Gerards y Whittle han anunciado una solución de la conjetura, aunque calculan que les llevará varios años (y centenares de páginas) escribir y publicar todos los detalles [16]. En el fondo podría decirse que es un resultado de álgebra lineal, pero ¡no de la que explicamos a nuestros estudiantes!

Otra conjetura de Rota de 1970 (formulada también por Heron y Welsh) es la log-concavidad del polinomio característico $p_M(x)$ de una matroide M. El polinomio característico generaliza el polinomio cromático de un grafo (todo grafo da lugar a una matroide de forma natural). La conjetura es que los valores absolutos de los coeficientes de $p_M(x)$ forman una sucesión log-cóncava, y por lo tanto unimodal. La espectacular solución de Adiprasito, Huh y Katz [3] utiliza herramientas de geometría algebraica, asociando a cada matroide un anillo en el que se pueden hacer cálculos sobre clases de cohomología. Estas clases se relacionan con el número de conjuntos cerrados (*flats*) de M de cada tamaño, y estos directamente con los coeficientes de $p_M(x)$. Otras aplicaciones recientes de la geometría algebraica a la solución de viejos problemas combinatorios de Erdős son:

- El problema de hallar el mínimo número $f(n)$ de distancias distintas que determinan n puntos en el plano (el número máximo es claramente $\binom{n}{2}$, basta tomarlos en posición general). Tomando los puntos en una rejilla puede verse que $f(n) = O(n/\sqrt{\log n})$. Erdős conjeturó que $f(n) \geq n^{1-o(1)}$. La cota sencilla $f(n) \geq \sqrt{n}$ fue mejorada a lo largo de los años hasta $f(n) \geq n^{0.86}$ (Katz y Tardos, 2004). Guth y Katz [22] han demostrado que $f(n) \geq n/\log n$, un resultado casi óptimo. La prueba utiliza, en particular, la teoría clásica de las superficies algebraicas.
- Dados n puntos en el plano, no todos ellos en una recta, una recta ordinaria es una recta determinada por dos de los puntos que no pasa por un tercero. El clásico teorema de Sylvester-Gallai afirma que siempre existe una recta ordinaria. Green y Tao [21] han probado la conjetura de Dirac-Motzkin, según la cual hay al menos $n/2$ rectas ordinarias. La prueba utiliza la teoría de curvas algebraicas, así como resultados de combinatoria aditiva.

Finalmente discutimos un antiguo problema que se origina en el siglo XIX con Steiner y Kirkman, y juega un papel en el diseño de experimentos en estadística. Un sistema de Steiner $S(t,k,n)$ es una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de tamaño k de un conjunto X de n elementos, tales que cada t elementos de X están contenidos en exactamente un conjunto de $\mathcal{B}$. Para que exista un diseño tienen que cumplirse las siguientes condiciones elementales: $\binom{k-i}{t-i}$ ha de dividir a $\binom{n-i}{t-i}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, t\}$. Los sistemas de Steiner con $t = 2$ abundan, pero construirlos con $t > 2$ es un problema notablemente difícil y se conocen muy pocos. Se conjeturaba que para todos k, t y para todo n suficientemente grande que cumplan las condiciones necesarias, existe un $S(t, k, n)$. La reciente solución de Keevash [26] ha sido muy celebrada, por la importancia del resultado y porque, inesperadamente, utiliza métodos probabilísticos. Keevash reformula el problema en términos de emparejamientos en hipergrafos y utiliza la existencia de hipergrafos pseudo-aleatorios: son construcciones deterministas que pasan todos los tests estadísticos para ser realmente aleatorios.

Referencias

[1] D. Achlioptas y E. Friedgut, A sharp threshold for k-colorability, *Random Structures Algorithms* **14** (1999), 63–70.

[2] D. Achlioptas y A. Naor, The two possible values of the chromatic number of a random graph, *Ann. of Math. (2)* **162** (2005), 1335–1351.

[3] K. Adiprasito, J. Huh y E. Katz, Hodge Theory for Combinatorial Geometries, `http://arxiv.org/abs/1511.02888`.

[4] T. Austin y T. Tao, Testability and repair of hereditary hypergraph properties, *Random Structures Algorithms* **36** (2010), 373–463.

[5] B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press, London, 1985.

[6] B. Bollobás, S. Janson y O. Riordan, The phase transition in inhomogeneous random graphs, *Random Structures Algorithms* **31** (2007), 3–122.

[7] E. Breuillard, B. Green y T. Tao, The structure of approximate groups, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** (2012), 115–221.

[8] G. Chapuy, E. Fusy, O. Giménez, B. Mohar y M. Noy, Asymptotic enumeration and limit laws for graphs of fixed genus, *J. Combin. Theory Ser. A* **118** (2011), 748–777.

[9] A. Coja-Oghlan, C. Efthymiou y S. Hetterich, On the chromatic number of random regular graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **116** (2016), 367–439.

[10] A. Coja-Oghlan y D. Vilenchik, Chasing the k-colorability threshold, `http://arxiv.org/abs/1304.1063`.

