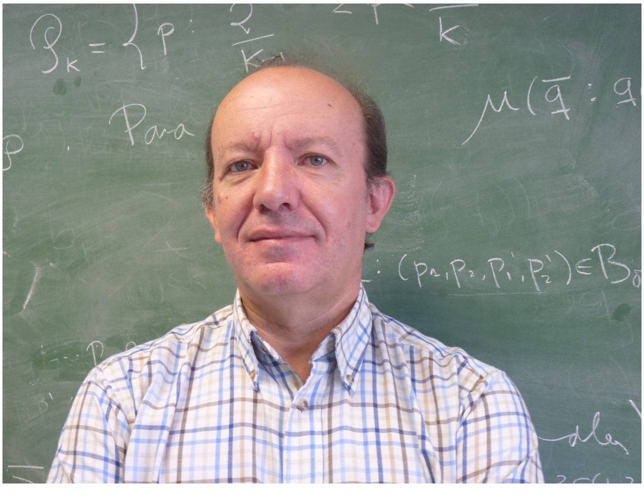
Javier Cilleruelo (1961–2016), in memoriam

Francisco Javier Cilleruelo Mateo, profesor titular de Análisis Matemático en la Universidad Autónoma de Madrid, falleció el 15 de mayo de 2016. Javier Cilleruelo era un especialista en teoría combinatoria de números reconocido mundialmente por su creatividad. Unió a su destacadísima actividad investigadora —más de 80 artículos publicados en las mejores revistas y colaboraciones con matemáticos de primer nivel— una notable dedicación a otros aspectos de la profesión: excelente docente, organizador concienzudo (fue el alma de la Red Iberoamericana de Teoría de Números y miembro asiduo de los comités organizadores o científicos de las Jornadas de Teoría de Números) y divulgador entusiasta (como se puede ver en su página web `https://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/`*), no rehuyó tampoco las tareas administrativas (dirigió los últimos 13 años el Colegio Mayor Juan Luis Vives). En medio de esa incansable actividad encontró tiempo para crear la sección «El diablo de los números» de* La Gaceta*, de la que se encargó con sabiduría y eficacia durante 16 años.*

Aparte del homenaje que le dedica Fernando Chamizo en la que fue su sección, La Gaceta *ha pedido a algunos de sus 44 coautores, que lo conocieron en distintas épocas y circunstancias, que cuenten cómo era Javier como matemático y como persona. Lo hacen Antonio Córdoba, su director de tesis; Jorge Jiménez Urroz, su primer doctorando; Moubariz Garaev, uno de sus colaboradores internacionales; y Juanjo Rué, Rafael Tesoro y Ana Zumalacárregui, sus estudiantes doctorales y posdoctorales más recientes.*



Javier Cilleruelo: el arte de contar

por

Antonio Córdoba

Javier Cilleruelo (Soria 1961–Madrid 2016), o Francisco Javier Cilleruelo Mateo si escribimos su nombre completo, ha tenido una vida relativamente corta para estos tiempos que corren, pero creo que ha sido una vida buena y fructífera. Su actividad profesional ha girado en torno a la Universidad Autónoma de Madrid y al Instituto de Ciencias Matemáticas, que fueron las bases desde las que supo mantener una brillante proyección internacional.

Además de tres monografías sobre diversos aspectos de la Teoría de los Números, Javier ha publicado alrededor de ochenta artículos de investigación, y su producción ha ido *in crescendo* con el paso del tiempo. Incluso durante el último y duro año de su enfermedad ha llevado a cabo, entre otros, un trabajo en colaboración con los dos Fernández, José Luis y Pablo, acerca de los puntos visibles del retículo (mezclando dos de sus temas favoritos: la teoría de los números y la probabilidad [9]), y esa otra filigrana matemática que es su resultado con Florian Luca ([11]): todo entero positivo es la suma de tres capicúas.

Es tradicional, en estas circunstancias, poner de manifiesto las situaciones y las anécdotas compartidas. En mi caso son tantas que sería excesivo mencionarlas, pero sí quiero decir que me siento orgulloso de haber dirigido su tesis doctoral y colaborado en artículos, libros y proyectos de investigación. Desde que empezó conmigo su tesina de licenciatura, allá por 1984, hasta sus últimos momentos, hemos mantenido una conversación frecuente, casi diaria, en torno a todas las aventuras matemáticas a las que su privilegiada mente lo ha ido llevando. Tanto en las que hemos sido colaboradores como también en todas las demás, por cuanto a él le satisfacía tenerme al día de lo que estaba investigando en cada momento y yo disfrutaba con ello. En ocasiones me contaba con orgullo los progresos de su hijo Carlos, y sé también de lo afortunado que se consideraba por tener a su lado a Estrella, su esposa. Pero Javier no era una persona a quien le gustara mucho hablar de sí mismo, y aunque pueda parecer algo extraño dada nuestra prolongada amistad, no conozco demasiados detalles de su vida, y fue a través de otros miembros de su familia que supe de la gran tragedia que marcó su más tierna infancia: el fallecimiento de su padre en un accidente de tráfico cuando realizaba el trayecto Aranda de Duero–Valladolid.

Apenas le interesaban, por aburridos, los trajines de la vida académica, pero su semblante se transformaba cuando el tema de conversación giraba en torno a problemas aritméticos y combinatorios. Quienes le tratamos con asiduidad echaremos de menos, sobre todo, su amistad, pero también las conversaciones frecuentes, alrededor de un café, en las que sus ojos brillaban contándonos la nueva observación sobre los números que acababa de hacer y que tanto le alegraba. Aparte de su talento matemático, especialmente dotado para la matemática discreta, teoría de números, grafos y combinatoria, Javier poseía el don de la música. No solo tocaba bien la guitarra, sino que era capaz de reconstruir enseguida las notas de una partitura después de haber escuchado su interpretación.

Javier pertenecía a la promoción de la UAM que inició sus estudios de licenciatura allá por 1979, que fue precisamente el año en el que yo tomé posesión, como solía decirse entonces, de la cátedra de Análisis Matemático. Por exigencias del guion, según una frase que se hizo popular en aquellos tiempos de la movida, enseguida me convertí en una especie de profesor orquesta que impartía clases de álgebra, geometría diferencial, probabilidad, teoría de números e, incluso, de análisis matemático. Le tuve pues de alumno en diversas asignaturas y recuerdo muy bien que cuando el asunto iba de modelos de la física o de la geometría, el interés y las calificaciones de Javier palidecían un poco, pero en cuanto se trataba de temas aritméticos o combinatorios ahí aparecía siempre con soluciones muy originales, de Matrícula de Honor.

A finales del verano de 1983, un año antes de licenciarse, se matriculó en un curso de Teoría de Números que impartí en Jarandilla de la Vera, dentro del programa organizado por Miguel de Guzmán y Carlos Benítez. Creo que ese curso fue para él una especie de epifanía, de manera que, a la vuelta del año sabático que disfruté entonces en la Universidad de Chicago, me pidió ser su director de tesis doctoral en torno a esos problemas aritméticos que tanto le habían interesado en mi curso.

Por orden cronológico es el sexto de mis alumnos de doctorado en Madrid. Su tesis fue, sin embargo, la primera que dirigí en Teoría de Números, pero sobre cuestiones que provenían mayormente de mi experiencia con las series e integrales de Fourier. En los años de mi doctorado en Chicago, y bajo la influencia de A. Zygmund, conocí la obra aritmética de Hardy, Littlewood y Ramanujan (el método del círculo y la importancia de las sumas trigonométricas en la teoría de los números), que me inspiró muchos problemas interesantes para investigar. Así es que a Javier le sugerí estudiar a fondo las monografías de H. Davenport (*Multiplicative number theory*) y H. Halberstam y K. Roth (*Sequences*), y redactar una tesina sobre el problema de estimar los puntos del retículo dentro de círculos, a partir de los artículos pioneros de Hardy y Littlewood, y de las ideas que yo había introducido en el tratamiento de los operadores llamados de sumación esférica de series de Fourier dobles. El resultado fue un interesante documento que no solo mostraba el dominio de esas técnicas, sino que también presentaba varias mejoras sobre las fórmulas aproximadas del llamado término de error, obtenidas por Hardy y Littlewood. Esa tesina, escrita a mano con una letra muy clara, es también una muestra fehaciente del enorme progreso que la escritura de las Matemáticas ha experimentado en las últimas décadas.

Javier era, creo yo, bastante inmune a los achaques del ego. A lo largo de mi carrera universitaria he tenido que soportar muchas situaciones tediosas, protagonizadas por personajes que creen haber sido ungidos por los dioses y alcanzado una notoriedad que tiene que ser constantemente reconocida por los demás. Ese trajín con el nombre que afecta a quienes gastan sus energías en hacerse notar. Si he podido salir incólume, o al menos no sufrir demasiados estragos, ha sido gracias al apoyo de un grupo de buenos amigos, entre los cuales el de Javier fue para mí especialmente importante, y ahora lo echaré mucho de menos. Aunque no me resulta nada fácil hacerlo sin que se me quiebre la escritura, a continuación, y de acuerdo con lo que me han pedido los directores de LA GACETA, voy a comentar brevemente algunos resultados que publicó en los temas desarrollados bajo mi influencia, con la pretensión, quizás exagerada, de ayudar a comprender su trayectoria matemática.

