Sobre aproximación con polinomios de coeficientes enteros[1]

por

J. M. Almira y N. Del Toro

1. Introducción

Este artículo pretende alcanzar un objetivo doble. De una parte, quisiéramos realizar una breve introducción al problema de la aproximación con polinomios de coeficientes enteros lo suficientemente elemental como para poder explicarla a nivel de licenciatura. En este sentido, las secciones segunda y tercera del artículo contienen demostraciones nuevas y sencillas de algunos casos particulares de teoremas conocidos en la materia. De otra parte, quisiéramos motivar los contenidos de parte de un posible curso de doctorado sobre aproximación que, además, tendría carácter interdisciplinar, por la conexión que existe con algunas técnicas propias del álgebra conmutativa y, en particular, de la teoría de números algebraicos.

El teorema de aproximación de Weierstrass afirma que los polinomios son un subconjunto denso del espacio de las funciones continuas $\mathbf{C}[a,b]$, para toda elección de $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Existen muchas demostraciones de este resultado, siendo la más conocida la que se debe a S. N. Bernstein (1912, ver [12], [7]), que se basa en el uso del teorema del binomio (o, si se quiere, en el hecho de que las funciones $\{\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\}$ forman una partición de la unidad) (o, equivalentemente, en propiedades de la distribución binomial), para construir, dada una función $f \in \mathbf{C}[0,1]$, la sucesión de aproximantes:

J. M. Almira, N. del Toro y M. v. Golitscheck

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

demostrándose que $||B_n f - f||_{\mathbf{C}[0,1]} := \max_{x\in[0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \to 0$ para $n \to \infty$ (si K es compacto, la norma de $f \in \mathbf{C}(K)$ se denotará en lo

[1]Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el grupo de investigación "Aproximación y Métodos Numéricos", PB-94 y FQM-0178

sucesivo indistintamente por $||f||_{\mathbf{C}(K)}$ o $||f||_K$). Es más, se puede probar que, si $f \in \mathbf{C}^{(s)}[0,1]$, entonces $\max_{0\leq j\leq s} ||(B_n f)^{(j)} - f^{(j)}||_{\mathbf{C}[0,1]} \to 0$ para $n \to \infty$ (ver [12]).

Hemos supuesto que $[a,b] = [0,1]$ en la formulación anterior porque evidentemente no hay pérdida de generalidad (los cambios de escala (i.e., $x \to \alpha x$) y traslaciones (i.e., $x \to x - \alpha$) dejan invariante el espacio de los polinomios). Sin embargo, si restringimos nuestro interés a la aproximación con polinomios de coeficientes enteros, $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ ($a_i \in \mathbb{Z}$), debemos tener en cuenta que $p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Esto impide la aproximación uniforme a funciones que no tomen valores enteros para $x \in \mathbb{Z}$. Aún así, no es difícil probar que $\mathbb{Z}[x]$ es denso en $\mathbf{C}[a,b]$ siempre que $[a,b] \subset (0,1)$. Es más: la clausura de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[0,1]$ es el espacio vectorial $\mathbf{C}_0[0,1] = \{f \in \mathbf{C}[0,1] : f(\{0,1\}) \subset \mathbb{Z}\}$. Es típico que se proponga la demostración de este hecho como ejercicio en un primer curso de Análisis Numérico (ver [11, pg. 71, Ej. 13]). Nosotros reproducimos aquí la prueba:

Demostración (Kantorovich). Sea $f \in \mathbf{C}_0[0,1]$, y sea $\varepsilon > 0$ arbitrariamente elegido. Entonces $||B_n f - f||_{\mathbf{C}[0,1]} < \varepsilon/2$ para n suficientemente grande. Por otra parte, $\widetilde{B_n f}(x) := \sum_{k=0}^{n} \left[f(k/n)\binom{n}{k}\right] x^k(1-x)^{n-k} \in \mathbb{Z}[x]$ y