[11] D. Conlon y J. Fox, Graph removal lemmas, *Surveys in combinatorics 2013*, 1–49, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 409, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

[12] D. Conlon y W. T. Gowers, Combinatorial theorems in sparse random sets, `http://arxiv.org/abs/1011.4310`.

[13] P. Erdős, P. Frankl y V. Rödl, The asymptotic number of graphs not containing a fixed subgraph and a problem for hypergraphs having no exponent, *Graphs Combin.* **2** (1986), 113–121.

[14] P. Erdős y A. Rényi, On the evolution of random graphs, *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **5** (1960), 17–61.

[15] P. Flajolet y R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[16] J. GEELEN, B. GERARDS Y G. WHITTLE, Solving Rota's conjecture, *Notices Amer. Math. Soc.* **61** (2014), 736–743.

[17] O. GIMÉNEZ Y M. NOY, Asymptotic enumeration and limit laws of planar graphs, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), 309–329.

[18] W. T. GOWERS, Hypergraph regularity and the multidimensional Szemerédi theorem, *Ann. of Math. (2)* **166** (2007), 897–946.

[19] B. GREEN, A Szemerédi-type regularity lemma in abelian groups, with applications, *Geom. Funct. Anal.* **15** (2005), 340–376.

[20] B. GREEN Y T. TAO, The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, *Ann. of Math. (2)* **167** (2008), 481–547.

[21] B. GREEN Y T. TAO, On sets defining few ordinary lines, *Discrete Comput. Geom.* **50** (2013), 409–468.

[22] L. GUTH Y N. H. KATZ, On the Erdős distinct distances problem in the plane, *Ann. of Math. (2)* **181** (2015), 155–109.

[23] H. HELFGOTT, Growth in groups: ideas and perspectives, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **52** (2015), 357–413.

[24] R. VAN DER HOFSTAD, *Random Graphs and Complex Networks*, vol. I; versión preliminar disponible en `http://www.win.tue.nl/~rhofstad/NotesRGCN.pdf`.

[25] S. JANSON, T. ŁUCZAK Y A. RUCINSKI, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[26] P. KEEVASH, The existence of designs, `http://arxiv.org/abs/1401.3665`.

[27] D. KLEITMAN Y K. J. WINSTON, On the number of graphs without 4-cycles, *Discrete Math.* **41** (1982), 167–172.

[28] Y. KOHAYAKAWA, Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs, *Foundations of Computational Mathematics* (Rio de Janeiro, 1997), 216–230, Springer, Berlin, 1997.

[29] P. G. KOLAITIS, H. J. PRÖMEL Y B. L. ROTHSCHILD, K_{l+1}-free graphs: asymptotic structure and a 0–1 law, *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 637–671.

[30] J. KOMLÓS Y M. SIMONOVITS, Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory, *Combinatorics, Paul Erdős is eighty*, vol. 2 (Keszthely, 1993), 295–352, Bolyai Soc. Math. Stud., 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.

[31] D. KÜHN Y D. OSTHUS, Embedding large subgraphs into dense graphs, *Surveys in combinatorics* (S. Huczynka, J. Mitchell y C. Roney-Dougal, eds.), 137–167, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[32] L. LOVÁSZ, Graph minor theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (2006), 75-86

[33] L. LOVÁSZ, *Large networks and graph limits*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

[34] A. LUBOTZKY, Expander graphs in pure and applied mathematics, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **49** (2012), 113–162.

[35] C. McDiarmid, Random graphs from a minor-closed class, *Combin. Probab. Comput.* **18** (2009), 583–599.

[36] C. McDiarmid y M. Noy, *Asymptotic enumeration, random planar graphs and beyond*, libro en preparación.

[37] B. Nagle, V. Rödl y M. Schacht, The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs, *Random Structures Algorithms* **28** (2006), 113–179.

[38] M. Noy, Random planar graphs and beyond, *International Congress of Mathematicians* (Seoul, 2014), Vol. IV, 407–430, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.

[39] M. Noy, V. Ravelomanana y J. Rué, On the probability of planarity of a random graph near the critical point, *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), 925–936.

[40] M. Penrose, *Random Geometric graphs*, Oxford Studies in Probability, 5, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[41] H. J. Prömel y A. Steger, The asymptotic number of graphs not containing a fixed color-critical subgraph, *Combinatorica* **12** (1992), 463–473.

[42] H. Prömel y A. Steger, Almost all Berge graphs are perfect, *Combin. Probab. Comput.* **1** (1992), 53–79.

[43] A. Razborov, What is... a flag algebra?, *Notices Amer. Math. Soc.* **60** (2013), 1324–1327.

[44] I. Z. Ruzsa, Generalized arithmetical progressions and sumsets, *Acta Math. Hungar.* **65** (1994), 379–388.

[45] M. Schacht, Extremal results for random discrete structures, `http://www2.math.uni-hamburg.de/home/schacht/preprints/extremal_rs.pdf`.

[46] T. Tao y V. Vu, *Additive combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[47] N. C. Wormald, Models of random regular graphs, *Surveys in Combinatorics, 1999*, 239–298, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Marc Noy, Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya
Correo electrónico: marc.noy@upc.edu

Oriol Serra, Departament de Matemàtiques, Universitat Politècnica de Catalunya
Correo electrónico: oriol.serra@upc.edu