1. Contando puntos del retículo

Contar los puntos de coordenadas enteras dentro de un conjunto, o de una familia de conjuntos, es un asunto que aparece con frecuencia en muchas teorías interesantes. Un ejemplo es la función $r_2(n)$, que cuenta el número de representaciones del entero n como suma de dos cuadrados; es decir, el cardinal del conjunto de puntos del retículo unidad que están en la circunferencia de radio igual a la raíz cuadrada de n y centrada en el origen de coordenadas. Enseguida se ve que va tomando valores de forma poco regular: $r_2(1) = r_2(2) = r_2(4) = 4$, $r_2(3) = r_2(6) = r_2(7) = 0$, $r(5) = 8, \ldots$

No obstante, a partir de la descomposición en factores primos de n podemos calcular el valor de $r_2(n)$ con una fórmula explícita, que encuentra su explicación más transparente dentro de la teoría de divisibilidad del anillo $\mathbb{Z}[i]$ de los enteros de Gauss. Dice así: si

$$n = 2^\alpha \prod_{p_j \equiv 1\,(4)} p_j^{\beta_j} \prod_{q_i \equiv 3\,(4)} q_i^{\gamma_i},$$

entonces

$$r_2(n) = \begin{cases} 4\prod_j (1+\beta_j) & \text{si } \gamma_i \text{ es par para todo } i, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De esta fórmula resulta fácil deducir las siguientes consecuencias:

$$r_2(n) = O(n^\varepsilon) \quad \text{para todo } \varepsilon > 0,$$
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{r_2(n)}{(\log(n))^p} = \infty \quad \text{para todo } p.$$

Es decir, asintóticamente, el número de puntos del retículo en la circunferencia $x^2 + y^2 = n$ es menor que cualquier potencia positiva del radio, pero puede ser mayor que cualquier potencia de su logaritmo.

Cabe también preguntarse acerca de la distribución de los puntos reticulares en arcos de esas circunferencias centradas en el origen: ¿cuántos puntos de coordenadas enteras puede contener un arco de longitud R^α, con $0 < \alpha < 1$? Javier dio una interesante respuesta en uno de sus primeros trabajos ([6]):

TEOREMA 1. *Para todo $\alpha < 1/2$ existe una constante C_α tal que un arco de longitud R^α contiene, a lo más, C_α puntos del retículo.*

Este resultado y sus extensiones al caso de elipses e hipérbolas aparecen de forma recurrente en diversas publicaciones de Javier ([6], [4], [10]), y constituye una parte importante de esa primera etapa de su producción científica. Un ejemplo es el siguiente.

Sea $S(n)$ el área del polígono cuyos vértices son los puntos del retículo en el círculo $x^2 + y^2 = n$ (cuando $r_2(n) \neq 0$), y consideremos la cantidad $S(n)/(\pi n)$. Claramente esos puntos estarán mejor distribuidos cuando $S(n)/(\pi n)$ se encuentre muy próximo a la unidad:

Teorema 2. *El conjunto* $\{S(n)/(\pi n) : r(n) \neq 0\}$ *es denso en el intervalo* $(2/\pi, 1)$.

Teorema 3. *Existe una infinidad de valores n tales que*[1]

$$\Big|\frac{S(n)}{\pi n} - 1\Big| \lesssim \Big[\frac{\log\log n}{\log n}\Big]^2.$$

La estimación anterior está cerca de lo óptimo, ya que es fácil demostrar que, en la dirección opuesta, tenemos la desigualdad

$$\Big|\frac{S(n)}{\pi n} - 1\Big| \gtrsim \frac{1}{r_2^2(n)}.$$

El precioso artículo [2] que F. Chamizo ha escrito para este mismo número de La Gaceta contiene una demostración del Teorema 1 obtenida por Javier y G. Tenenbaum algunos años después, y distinta de la primera. Fernando describe también el origen del problema y su relación con la teoría de las series trigonométricas dobles: el teorema de Cooke-Zygmund y las propiedades de restricción de las series e integrales de Fourier. Y hace alusión al interés que estos resultados han adquirido recientemente en los trabajos de J. Bourgain y Z. Rudnick sobre las regiones nodales de las autofunciones de operadores de Laplace-Beltrami, a lo que hay que añadir su relevancia en ciertos modelos mecano-estadísticos.

Creo que a Javier le agradaba mucho saber de esas consecuencias y aplicaciones del teorema, pero tenía tantos proyectos aritméticos sobre los que trabajar que no lograba encontrar un hueco para conocerlas en profundidad. En cuanto al exponente 1/2, me consta que estaba bastante convencido de su irrelevancia y que el teorema, según él, tendría que ser cierto para todo $\alpha < 1$. Sin embargo, yo no estoy tan seguro de ello, y por el contrario tiendo a pensar que 1/2 puede ser relevante, basándome en la analogía con el teorema de restricción de la transformada de Fourier bidimensional. En cualquier caso, saber lo que ocurre más allá de 1/2 ha demostrado ser una cuestión tan interesante como difícil.

2. Series trigonométricas especiales: conjuntos de Sidon

Las series trigonométricas llamadas lacunares tienen frecuencias que crecen geométricamente ($n_{k+1}/n_k > \rho > 1$), y poseen propiedades muy particulares. Por ejemplo: si $\sum_k a_k \exp(2\pi i n_k x)$ es la serie de Fourier de una función f en el espacio $L^2(0,1)$, entonces, necesariamente, f pertenece a $L^p(0,1)$ para todo $p < \infty$.

[1] Usaremos la notación estándar: i) $A(z) \simeq B(z)$ cuando existen constantes $0 < C_1 < C_2 < \infty$ tales que $C_1 A(z) \leq B(z) \leq C_2 A(z)$ para todo z; ii) $A(z) \lesssim B(z)$ si existe una constante finita C tal que $A(z) \leq C\, B(z)$ siempre).

Se trata de un resultado bien conocido del análisis armónico que tiene una interpretación dentro del espacio BMO (acrónimo en inglés de las funciones de oscilación media acotada): el multiplicador de Fourier $\widehat{Tf}(j) = m(j) \cdot \widehat{f}(j)$, donde $m(j) = 1$ si j está entre los n_k, y es igual a 0 en caso contrario, es un operador acotado de L^2 a BMO y, por tanto, a L^p para todo $p < \infty$. Pero admite también otras interpretaciones de carácter probabilístico y aritmético: por un lado, las funciones $\{\exp(2\pi i n_k x)\}$ se comportan como si fuesen variables aleatorias independientes, y por otro, dado s, el número de representaciones de un entero arbitrario como suma de s términos n_k está uniformemente acotado. Creo poder afirmar que a Javier no le interesaba demasiado la primera de ellas, pero sí, y mucho, las otras dos.

¿Habrá una teoría similar cuando las frecuencias crezcan de forma polinomial? Se trata de una pregunta natural que tiene consecuencias aritméticas muy interesantes. Supongamos que la sucesión creciente de enteros positivos $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tiene la propiedad llamada $B_2(g)$: el número de representaciones de un entero arbitrario como suma de dos términos de la sucesión es menor que g. Resulta entonces fácil comprobar que el multiplicador asociado de Fourier está acotado del espacio $L^2(0,1)$ al $L^4(0,1)$. En otras palabras: la serie $f(x) = \sum_k a_k \exp(2\pi i n_k x)$ está en $L^4(0,1)$ si y solo si $\sum_k |a_k|^2 < +\infty$.

La sucesión de los cuadrados $n_k = k^2$ no satisface esta hipótesis pero, en cierto sentido, no queda muy lejos de hacerlo, siendo una conjetura famosa del área (también llamada problema de Rudin) la que asegura que la estimación

$$\Big\| \sum_k a_k \exp(2\pi i k^2 x) \Big\|_p \leq C_p \Big(\sum_k |a_k|^2 \Big)^{1/2}$$

es cierta para todo p, $1 \leq p < 4$.

Aunque su enunciado sea «muy analítico», la conjetura tiene un fuerte contenido aritmético, y en ella las sumas de Gauss

$$G_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \exp(2\pi i n^2 x)$$

desempeñan un papel relevante.

Definamos $T_N f = G_N * f$. La conjetura de Rudin es equivalente a la acotación uniforme $L^2 \to L^p$, $p < 4$, de estos operadores, lo que, por dualidad, resulta ser equivalente a su acotación uniforme entre L^q y L^2, para $q > 4/3$.

Cuando Javier empezó a trabajar conmigo escuchaba estas disquisiciones con atención, seguramente por deferencia a su director de tesis, pero creo que sin mostrar demasiado entusiasmo. Sin embargo, este se despertaba en cuanto aparecían las implicaciones aritméticas.

Consideremos una progresión aritmética de enteros positivos

$$A = \{a, a+r, a+2r, \dots\}$$

y preguntémonos: ¿cuántos cuadrados podemos encontrar entre sus N primeros términos?

Naturalmente, de lo que se trata es de dar buenas estimaciones cuando N tiende a infinito manteniéndose a y r fijos.

Sea

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(2\pi i(a + kr)\, x)$$

y sea $\widehat{Tf}(j) = m(j)\widehat{f}(j)$ el multiplicador de la serie de Fourier dado por la función indicadora de los cuadrados: $m(j) = 1$ si j es un cuadrado perfecto, y $m(j) = 0$ en caso contrario. Tenemos que:

$$\|T(f)\|_2^2 = \text{número de cuadrados en la sucesión } \{a, a + r, \ldots, a + (N-1)r\}.$$

Si la conjetura de Rudin fuese cierta tendríamos que $\|T(f)\|_2 \leq C_p \, \|f\|_p \leq C'_p \, N^{(p-1)/p}$ para todo $p > 4/3$, lo que da lugar a la estimación

$$\#\big\{\{a, a + r, \ldots, a + (N-1)r\} \cap \{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\}\big\} \leq C_\varepsilon \, N^{1/2-\varepsilon},$$

esto es, el número de cuadrados entre los primeros N términos de la sucesión es $\lesssim N^{1/2-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. El mejor resultado conocido ([1]) dista mucho de esta estimación óptima.