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ B_n f - \widetilde{B_n f}(x) \leq \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leq \ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1/n < \varepsilon/2 \ (n > [1/\varepsilon]+1) \end{aligned}$$

Se sigue que $||\widetilde{B_n f}(x) - f||_{\mathbf{C}[0,1]} < \varepsilon$ para n suficientemente grande. □

En este punto, algunas observaciones son obligadas: Weierstrass demostró la densidad de los polinomios en $\mathbf{C}[a,b]$ en 1885, momento a partir del cual aparecieron numerosas pruebas del resultado, y muchas de ellas seguían ideas completamente distintas. La demostración de Bernstein (1912) es especial por muchas razones. Para empezar, no es complicada, en el sentido de que no requiere conocimientos especiales de integrales singulares como sucede en la demostración del propio Weierstrass (pero también en las propuestas por Picard, Fejér, Landau y De la Vallée Poussin), o de variable compleja, como sucede en las demostraciones de Runge-Phragmén, Lebesgue, Mittag-Leffler, etc. (ver [43] para un análisis pormenorizado de todas estas pruebas). Simplemente, utiliza algunas propiedades sencillas del binomio de Newton. Además, se trata de una demostración lineal de dicho teorema (i.e., si denotamos por $\Pi = \mathbb{R}[x]$ el espacio de los polinomios de coeficientes reales, entonces $B_n : \mathbf{C}[0,1] \to \Pi$, $f \to B_n f$ es un operador lineal para todo $n \geq 0$). A partir de la teoría desarrollada por Bernstein con la introducción de los operadores B_n, se han realizado numerosos trabajos sobre aproximación mediante el uso de operadores positivos (operadores que conservan el orden en el sentido de que si $f \leq g$, entonces $L_n f \leq L_n g$), llegando incluso a publicarse varios textos dedicados exclusivamente al estudio de operadores positivos y aproximación (un clásico del tema es [16]).

Los operadores $\widetilde{B_n} : \mathbf{C}_0[0,1] \to \mathbb{Z}[x]$ no son homomorfismos de $\mathbb{Z}$-módulos, de modo que el proceso de aproximación utilizado para la demostración de la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}_0[0,1]$ es no lineal. De hecho, es imposible encontrar procesos lineales para la aproximación con polinomios de coeficientes enteros, ya que el único operador $L : \mathbf{C}_0[0,1] \to \mathbb{Z}[x]$ que satisface $L(nf) = nL(f)$ para $f \in \mathbf{C}_0[0,1]$ y $n \in \mathbb{Z}$, es $L = 0$.

La teoría de aproximación con polinomios de coeficientes enteros, también llamada aproximación diofántica, representa, desde nuestro punto de vista, uno de los aspectos más interesantes de lo que actualmente llamamos teoría de aproximación con restricciones, que es el estudio de los procesos de aproximación clásicos (como por ejemplo, la aproximación con polinomios, con funciones racionales, o con funciones spline) cuando son sometidos a algún tipo de exigencia extra (por ejemplo, podemos limitar el uso de algunas potencias de x para la aproximación con polinomios). Los primeros avances en dicha disciplina se deben a Kakeya y Pal, y fueron publicados en 1914 (ver [33], [42], [20]).

La teoría de aproximación diofántica posee importantes aplicaciones en otras disciplinas como, por ejemplo, en teoría de números. Nosotros vamos a desarrollar brevemente una idea original de A. O. Gelfond (ver [26]) y redescubierta de forma independiente por M. Nair (ver [40]), en la que se establece cierta relación entre el problema de la distribución de los números primos y las propiedades extremales de los polinomios de coeficientes enteros respecto de la norma uniforme en el intervalo $[0,1]$. Para ello, empezamos recordando que el teorema del número primo establece que