Ocurre que los núcleos de Gauss son muy distintos de los de las integrales singulares de la teoría de Calderón-Zygmund que sabemos tratar en el análisis armónico. Estos últimos tienen sus singularidades en el origen y en el infinito, mientras que en las sumas de Gauss las singularidades se encuentran entre los racionales de denominador pequeño respecto de N. Y aunque siguiendo el método del círculo de Hardy-Littlewood-Ramanujan conocemos muy bien los valores de G_N en los llamados arcos mayores, sin embargo, la cancelación intrínseca a las convoluciones $G_N * f$ con una función genérica de L^2 se escapa, por ahora, a los métodos conocidos del análisis. A Henryk Iwaniec le oí en una ocasión un acertado comentario sobre este asunto:

> [...] en el análisis armónico se consideran núcleos de convolución «sencillos» que se aplican a funciones «complicadas», mientras que en la teoría de los números consideramos núcleos «muy complicados» que actúan sobre funciones «sencillas».

De manera que cabe, siguiendo a Iwaniec, resolver los problemas aritméticos sin entrar en laberintos analíticos del tipo de la conjetura de Rudin, ¿o no?

Le debo a Antoni Zygmund (mi bisabuelo en matemáticas) haber despertado mi interés por este tipo de cuestiones ubicadas en la frontera del análisis armónico y la teoría de los números, que luego logré transmitir a Javier. A continuación voy a describir un resultado del año 1992, que seguramente no estará entre los más destacados de nuestra producción, pero que creo representativo de la acción en esa frontera de las dos áreas antes mencionadas donde se ha desarrollado gran parte de nuestros proyectos conjuntos.

Una manera conocida de regularizar los valores de la función $r_2(n)$ es considerar sus promedios o, lo que es equivalente, la sucesión de sus sumas parciales

$$\sum_{n\le x} r_2(n),$$

que representa el número de puntos reticulares dentro del círculo de radio $\sqrt{x}$ centrado en el origen, siendo de sobra conocida la estimación asintótica

$$\sum_{n\le x} r_2(n) = \pi\, x + O(x^{1/2})\,, \quad x\to\infty.$$

La «irregularidad» de los valores de la función $r_2(n)$ viene expresada en el hecho de que el orden de magnitud de $\sum_{n\le x} r_2^2(n)$ sea estrictamente mayor que el de $\sum_{n\le x} r_2(n)$:

$$\frac{\sum_{n\le x} r_2^2(n)}{\sum_{n\le x} r_2(n)} \gtrsim \log(x).$$

La siguiente definición trata de captar este fenómeno.

DEFINICIÓN 4. Diremos que una sucesión de enteros positivos $\{n_k\}$ tiene la propiedad $B_2(\infty)$ si

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\sum_{n\le x} r^2(n)}{\sum_{n\le x} r(n)} < \infty,$$

donde, ahora,

$$r(n) = \#\{(n_k, n_j)\ :\ n = n_k + n_j\}.$$

El resultado que vamos a comentar dice así:

TEOREMA 5. *Existen sucesiones infinitas de cuadrados $a_1^2 < a_2^2 < a_3^2 < \cdots$ satisfaciendo la propiedad $B_2(\infty)$ y tales que $a_k^2 < k^2\log(k)$.*

En [7] se construye explícitamente una tal sucesión de la manera siguiente. Sean $I_j = \{n : 2^j < 2n < 2^j(1+1/j)\}$, donde $j = 1, 2, 3, \ldots$, y consideremos $I = \cup_j I_j$; la sucesión buscada consiste en los cuadrados de los elementos de I.

La estimación $a_k^2 < k^2\log(k)$ es inmediata, y tenemos también la desigualdad

$$\sum_{n\le x} r(n) = \sum_{\substack{a_k^2+a_j^2\le x\\ a_k<a_j}} 1 \ge \frac{1}{2}\Big(\sum_{a_k^2\le x/4} 1\Big) \gtrsim \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Por lo tanto es suficiente con demostrar que

$$\sum_{n\le x} r^2(n) \lesssim \frac{x}{(\log x)^2}.$$

Consideremos, para cada j, la función $r_j(n)$ que cuenta el número de representaciones de n como suma de dos elementos de I_j. (La notación $r_j(n)$ introducida ahora hace referencia a la sucesión I_j y no debe confundirse, en el caso $j = 2$, con la función que cuenta el número de representaciones como suma de cuadrados que hemos considerado antes). Tenemos que

$$\sum_{n\leq x} r^2(n) \lesssim \Big[\sum_{j\leq \lfloor \log_4(x)\rfloor} \Big(\sum_n r_j^2(n)\Big)^{1/2}\Big]^2,$$

que es una consecuencia de la teoría de Littlewood-Paley del análisis armónico, junto con la interpretación de las sumas $\sum_{n\leq x} r^2(n)$ en términos de normas L^4 de unos polinomios trigonométricos apropiados:

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} r^2(n) &\simeq \Big\| \sum_{j\leq(\log_2 x)/2} \sum_{n\in I_j} \exp(2\pi i n^2 x)\Big\|_4^4\\ &\simeq \Big\|\Big(\sum_{j\leq(\log_2 x)/2} \Big|\sum_{n\in I_j} \exp(2\pi i n^2 x)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_4^4\\ &\lesssim \Big(\sum_{j\leq(\log_2 x)/2} \Big\|\sum_{n\in I_j} \exp(2\pi i n^2 x)\Big\|_4^2\Big)^2 \simeq \Big(\sum_{j\leq(\log_2 x)/2} \Big(\sum_n r_j^2(n)\Big)^{1/2}\Big)^2.\end{aligned}$$

La demostración se consigue a partir de la acotación

$$\sum_n r_j^2(n) \lesssim \Big(\frac{2^j}{j}\Big)^2, \tag{$\star$}$$

ya que

$$\sum_{n\leq x} r^2(n) \lesssim \Big(\sum_{j\leq(\log_2 x)/2} \frac{2^j}{j}\Big)^2 \lesssim \frac{x}{(\log x)^2}.$$

La estimación ($\star$) anterior es una consecuencia del siguiente lema:

Lema 6. *Si $r_j(n) \geq 2$, entonces $r_j^2(n) \leq F(n)$, donde $F(n)$ cuenta el número de soluciones enteras (a_1, b_1, a_2, b_2) del sistema de desigualdades*

$$0 < \Big|\frac{a_1}{b_1}\Big| < \frac{1}{j}, \qquad 0 < \Big|\frac{a_2}{b_2} - 1\Big| < \frac{1}{j}, \qquad n = a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Suponiéndolo cierto, la propiedad ($\star$) buscada se demuestra así:

$$\sum_n r_j^2(n) = \sum_{r_j(n)=1} r_j(n) + \sum_{r_j(n)\geq 2} r_j^2(n),$$

y como

$$\sum_{r_j(n)=1} r_j(n) \leq \Big(\frac{2^j}{j}\Big)^2,$$

basta pues con estimar el segundo sumando.

Pero el lema 6 nos dice que está acotado por el número de soluciones (a_1, b_1, a_2, b_2) del sistema

$$2\,(2^j)^2 \le (a_1^2 + b_1^2)\,(a_2^2 + b_2^2) \le 2\,(2^{j+1}/j)^2$$
$$0 < \Big|\frac{a_1}{b_1}\Big| < \frac{1}{j}, \qquad 0 < \Big|\frac{a_2}{b_2} - 1\Big| < \frac{1}{j}.$$

Con (a_1, b_1) fijado, estimaremos cuántos (a_2, b_2) verifican

$$\sqrt{2}\,\frac{2^j}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \le \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \le \sqrt{2}\,\frac{2^j + 2^j/j}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

es decir, el número de puntos del retículo en una región simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante, contenida entre los radios

$$r_1 = \sqrt{2}\,\frac{2^j}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} \quad \text{y} \quad r_2 = \sqrt{2}\,\frac{2^j + 2^j/j}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}},$$

y cuya longitud en la dirección angular es también

$$\sqrt{2}\,\frac{2^j/j}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\,.$$

Ahora bien, la condición $0 < |a_2/b_2 - 1| < 1/j$ implica que $b_2 > j$, y un sencillo cálculo muestra que las dimensiones, radial y angular, de esa región son lo suficientemente grandes como para que el número de puntos reticulares contenidos en ella pueda ser estimado por su área, lo que nos permite escribir

$$\sum_{r_j(n) \ge 2} r_j(n)^2 \lesssim \sum_{\substack{a_1, b_1 \\ 0 < |a_1/b_1| < 1/j}} \frac{4^j}{(a_1^2 + b_1^2)\,j^2} \lesssim \sum_{b_1 \le 2^j} \frac{4^j}{b_1\,j^3} \le \frac{4^j}{j^2}\,,$$

y, por tanto,

$$\sum_{n \le x} r^2(n) \lesssim \frac{x}{(\log x)^2}\,.$$

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 6. Empezamos observando que si $n \equiv 0 \pmod 4$ admite dos representaciones distintas como suma de dos cuadrados, $n = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, entonces existen enteros a_1, b_1, a_2, b_2 tales que

$$\frac{a_1}{b_1} = \tan\Big(\frac{\arctan(a/b) + \arctan(c/d)}{2}\Big),$$
$$\frac{a_2}{b_2} = \tan\Big(\frac{\arctan(a/b) - \arctan(c/d)}{2}\Big).$$

Sea pues $n = a_r^2 + b_r^2 = a_s^2 + b_s^2$ un entero con dos representaciones distintas como suma de dos cuadrados tales que

$$2^j \le a_r \le a_s \le b_s \le b_r \le 2^j + 2^j/j, \qquad a_r \equiv b_r \equiv a_s \equiv b_s \pmod 2.$$

Por la observación anterior, existen enteros a_1, b_1, a_2, b_2 de manera que

$$
\begin{aligned}
n &= (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2), \\
\frac{a_1}{b_1} &= \tan\Big(\frac{\arctan(a_r/b_r) + \arctan(a_s/b_s)}{2}\Big), \\
\frac{a_2}{b_2} &= \tan\Big(\frac{\arctan(a_r/b_r) - \arctan(a_s/b_s)}{2}\Big).
\end{aligned}
$$

Las condiciones impuestas sobre a_1, b_1, a_2, b_2 implican que $|a_1/b_1| < 1/j$ y $|a_2/b_2 - 1| < 1/j$. Pero ambas cantidades tienen que ser también estrictamente mayores que 0, porque hemos partido de dos representaciones distintas de n como suma de cuadrados. Cada pareja de tales representaciones origina ángulos diferentes y, por consiguiente, enteros distintos a_1, b_1, a_2, b_2. Podemos concluir que el número de tales parejas, $r_j(n)(r_j(n) - 1)/2$, está acotado por arriba por el número de soluciones del sistema

$$
\begin{aligned}
n &= (a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2)\,, \\
0 &< \Big|\frac{a_1}{b_1}\Big| < \frac{1}{j}\,, \\
0 &< \Big|\frac{a_2}{b_2} - 1\Big| < \frac{1}{j}\,.
\end{aligned}
$$

La demostración se concluye observando que si $r_j(n) \geq 2$, entonces

$$
r_j^2(n) \leq 4(r_j(n)(r_j(n) - 1)/2). \qquad \square
$$

El teorema exhibe una fusión de métodos del análisis armónico (multiplicadores de Fourier, teoría de Littlewood-Paley) y de elementales, pero ingeniosas, maneras de contar puntos del retículo, en las que puede apreciarse el inconfundible marchamo de Javier, quien siguió interesado en este tipo de cuestiones pero con una clara deriva hacia su parte más combinatoria.

Parece ser que Simon Sidon preguntó a Pál Erdős sobre las sucesiones de enteros de menor crecimiento que tuvieran esa propiedad de producir el teorema $L^2(0,1) \to L^4(0,1)$ para las correspondientes series de Fourier. En manos de Erdős, Rényi y la espléndida escuela húngara de matemática discreta, el problema se transformó en desafío y objeto del deseo, aunque modificaron un poco el enunciado: «un conjunto de enteros positivos es llamado de Sidon si las sumas de dos cualesquiera de ellos son siempre distintas». Surge el problema: construir, o probar la existencia, de sucesiones de Sidon de manera que la función $A(x)$ que cuenta el número de puntos de A entre 1 y x sea lo mayor posible.

Una primera aproximación se obtiene con el llamado «algoritmo avaricioso»: empezando con $a_1 = 1$, definimos a_{n+1} como el menor entero positivo que podemos añadir al conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de manera que se conserve la propiedad de Sidon. Obtenemos así la sucesión

$$
1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, \ldots
$$

En cada paso, los elementos eliminados son todos aquellos de la forma $a_i+a_j-a_k$, donde tanto i como j y k son menores que n. Como, a lo más, hay n^3 de ellos, podemos concluir que $a_{n+1} \leq n^3 + 1$, lo que implica que $A(x) \gtrsim x^{1/3}$.

Resulta relativamente fácil comprobar que la estimación $A(x) \gtrsim x^{1/2}$ es falsa, por lo que la verdad se encuentra en un exponente intermedio entre 1/3 y 1/2.

Conjetura 7 (Atribuida a Erdős). *Para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto de Sidon tal que $A(x) \gtrsim x^{1/2-\varepsilon}$.*

La conjetura ha resistido los ataques de los miembros más conspicuos del área (Erdős, Szemerédi, Rusza, Cilleruelo, etc.), quienes, no obstante, han logrado interesantes resultados parciales. Hasta hace poco, el mejor de ellos se debía a I. Rusza quien, usando métodos probabilísticos, logró probar la existencia de un conjunto de Sidon cuya función contadora satisface

$$A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}.$$

Pero el método de Rusza no es constructivo y restaba dar un ejemplo explícito de una tal sucesión. Eso lo llevó a cabo Javier en la que, seguramente, es una de sus mejores publicaciones ([5]).

Teorema 8. *Existe una sucesión explícita de Sidon cuya función contadora satisface la estimación asintótica $A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}$, $x \to \infty$.*

La construcción, aunque basada en métodos elementales, no es nada fácil, y contiene muchos regates ingeniosos: a partir de la sucesión de los logaritmos de los números primos, que por el teorema fundamental de la Aritmética forman un conjunto de Sidon de números reales, se obtiene una sucesión con la propiedad de Sidon y densidad grande… Y aquí no cabe ya otro comentario sino recomendar la lectura de [5].

Con gran agrado por mi parte, he sido testigo de cómo Javier fue conectando con los expertos reconocidos del área, quienes han venido a Madrid para trabajar y colaborar en sus proyectos; al tiempo que él ha sido un participante habitual en todos los congresos y *workshops* importantes, organizados en los centros del mundo donde se cultiva el arte combinatoria y la teoría aditiva de números. Y aunque esa espléndida actividad lo alejara un tanto de los problemas de las series trigonométricas que estuvieron en sus comienzos conmigo, me he sentido muy orgulloso de sus logros y de su trayectoria.

Referencias

[1] E. Bombieri y U. Zannier, A note on squares in arithmetic progressions. II, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.* **13** (2002), no. 2, 69–75.

[2] F. Chamizo, Un teorema de Javier Cilleruelo, *La Gaceta de la RSME* **19** (2016), no. 3, 607–614.

[3] J. Cilleruelo, Arcs containing no three lattice points, *Acta Arith.* **59** (1991), no. 1, 87–90.

[4] J. Cilleruelo, The distribution of the lattice points on circles, *J. Number Theory* **43** (1993), no. 2, 198–202.

[5] J. Cilleruelo, Infinite Sidon sequences, *Adv. Math.* **255** (2014), 474–486.

[6] J. Cilleruelo y A. Córdoba, Trigonometric polynomials and lattice points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), no. 4, 899–905.

[7] J. Cilleruelo y A. Córdoba, $B_2[\infty]$-sequences of square numbers, *Acta Arith.* **61** (1992), no. 3, 265–270.

[8] J. Cilleruelo y A. Córdoba, Lattice points on ellipses, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 3, 741–750.

[9] J. Cilleruelo, J. L. Fernández y P. Fernández, Visible lattice points in random walks. Prepublicación, arXiv: 1512.04722 (2016).

[10] J. Cilleruelo y J. Jiménez-Urroz, Lattice points on hyperbolas, *J. Number Theory* **63** (1997), no. 2, 267–274.

[11] J. Cilleruelo y F. Luca, Every positive integer is a sum of three palindromes. Prepublicación, arXiv: 1602.06208 (2016).

[12] J. Cilleruelo, I. Rusza y C. Vinuesa, Generalized Sidon sets, *Adv. Math.* **225** (2010), no. 5, 2786–2807.

Antonio Córdoba, ICMAT y Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid, Campus de Cantoblanco, 28049 Madrid
Correo electrónico: antonio.cordoba@uam.es

Recordando a Javier Cilleruelo Mateo, «Cille»

por

Jorge Jiménez Urroz

En el año 1990 cursé Teoría de Números como asignatura de la carrera de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid. El departamento de Matemáticas de la Autónoma suele rotar la docencia entre sus profesores, y ese año le tocó darla al profesor Javier Cilleruelo Mateo. Un profesor recién ascendido de asociado a titular interino, después de leer su tesis doctoral sobre la representación de enteros como suma de cuadrados.

La forma que eligió para impartir la asignatura me cautivó. Aparecían problemas de todas las índoles, en los que, de manera insospechada, hacían falta ideas de todas las ramas de las matemáticas para resolverlos.

Y es que así era Javier. Le encantaban los problemas cuyo enunciado ocultaba cualquier pista sobre su forma de atacarlo. En su tesis doctoral, Javier generalizó un resultado de Schinzel[1] por el que sabemos que la longitud de un arco de circunferencia de radio R con tres puntos de coordenadas enteras debe ser superior a $2R^{1/3}$. Javier y su director, Antonio Córdoba, pudieron probar en [5] que un arco de longitud $\sqrt{2}R^{e_m}$, con $e_m = 1/2 - 1/(4[m/2] + 2)$, puede contener como mucho m puntos de coordenadas enteras. ¡Quién podría sospechar que el truco para conseguir este teorema se encontraba en demostrar que los argumentos de los números complejos asociados a cada uno de los puntos del retículo en una circunferencia de radio primo son linealmente independientes sobre los racionales!