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\log n},\ (n \to \infty),$$

donde $\pi(n)$ denota el cardinal del conjunto de números primos p que satisfacen $0 < p \leq n$. Una forma equivalente del resultado, afirma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log d_n}{n} = 1,$$

donde d_n representa el mínimo comun múltiplo de los números $\{1,2,...,n\}$. Ahora bien, dado $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polinomio de coeficientes enteros y grado menor o igual que n, la integral de $p(x)$ en el intervalo $[0,1]$ satisface

$$I(p) := \int_0^1 p(x)dx = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{k+1}$$

y, por tanto, $d_{n+1}I(p) \in \mathbb{Z}$. Denotemos por $\Pi_k^{\mathbb{Z}}$ el conjunto de los polinomios de coeficientes enteros y grado menor o igual que k y por $p_k(x)$ el polinomio de mejor aproximación diofántica a cero con polinomios no nulos y de grado menor o igual a k,

$$\|p_k\|_{[0,1]} = \min_{q \in \Pi_k^{\mathbb{Z}} \setminus \{0\}} \|q\|_{[0,1]},$$

entonces $I(p_k^{2n}) > 0$ para todo $n \geq 1$, ya que $p_k \neq 0$ y, por tanto, $0 \neq d_{2kn+1}I(p_k^{2n}) \in \mathbb{N}$, de donde se sigue que

$$d_{2kn+1} \geq \frac{1}{I(p_k^{2n})} \geq \frac{1}{\|p_k\|_{[0,1]}^{2n}}.$$

Tomando logaritmos a ambos lados y dividiendo por $2nk+1$, obtenemos que

$$\frac{\log d_{2kn+1}}{2nk+1} \geq -\frac{\log \|p_k\|_{[0,1]}}{k + \frac{1}{2n}}, \text{ para } n \geq 1.$$

Tomando $n \to \infty$ se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{\log d_n}{n} \geq -\log \frac{\|p_k\|_{[0,1]}}{k}.$$

Una vez se ha calculado alguna de las constantes $C_k = -\frac{\|p_k\|_{[0,1]}}{k}$, la anterior estimación produce una versión débil, pero fácil de demostrar, del teorema del número primo. Las constantes C_k que se acaban de definir han sido ampliamente estudiadas. Concretamente, Schnirelman demostró que existe el límite $C = \lim_{k\to\infty} C_k$ (ver [5]), Borwein y Erdelyi [10] demostraron que $C \in (0.8586616, 0.8657719)$, Flammang [24] mejoró la cota inferior a 0.8591282 y, finalmente, Habsieger y Salvy [29] han mejorado dicha estimación, obteniendo que $C > 0.85925028$. Como consecuencia de las estimaciones anteriores se deduce que el teorema del número primo no se puede demostrar por el método que acabamos de desarrollar. Aún así, estas ideas han calado en la teoría analítica de números y, por ejemplo, la importante monografía [39] dedica un capítulo íntegro a su estudio. Quisiéramos comentar, sin embargo, que en su artículo de 1982 (ver [40]), M. Nair no se ocupó del cómputo de las constantes C_k sino que, utilizando que $d_{n+1}I(p) \in \mathbb{Z}$ para polinomios de $\Pi_n^{\mathbb{Z}}$, y tomando $p(x) = x^n(1-x)^n$, demostró, teniendo en consideración la fórmula del binomio, algunas propiedades elementales de los números combinatorios, y propiedades de divisibilidad, que $d_n \geq 2^n$ (y, por tanto, $\frac{\log d_n}{n} \geq \log 2$) para $n \geq 9$.