Sí, Javier era un hombre creativo. Y lo que más le gustaba era crear ideas.

Creaba ideas para resolver problemas. Al principio, estos problemas surgieron de manera natural como continuación de los temas a los que se dedicó durante su tesis. El estudio de la representación de enteros como suma de cuadrados le sirvió a Zygmund [12] para demostrar un teorema de tipo Cantor-Lebesgue en dos dimensiones. No se extrañen si un hombre que dedicó su vida a los números enteros tenía sus raíces en el Análisis Armónico. Esto no es más que otro de los logros de Javier: hacer una tesis de Teoría de Números bajo la dirección de un especialista de renombre en el Análisis Armónico. Y no en un tema cualquiera. Es bien conocido el problema del retículo como Gauss lo enunció. Pero puede que no sea tan conocida la cantidad de autores que se han dedicado al problema, o a alguna de sus variantes, desde la Teoría de Números, el Análisis, o la Geometría. Quizás al lector le interese ojear el artículo [8], escrito junto con Andrew Granville, para ver un panorama más general de la importancia de los resultados de Javier y el alcance del problema.

De las representaciones de enteros como suma de cuadrados da un salto natural y se sumerge de lleno en la representación de enteros como suma de los elementos de una sucesión dada. Las que representan todos, y las que no, las que los representan solo una vez, o un número concreto g, las sucesiones finitas, y las infinitas. En este artículo solo voy a comentar algunos pequeños detalles de su enorme creatividad, y solo relacionados con este tipo de problemas.

Y es que no pasó mucho tiempo hasta que consiguió la mejor cota para el crecimiento de una sucesión de Sidon —aquellas en que las sumas de cada par de elementos nunca se repite— formada por cuadrados [2]. La prueba consistía en una inteligente aplicación de los métodos utilizados en su tesis, combinada con una astuta elección de enteros, los de intervalos $[6^j, 6^j + 6^{j/2}]$, eliminando los que pudiesen dar representaciones repetidas. En ese mismo periodo también nos dejó su propia generalización de la sucesión de los cuadrados, con una interesante definición, la de sucesiones $B_2[\infty]$ en [6]. Estas sucesiones son las que tienen la propiedad de que

$$R(x) = \frac{\sum_{n\le x} r^2(n)}{\sum_{n\le x} r(n)} < \infty,$$

[1] Es interesante mencionar que esta no es más que una aplicación de un resultado atribuido a Herón de Alejandría que asegura que el producto de los lados de un triángulo es igual al producto de cuatro veces su área por el radio de la circunferencia que lo circunscribe.

donde $r(n)$ es el número de representaciones de un entero n como suma de dos cuadrados. Quizás es necesario mencionar que $R(x)$ muestra la irregularidad de la función $r(n)$. Por ejemplo, para los cuadrados se tiene $R(x) \gg \log x$. En ese mismo artículo prueba la existencia de sucesiones $B_2[\infty]$ formadas por cuadrados y de crecimiento lento, $a_k \ll k^2 \log^2 k$.

Desde entonces, Javier se convirtió en uno de los mayores exponentes a nivel internacional en el estudio de sucesiones de Sidon y su generalización a sucesiones $B_h[g]$, que permiten g representaciones como suma de h términos de la sucesión. Es fácil ver que, por ejemplo, las potencias de 2 forman una sucesión de Sidon, y de hecho $B_h[1]$, pues todo número se puede representar en binario de forma única. Sin embargo, es muy difícil ver el mínimo crecimiento que puede tener una sucesión con esa propiedad. Se sabe encontrar sucesiones con $a_k \ll k^3$, gracias al «greedy algorithm», pero se necesitaron 50 años para encontrar sucesiones de Sidon con $a_k = o(k^3)$, mientras que la conjetura de Erdős dice que existen sucesiones de Sidon, y en general $B_2[g]$, con $a_k \ll k^{2+\epsilon}$. Desde entonces, uno de los mayores problemas en Teoría Aditiva de Números es encontrar el crecimiento mínimo para este tipo de sucesiones.

Muchas de las ideas de Javier vienen de la combinatoria, como su nueva forma de contar para poder encontrar, en [3], la mejor cota hasta el momento en sucesiones $B_2[2]$, o su maestría una y otra vez demostrada en hacer «análisis» de conjuntos discretos, como en [2] o en [1], donde combinó perfectamente estas técnicas con su bien aprendido análisis en sentido clásico para obtener

$$N^{1-\frac{1}{k}} \frac{1}{\Gamma(2-\frac{1}{k})\Gamma(1+\frac{1}{k})}$$

como la mejor cota conocida hasta el momento para el menor tamaño posible de un conjunto A_N tal que todo entero $1 \le n \le N$ se puede representar como un elemento de A_N más una k-potencia, b^k.

Pero también encontramos nuevos resultados de Javier con un espíritu mas probabilístico como su «overlapping lemma»: dada una sucesión A, si llamamos $A(x)$ al cardinal de $\{a \in A : a \le x\}$ y D_H es la varianza de $A(n) - A(n-H)$, se tiene

$$\sum_{1 \le h \le H} d(h)(H-h) = \frac{H^2|A|^2}{N+H-1} - H|A| + D_H,$$

lo que permite estimar el número $d(h)$ de representaciones de enteros como diferencia de dos enteros de la sucesión A, en un intervalo de longitud H, en términos del número de elementos de la sucesión y su distribución en el intervalo. La generalidad y potencia de este lema permitió a Javier su uso en diversas aplicaciones (véanse, por ejemplo, [11] y [4]). Todavía recuerdo la ilusión con la que me lo contaba en un pasillo de la Autónoma el día que lo concibió.

Sobre las sucesiones $B_h[g]$ recuerdo nítidamente cómo, a mi vuelta después de una estancia en Estados Unidos, me comentó que había mejorado todas las cotas existentes en sucesiones $B_2[h]$, pero que era muy sencillo, y no le parecía que debiera publicarse. No mencionó que ya se había convertido en un maestro en los métodos probabilísticos introducidos por Erdős, y que este era el método que estaba utilizando. El método de Erdős requiere la construcción de una medida de probabilidad, dentro del conjunto de sucesiones de enteros, con toda la masa en aquellas sucesiones que tienen el crecimiento necesitado en el problema que requiere nuestra atención. De esta forma, si encontramos un conjunto de sucesiones de probabilidad positiva, habremos demostrado que tales sucesiones tienen el crecimiento deseado, sin tener que preocuparnos por estimarlo.

No era la primera vez que Javier utilizaba este tipo de técnicas, pues en [2] obtuvo, gracias a una aplicación maestra del método, la mejor cota posible para una sucesión $B_2[g]$ formada por cuadrados. Pero, claro, como el resultado en sucesiones $B_2[g]$ con completa generalidad era solo una mejora leve de los resultados conocidos, y mediante una aplicación sencilla de los métodos probabilísticos, no merecía ser publicada. Gracias a Dios, durante mi estancia había tenido la oportunidad de conocer a Erdős en persona y sabía que el resultado *necesitaba* ser publicado, ya que podía apreciar que la prueba contenía una, ciertamente sencilla, pero a la vez bonita, aplicación del método de Erdős. Para convencerle, lo estuvimos mirando y vimos que los métodos de Javier se podían aplicar en general a una sucesión $B_h[g]$, dando como resultado el artículo [10].

Javier fue mi director de tesis. De hecho, yo fui su primer estudiante de doctorado. Gran privilegio. A pesar de ello, no trabajé mucho en contacto directo con Javier, aunque sí que es cierto que hice la tesis gracias a él. Aparte de proponerme problemas para trabajar, como la generalización de sus trabajos en circunferencias y elipses (véase [7]) a otros contextos, mucho más importante fue su apoyo dirigiendo mi camino como investigador.

En el año 1990, Antonio Córdoba organizó una memorable Escuela de Verano de Teoría de Números en la UIMP, a la que invitó a los expertos de más alto nivel mundial del momento. Entre ellos estaba el entonces joven y brillante Andrew Granville. Rápidamente, él y Javier se hicieron muy buenos amigos. Una amistad forjada en el aprendizaje mutuo de matemáticas.

Durante la visita de Andrew a Madrid para asistir a la lectura de mi tesis doctoral, Javier ya sabía que $(16R)^{1/3}$ era la longitud necesaria mínima de un arco de circunferencia de radio R con 2 puntos de coordenadas enteras y que, si se modificaba mínimamente la constante, se podían encontrar arcos de longitud $(16R_n)^{1/3} + o_n(1)$ con 3 puntos del retículo, como son los puntos $(4n^3 - 1, 2n^2 + 2n)$, $(4n^3, 2n^2 + 1)$ y $(4n^3 + 1, 2n^2 - 2n)$, en la circunferencia de radio $R_n = 16n^6 + 4n^4 + 4n^2 + 1$. Sin embargo, a pesar de que sabía que en una circunferencia de radio R no existían arcos de longitud R^α con $\alpha < 2/5$ y cuatro puntos de coordenadas enteras, todavía no había probado que este exponente era el óptimo. Le comentó el problema a Andrew, y después de varios días de trabajar en el problema, no pudieron llegar a ninguna conclusión… hasta el día que marchaba. Ese día Andrew encontró una prueba de que el exponente $2/5$ era óptimo, dando una construcción explícita de arcos de esa longitud con cuatro puntos del retículo. Llamó por teléfono al lugar donde pensaba que hallaría a Javier: la sala donde se entrenaba en el lanzamiento de dardos para el próximo campeonato del mundo. No estaba allí, pero cuando Andrew quiso dejar el mensaje de que ese era el arco óptimo, para su sorpresa el encargado, gran amigo de Javier, le contestó que Javier ya lo sabía. Y es que Javier, al mismo tiempo que Andrew, había dado una demostración alternativa y sorprendente del mismo resultado, utilizando las convergentes en fracción continua de la razón áurea. De nuevo, las ideas de Javier solo podían venir desde el cielo. La colaboración con Andrew Granville se plasmó en dos artículos: uno reflejando estas ideas [9] y otro [8] donde se encuentra un encuadre general de conjeturas y teoremas referentes a problemas relacionados con la sucesión de los cuadrados.

Pero Javier no solo creaba ideas relacionadas con la ciencia. También creaba ideas para hacerse millonario. No lo consiguió, pero nos tuvo a una docena de fieles seguidores apostando a las quinielas todas las semanas según sus elucubraciones sobre la teoría de los números del fútbol. Dentro de este ambiente lúdico y divertido, característica predominante en Javier, también tuvo tiempo de crear juegos para divertimento de los que le rodeaban. Recuerdo como si fuese ayer un día en que, al entrar a su despacho, me dice: «piensa un número. . . » (pensé el 7). Y después de pedirme que realizase cuatro operaciones sencillas a las que solo debía responder «ya» cuando acabase, y que en apariencia habrían devuelto cualquier número al azar, me dice: «has pensado el 7». Este juego original, e ideado por su mente creativa, se basaba simplemente en que la respuesta del jugador cuando suma dos cantidades toma notablemente menos tiempo que si las resta. Al final del juego me comentó que, en mi caso, se notaba muy claramente esta diferencia.

En 2002 le nombraron director del colegio mayor que le dio la bienvenida al llegar a Madrid, el colegio Juan Luis Vives. E incluso como director del colegio mayor era ingenioso y creativo. No tardó mucho en ganarse el respeto y el cariño no solo de los empleados, sino de los propios estudiantes que se alojaron allí año tras año. Y no era fácil esta tarea. Al principio me comentaba que los más audaces le venían con planes locos que querían llevar a cabo dentro del colegio. ¿Cómo pararles? Pronto se le ocurrió una idea simple: cuando venían a su despacho respondía: «¡Ah, qué buena idea! Venga, hacedlo». Nunca más se oía nada sobre el tema.

Javier, me gustaría volverte a agradecer, ahora y siempre, que me tomases como tu primer estudiante de doctorado, a pesar de tu juventud.

Referencias

[1] J. Cilleruelo, The additive completion of k-powers, *J. Number Theory* **44** (1993), 899–905.

[2] J. Cilleruelo, $B_2[g]$ sequences whose terms are squares, *Acta Math. Hungar.* **67** (1995), 899–905.

[3] J. Cilleruelo, An upper bound for $B_2[2]$ sequences, *J. Combin. Theory, Ser. A* **89** (2000), 141–144.

[4] J. Cilleruelo, Gaps in dense Sidon sets, *Integers* **A11** (2000), 6 pp.

[5] J. Cilleruelo y A. Córdoba, Trigonometric polynomials and lattice points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115** (1992), 899–905.

[6] J. Cilleruelo y A. Córdoba, $B_2[\infty]$-sequences of square numbers, *Acta Arith.* **61** (1992), 265–270.

[7] J. CILLERUELO Y A. CÓRDOBA, Lattice points on ellipses, *Duke Math. J.* **76** (1994), 741–750.

[8] J. CILLERUELO Y A. GRANVILLE, Lattice points on circles, squares in arithmetic progressions and sumsets of squares, en *Additive combinatorics*, CRM Proc. Lecture Notes **43** (2007), 241–262.

[9] J. CILLERUELO Y A. GRANVILLE, Close lattice points on circles, *Canad. J. Math.* **61** (2009), 141–144.

[10] J. CILLERUELO Y J. JIMÉNEZ URROZ, $B_h[g]$ sequences, *Mathematika* **47** (2000), 109–115.

[11] J. CILLERUELO Y G. TENENBAUM, Trigonometric polynomials and lattice points, en *Proceedings of the Primeras Jornadas de Teoría de Números*, *Publ. Mat.* **vol. extra** (2007), 107–118.

[12] A. ZYGMUND, A Cantor-Lebesgue theorem for double trigonometric series, *Studia Math.* **64** (1972), 189–202.

JORGE JIMÉNEZ URROZ, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Correo electrónico: jorge.urroz@upc.edu

Mi amistad y colaboración con Javier Cilleruelo

por

Moubariz Z. Garaev

Conocí a Javier en persona en junio de 2008 en el *Primer Encuentro de Teoría de Números en Venezuela*, del cual él fue uno de los organizadores. Durante el evento platiqué mucho con Javier y me impresionó su pasión por las matemáticas, la calidad de sus ideas y la generosidad con la que las compartía. Recuerdo que en aquella ocasión Javier me expresó su creencia sobre la posibilidad de utilizar conjuntos de Sidon para resolver problemas aditivos en cuerpos finitos evitando el uso de las sumas trigonométricas, la herramienta usual para tratar este tipo de problemas. En efecto, unos años después Javier logró concretar sus ideas y publicó un importante artículo [2], donde introdujo un nuevo método para tratar, entre otros problemas, estimaciones de suma-producto, problemas de incidencia y el problema de solubilidad de ecuaciones en cuerpos finitos utilizando conjuntos de Sidon.

Mi amistad y colaboración con Javier comenzó desde nuestro encuentro en Venezuela. Por invitación de Javier realicé varias estancias de investigación en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid (UAM) y participé en varios congresos en España. Durante mis estancias trabajamos arduamente sobre nuestros proyectos de investigación.

En la UAM solía ir por las mañanas con Javier a la cafetería. Javier siempre llevaba consigo un bolígrafo y una hoja de papel, y aun en estos momentos aprovechaba para hablar de las matemáticas.

A finales de 2014, Javier me comunicó la triste noticia sobre su estado de salud: le habían diagnosticado un cáncer de colon. A pesar de esto, su amor por las matemáticas no decayó y hasta sus últimos días siguió demostrando teoremas y escribiendo artículos. En particular, nuestros últimos trabajos [5, 6] fueron finalizados durante su enfermedad, y han sido publicados este mismo año.

A continuación mencionaré, brevemente y a grandes rasgos, algunos de los resultados que obtuve con Javier.

Sean p un número primo suficientemente grande y K, L, M números enteros con $1 \leq M \leq p$. Dado un entero $\lambda \not\equiv 0 \pmod{p}$ denotemos por $I_2(M; K, L)$ el número de soluciones de la congruencia

$$xy \equiv \lambda \pmod{p}, \qquad K+1 \leq x \leq K+M, \quad L+1 \leq y \leq L+M,$$

y denotemos por $I_3(M; L)$ el número de soluciones de

$$xyz \equiv \lambda \pmod{p}, \quad L+1 \leq x, y, z \leq L+M.$$

La obtención de estimaciones superiores para $I_2(M; K, L)$ y $I_3(M; L)$ es de mucho interés en sí misma, pero también tiene importantes aplicaciones en varios problemas de las matemáticas. En nuestro trabajo conjunto [4] obtuvimos estimaciones que son óptimas en ciertas regiones del parámetro M. Más precisamente, si $M < p^{1/4}$, entonces para cualquier $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$I_2(M; K, L) < cM^{\varepsilon}, \quad c = c(\varepsilon) > 0.$$

En el caso de que $K = L$, la misma estimación se cumple bajo la condición de que $M < p^{1/3}$. Sobre $I_3(M; L)$, una conclusión similar es válida si $M < p^{1/8}$. Estas estimaciones las aplicamos al estudio de congruencias exponenciales. Es relevante mencionar que estos resultados fueron utilizados y extendidos en varias direcciones por matemáticos de la talla de Bourgain, Konyagin o Shparlinski.

En [5] investigamos problemas clásicos sobre la distribución de potencias de una raíz primitiva o subgrupos del grupo multiplicativo $\mathbb{F}_p^*$ (aquí $\mathbb{F}_p$ es el cuerpo primo de orden p). Este tema tiene una larga historia que se origina en un trabajo de Vinogradov del año 1926. Un avance sustancial sobre los resultados existentes fue obtenido en trabajos de Bourgain, Konyagin y Shparlinski. Con Javier retomamos este tema y obtuvimos nuevos resultados que también implicaron nuevas aplicaciones. Se trata de estimar el número de soluciones de la ecuación

$$x \equiv yr \pmod{p}; \quad x, y \in \mathbb{N}, \quad x, y \leq H, \quad r \in \mathcal{U},$$

donde H es un parámetro entero positivo, $\mathcal{U}$ es un subconjunto de clases residuales módulo p con $\#(\mathcal{U} \cdot \mathcal{U}) < 10\#\mathcal{U}$. Aquí el conjunto producto $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B}$ de los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ se define de la manera natural $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} = \{ab : a \in \mathcal{A},\, b \in \mathcal{B}\}$.

Una de las consecuencias de nuestros resultados es la siguiente: existe una constante absoluta $c > 0$ tal que el número de soluciones de la congruencia

$$x^n \equiv \lambda \pmod{p}; \quad x \in \mathbb{N}, \quad L < x < L + p/n,$$

es, a lo más, $p^{\frac{1}{3}-c}$ uniformemente sobre enteros positivos n, λ y L. Cabe mencionar que la constante c es efectiva y cuantificarla de la mejor manera posible es un tema para futuras investigaciones.

Otra consecuencia es como sigue. Sean $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, H\}$ y $\mathcal{G}$ un subgrupo de $\mathbb{F}_p^*$ tales que

$$\#\mathcal{I} = H > p^{5/8+\varepsilon}, \quad \#\mathcal{G} > p^{3/8},$$

para alguna constante positiva pequeña ε. Entonces se tiene que

$$\mathbb{F}_p^* \subset \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{G},$$

suponiendo que p es suficientemente grande en términos de ε.

El trabajo [3] fue nuestro primer artículo conjunto, lo escribimos unos meses después de conocernos en Venezuela. Los trabajos [1, 7] están dedicados al problema de la distribución de puntos en curvas polinomiales sobre cuerpos primos. En [7], escrito con Ostafe y Shparlinski, conectamos este problema con el teorema del valor medio de Vinogradov y con las estimaciones de suma-producto de conjuntos en cuerpos primos. En particular, resolvimos un problema abierto planteado anteriormente por Shparlinski y Voloch. En el trabajo conjunto con Chang, Hernández, Shparlinski y Zumalacárregui [1] encontramos conexiones de este tema con la geometría de los números, las aproximaciones diofantinas y el método de Weyl, entre otros.

Aparte de ser un excelente matemático, Javier era un apasionado de la música y tocaba muy bien la guitarra. Como yo estaba fascinado por la guitarra, Javier me impartió unas clases que me ayudaron a aprender a tocar algunas piezas que jamás creí que pudiera llegar a interpretar.

Javier fue un amigo y colaborador excepcional. Su hospitalidad hizo que en Madrid yo me sintiera como en casa. Los resultados que obtuvimos en matemáticas conjuntamente están entre los mejores en mi vida profesional. Fue un verdadero honor conocerlo y colaborar con él.

Descansa en paz, amigo Javier.

Referencias

[1] M.-C. CHANG, J. CILLERUELO, M. Z. GARAEV, J. HERNÁNDEZ, I. E. SHPARLINSKI Y A. ZUMALACÁRREGUI, Points on curves in small boxes and applications, *Michigan Math. J.* **63** (2014), 503–534.

[2] J. CILLERUELO, Combinatorial problems in finite fields and Sidon sets, *Combinatorica* **32** (2012), 497–511.

[3] J. Cilleruelo y M. Z. Garaev, Least totients in arithmetic progressions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 2913–2919.

[4] J. Cilleruelo y M. Z. Garaev, Concentration of points on two and three dimensional modular hyperbolas and applications, *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), 892–904.

[5] J. Cilleruelo y M. Z. Garaev, Congruences involving product of intervals and sets with small multiplicative doubling modulo a prime and applications, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **160** (2016), 477–494.

[6] J. Cilleruelo y M. Z. Garaev, The congruence $x^x \equiv \lambda \pmod{p}$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), 2411–2418.

[7] J. Cilleruelo, M. Z. Garaev, A. Ostafe e I. E. Shparlinski, On the concentration of points of polynomial maps and applications, *Math. Z.* **272** (2012), 825–837.

Moubariz Z. Garaev, Centro de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México
Correo electrónico: garaev@matmor.unam.mx
Página web: http://www.matmor.unam.mx/~garaev/

En recuerdo de Javier Cilleruelo

por

Juanjo Rué, Rafael Tesoro y Ana Zumalacárregui

Gracias a que fuimos sus alumnos hemos pasado muchos gratos momentos con Javier, en una buena parte trabajando en problemas matemáticos.

(Rafa)[1] Fui alumno de doctorado de Javier y desde mucho antes tuve la suerte de ser su amigo. Nos conocimos allá por 1983, cuando ambos estudiábamos la licenciatura de matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid. De aquellos años siempre recuerdo su búsqueda esforzada (y, en buena medida, exitosa) de cuadrados mágicos formados por números primos, a la que se aficionó cuando nuestro profesor de Teoría de Números exhibió uno de ellos en la pizarra. Su interés por los cuadrados mágicos resistió el paso del tiempo: véase por ejemplo [2] y también [5].

(Juanjo) En 2008, durante la preparación de mi tesis doctoral en matemática discreta, coincidí con Javier en el CRM de Barcelona. Sin duda, el entusiasmo y la

[1]Cuando algún párrafo de los que siguen está escrito solamente por uno de nosotros, indicamos el nombre entre paréntesis al comienzo del párrafo.

fina estética matemática de Javier hizo que me empezase a interesar por la combinatoria aditiva, lo que años más tarde fructificaría en decidir desplazarme unos años a Madrid para trabajar con y, lo que es más importante, aprender de él.

(Ana) Yo tuve la suerte de conocer la Teoría de Números de manos de Javier durante mi última etapa de la licenciatura. Cuando hablaba de los problemas que le gustaban, ya fuera discutiendo en la pizarra o bien garabateando en una servilleta junto al café de la cafetería, su emoción era contagiosa. Durante mi tesis doctoral pude además disfrutar de la pequeña familia matemática que se formó a su alrededor: no sólo Juanjo, Rafa, o Carlos Vinuesa, sus estudiantes durante esa época, sino también todos esos colaboradores que nos visitaron durante esos hermosos años.

Javier era un apasionado de la Teoría de Números Combinatoria, con un fina intuición para los resultados aritméticos. En este breve artículo queremos hablar de matemáticas, que fueron sin duda una de sus grandes pasiones. Entre los problemas a los que se dedicó, probablemente sobresalen los *conjuntos de Sidon*, que él presentaba así: «Uno de los temas favoritos de Pál Erdős y que mejor describe su gusto por los problemas aritméticos con sabor combinatorio, ha sido el de los conjuntos de Sidon. Corría el año 1932 cuando Simon Sidon, analista húngaro, le preguntó a Erdős sobre el crecimiento de sucesiones de enteros positivos con la propiedad de que todas la sumas de dos elementos de la sucesión son distintas» [7, Prefacio]. «[...], fue el sabor combinatorio de estos conjuntos lo que más me sedujo, hasta el punto de llegar a marcar de manera notable mi trayectoria investigadora» [3].

Aunque muchos de estos problemas aún siguen abiertos (ver [7, Capítulo 7]), Javier avanzó en desentrañar no pocos de ellos. Nos entretendremos en apenas tres, intentando poner de manifiesto su *sabor combinatorio*.

Nos preguntamos primero por cotas superiores para el tamaño de un conjunto de Sidon $A \subset \{1, \ldots, n\}$. Erdős y Turán [18] obtuvieron $|A| < n^{1/2}+O(n^{1/4})$. El término de error fue precisado por Lindström [20], quien demostró que $|A| < n^{1/2} + n^{1/4} + 1$. El logro de Javier [4] fue afinar esta última cota, demostrando que, de hecho, se cumple

$$|A| < n^{1/2} + n^{1/4} + 1/2. \tag{1}$$

Además generalizó (1) a los conjuntos de enteros positivos con la propiedad de que las *diferencias* no nulas de dos de sus elementos pueden coincidir a lo sumo g veces (el caso $g = 0$ es precisamente el de los conjuntos de Sidon). El amable lector puede encontrar en [7, § 1.2] las elegantes demostraciones de estos resultados.

En el otro sentido, el problema es buscar cotas inferiores, en otras palabras: encontrar conjuntos (finitos o infinitos) de Sidon todo lo densos que se pueda. En el caso infinito —aparentemente más difícil que el caso finito— se trata de encontrar sucesiones A de Sidon con función contadora $A(x) = |\{n \in A\colon n \leq x\}|$ máxima. Nótese que tenemos $A(x) \ll x^{1/2}$, lo cual se deduce inmediatamente de (1). Después de distintos avances, Ruzsa [21] demostró, con una construcción probabilista, la existencia de una sucesión de Sidon A tal que

$$A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}, \qquad (x \to \infty). \tag{2}$$

Javier estaba satisfecho de haber obtenido también (2) con una construcción distinta, de carácter explícito, basada en el logaritmo discreto [6]. Sus ideas le permitieron generalizar (2) para las sucesiones denominadas B_h, las cuales por definición cumplen que todas las sumas de h sumandos de la sucesión son distintas (el caso $h = 2$ son precisamente las sucesiones de Sidon, denominadas con frecuencia B_2 en la literatura). Javier demostró en [6] que para todo $h \geq 2$ existe una sucesión B_h, llamémosla A, con función contadora $A(x) = x^{\sqrt{(h-1)^2+1}-(h-1)+o(1)}$, $(x \to \infty)$.

Decimos que una sucesión A es una sucesión $B_h[g]$ si el número de representaciones de cualquier entero n en la forma $n = a_1 + \cdots + a_h$ con $a_1 \leq \cdots \leq a_h$, $a_i \in A$, está acotado por g (las sucesiones $B_h[1]$ son las que hemos llamado antes sucesiones B_h). En el folclore es un clásico la técnica conocida como *algoritmo voraz* para obtener sucesiones $B_h[g]$ que crezcan lo más despacio posible (lo que equivale a que su densidad $A(x)/x$ sea máxima). Comenzando por $a_1 = 1$, definimos a_n para $n \geq 2$ como el menor entero posible, mayor que a_{n-1}, tal que $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión $B_h[g]$. De este modo se consigue una sucesión infinita B_h con $a_n \leq 2n^{2h-1}$. Uno de los últimos trabajos de Javier [8] fue un artículo de 3 páginas que es un magnífico ejemplo de su sobrio estilo de hacer matemáticas con elegante fineza. En él presentó una novedosa variante del algoritmo voraz que proporciona una sucesión $B_h[g]$ con $a_n \leq 2gn^{h+(h-1)/g}$, y que tiene, por tanto, el menor crecimiento conseguido hasta entonces para todo $g > 1$.

Sus contribuciones no quedan aquí. Durante su tesis doctoral obtuvo resultados muy relevantes con sus estimaciones sobre puntos reticulares en arcos de curvas [1, 10] que le convirtieron en autoridad mundial en el tema (ver también [12, 13]). En [10], junto con Antonio Córdoba, demostró que en una elipse $x^2 + dy^2 = n$, $d = e^2D$ con D libre de cuadrados y $n \in \mathbb{N}$, un arco de longitud

$$n^{1/4-1/(8[(m+h_2)/2h_2+2]+4)} \tag{3}$$

contiene a lo sumo m puntos con coordenadas enteras, donde h_2 es el número de elementos de clase 2 en el grupo de clases de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$.

Muchos años después, pero seguramente gracias a la intuición que le había dado estudiar puntos reticulares en arcos pequeños como los de (3), Javier y Moubariz Garaev [11] obtuvieron por primera vez cotas óptimas para la concentración de puntos en hipérbolas modulares. Mediante técnicas clásicas, empleando sumas de Kloosterman, uno puede demostrar que el número $I(M)$ de soluciones a la congruencia

$$xy \equiv \lambda \pmod{p}, \quad 1 + L \leq x, y \leq M + L,$$

satisface

$$I(M) = \frac{M^2}{p} + O\left(p^{1/2} \log^2 p\right). \tag{4}$$

La estimación (4) permite obtener una asintótica de $I(M)$ para valores grandes de M, pero es peor que la cota trivial cuando $M < p^{1/2}$. Entre otros resultados, en [11] consiguieron por primera vez obtener cotas superiores para valores de M por debajo del umbral $p^{1/2}$ (que aparece de forma recurrente al emplear técnicas clásicas en sumas de caracteres o análisis de Fourier). Demostraron que

$$I(M) < \frac{M^{3/2}}{p^{1/2}} + M^{o(1)} \tag{5}$$

uniformemente en L, lo cual para $M < p^{1/4}$ implica la cota óptima $I(M) < M^{o(1)}$. Este resultado ha sido muy influyente en el área, ya que por primera vez se encontraron técnicas para romper la barrera natural de $M = p^{1/2}$, que aparece en muchos problemas similares. De hecho, abrió el camino para un área muy prolífica en la que han estado trabajando desde entonces autores como Jean Bourgain, Igor Shparlinski, Sergei Konyagin, Mei-Chu Chang o el propio Moubariz Garaev, entre otros.

Javier era un persona generosa, con su tiempo y con sus conocimientos. Bastaría como prueba de ello repasar la larga lista de matemáticos que fuimos coautores de sus artículos. Cabe destacar además el trabajo que realizó tendiendo lazos con América Latina; creador de la Red Iberoamericana de Teoría de Números, en la que participan investigadores de España, Colombia, Venezuela, México, Chile o Argentina, Javier es una referencia en países como Colombia, donde su legado sigue muy presente en manos de Carlos Trujillo, quien fue uno de sus estudiantes de doctorado.

(Rafa) Durante los años en que dirigió mi tesis doctoral, siempre estaba dispuesto a quedar conmigo para trabajar un buen rato, ya fuera en su despacho o en la cocina de su casa, tanto en un día lectivo como —la mayoría de las veces— en fin de semana. De nuestro trabajo conjunto me gustaría destacar [16], donde estudiamos cierta generalización de los conjuntos de Sidon, diferente de las comentadas anteriormente en este artículo.

(Juanjo) Para mi Javier siempre fue una referencia, tanto personal como intelectual, y fuente inagotable de buenos consejos de carácter profesional en el actual mundo académico, especialmente complicado para los jóvenes doctores. Fue sin duda nuestro primer trabajo conjunto en teoría combinatoria de números (ver [15]) el que encendió mi pasión por esta área de las matemáticas.

(Ana) Creo que, además de sus grandes matemáticas, el gran legado de Javier ha sido dejar su huella en todos aquellos que hemos trabajado con él por la meticulosidad y la pasión con que hacía su trabajo. Recuerdo la paciencia con la que me guiaba en la pizarra cuando había algo que no entendía o cuando repasábamos juntos la última versión de un artículo. Recuerdo con especial cariño las cenas que organizaba en su casa cuando teníamos invitados, que normalmente acababan con un concierto suyo a la guitarra. De entre los trabajos que realizamos juntos destacaría [17], porque incluye muchos de los ingredientes que a Javier le gustaban.

El número de visitas que sigue recibiendo su página web [9] evidencia la vigencia y el interés de su obra. La enfermedad no pudo hacer mella en su plenitud creadora, que se mantuvo hasta el final. Uno de sus últimos artículos es extenso y prolijo, ejemplo de esfuerzo ordenado y meticuloso, hermoso broche a su obra en Teoría de Números Combinatoria. Cilleruelo y Luca [14] demostraron que cualquier número entero positivo se puede poner como la suma de tres capicúas. Y Javier, en otra de sus queridas facetas, aún tuvo la energía para divulgarlo [19].

No te has ido, Javi: permanecerás en el legado matemático de tu obra, en nuestro recuerdo y en nuestros corazones.

Referencias

[1] J. Cilleruelo, The distribution of the lattice points on circles, *J. Number Theory* **43** (1993), no. 2, 198–202.

[2] J. Cilleruelo, Cuadrados mágicos, *La Gaceta de la RSME* **1** (1998), no. 3, 447–451.

[3] J. Cilleruelo, Conjuntos de enteros con todas las diferencias distintas, *La Gaceta de la RSME* **11** (2008), no. 1, 151–170.

[4] J. Cilleruelo, Sidon sets in $\mathbb{N}^d$, *J. Combin. Theory Ser. A* **117** (2010), no. 7, 857–871.

[5] J. Cilleruelo, *Un cuadrado mágico de productos* (2011), http://sociedad.elpais.com/sociedad/2011/04/01/videos/1301608801_870215.html

[6] J. Cilleruelo, Infinite Sidon sequences, *Adv. Math.* **255** (2014), 474–486.

[7] J. Cilleruelo, *Conjuntos de Sidon*, XXVII Escuela Venezolana de Matemáticas (2014).

[8] J. Cilleruelo, A greedy algorithm for $B_h[g]$ sequences, https://arxiv.org/abs/1601.00928 (2016).

[9] J. Cilleruelo, Página web personal, http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/cillerue/

[10] J. Cilleruelo y A. Córdoba, Lattice points on ellipses, *Duke Math. J.* **76** (1994), no. 3, 741–750.

[11] J. Cilleruelo y M. Z. Garaev, Concentration of points on two and three dimensional modular hyperbolas and applications, *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), no. 4, 892–904.

[12] J. Cilleruelo y A. Granville, Close lattice points on circles, *Canad. J. Math.* **61** (2009), no. 6, 1214–1238.

[13] J. Cilleruelo y J. Jiménez-Urroz, Divisors in a Dedekind domain, *Acta Arith.* **85** (1998), no. 3, 229–233.

[14] J. Cilleruelo y F. Luca, Every positive integer is a sum of three palindromes, https://arxiv.org/abs/1602.06208 (2016).

[15] J. Cilleruelo y J. Rué, On a question of Sárkozy and Sós for bilinear forms, *Bul. London Math. Soc.* **41** (2) (2009), 274–280.

[16] J. Cilleruelo y R. Tesoro, On sets free of sumsets with summands of prescribed size, *Combinatorica* (aceptado en 2015 para publicación), https://arxiv.org/abs/1504.00137

[17] J. Cilleruelo y A. Zumalacárregui, An additive problem in finite fields with powers of elements of large multiplicative order, *Rev. Mat. Complutense* **27** (2014), no. 2, 501–508.

[18] P. Erdős y P. Turán, On a problem of Sidon in additive number theory, and on some related problems, *J. London Math. Soc.* **16** (1941), 212–215.

[19] Gaussianos, *Todo entero positivo es suma de tres capicúas (por Javier Cilleruelo)* (2016), http://gaussianos.com/todo-entero-positivo-es-suma-de-tres-capicuas-por-javier-cilleruelo/

[20] B. LINDSTRÖM, An inequality for B_2-sequences, *J. Combinatorial Theory* **6** (1969), 211–212.

[21] I. RUZSA, An infinite Sidon sequence, *J. Number Theory* **68** (1998), no. 1, 63–71.

JUANJO RUÉ, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES, UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA Y BARCELONA GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, BARCELONA

Correo electrónico: juan.jose.rue@upc.edu

Página web: https://mat-web.upc.edu/people/juan.jose.rue/

RAFAEL TESORO, UNIT CNECT.H1 - CYBERSECURITY & DIGITAL PRIVACY, EUROPEAN COMMISSION, BRUSELAS, BÉLGICA

Correo electrónico: rtesoroc@gmail.com

Página web: https://rafaeltesoro.wordpress.com/mates/

ANA ZUMALACÁRREGUI, DEPARTMENT OF PURE MATHEMATICS, UNIVERSITY OF NEW SOUTH WALES, SYDNEY, AUSTRALIA

Correo electrónico: a.zumalacarregui@unsw.edu.au

Página web: http://www.anazumalacarregui.org