Otro aspecto importante de la teoría de aproximación con restricciones, que ha sido ampliamente desarrollado este siglo, es el estudio de teoremas tipo Müntz (ver [2], [8]), que son generalizaciones y/o variaciones sobre el siguiente resultado:

Teorema 1 ***(Müntz, 1914)*** *Sea* $\Lambda = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 < ....\}$ *una sucesión creciente de números reales positivos, y sea* $\Pi(\Lambda) = \mathbf{span}\{x^{\lambda_i}\}_{i=0}^{\infty}$ *el espacio de los polinomios con exponentes en* Λ*. Entonces son equivalentes las afirmaciones:*

(a) $\Pi(\Lambda)$ *es denso en* $\mathbf{C}[0,1]$

(b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$

En la segunda sección del artículo estamos interesados en un resultado para aproximación con polinomios de Müntz con coeficientes enteros. Ferguson y Golitscheck (ver [20]) demostraron en 1975 que si $\Lambda \subset \mathbb{N}$, la condición $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty$ es suficiente (su necesidad es obvia, a partir del Teorema 1), para obtener la densidad de

$$\Pi^{\mathbb{Z}}(\Lambda) := \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^{\lambda_i} : n \geq 0,\ \lambda_i \in \Lambda \text{ y } a_i \in \mathbb{Z} \text{ para todo } i \right\}$$

en $\mathbf{C}_0[0,1]$ y, por tanto, el teorema se generaliza, si tomamos exponentes en $\mathbb{N}$, completamente. Aún así, la demostración es difícil y, por supuesto, no cabe explicarla a nivel de licenciatura (mientras que el Teorema 1 sí podría contarse en cuarto o quinto (además, en diferentes asignaturas, ya que admite pruebas propias de un curso de teoría de aproximación (ver [12, pp. 267-273]) pero también propias de un curso de análisis real (ver [44, pp. 294-296])). Nosotros vamos a ser menos exigentes, y proponemos el estudio de un caso particular del teorema de Ferguson y Golitscheck, que es interesante por sí mismo. Así, probamos, de dos formas distintas, que $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0,1,...,m\})$ es denso en $\mathbf{C}[a,b]$, $0 < a < b < 1$ para todo $m \geq 0$. Las demostraciones son, además, constructivas.

En la tercera sección demostramos la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ y $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}\setminus\{0,1,...,m\})$ en el espacio de las funciones de clase $s \geq 0$, $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, para $0 < a < b < 1$, dotado de su norma natural $||f||_{\mathbf{C}^{(s)}[a,b]} := \max_{0\leq j\leq s} ||f^{(j)}||_{\mathbf{C}[a,b]}$. Hasta lo que conocemos, el correspondiente resultado tipo Müntz es nuevo (además, por el momento no sabemos si el Teorema 1 admite o no una generalización completa para alguno de los espacios $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, $0 \leq a < b \leq 1$). La aproximación simultánea de una función y sus derivadas es importante porque implica buenas propiedades de conservación de la forma para los aproximantes. Por ejemplo, si aproximamos en clase dos a una función convexa, entonces es claro que a partir de cierto momento, los aproximantes serán también funciones convexas.

Dedicamos la cuarta sección del artículo a exponer algunos resultados que podrían servir como problemas propuestos (ejercicios) para los alumnos.

La quinta sección está pensada como una introducción más profunda (y más en la línea de los resultados clásicos) a la aproximación con polinomios de coeficientes enteros. Concretamente comentamos (incluyendo esbozos de las demostraciones) algunos resultados sobre densidad de polinomios con coeficientes enteros en intervalos de longitud superior a uno, y establecemos (sin demostración) los resultados correspondientes al problema de aproximación para el caso complejo, cambiando $\mathbb{Z}[x]$ por el anillo de polinomios complejos (en la variable z) con coeficientes en un subanillo de $\mathbb{C}$ discreto de rango dos.

La sexta sección contiene algunos comentarios históricos sobre la biografía de algunos de los fundadores de la teoría de aproximación con polinomios de coeficientes enteros.

En la última sección del artículo exponemos algunos problemas abiertos.

En todo momento intentamos dar referencia exacta sobre la autoría de los resultados.

2. APROXIMACIÓN EN $\mathbf{C}[a,b]$, $0 \leq a < b \leq 1$

Dado un polinomio $p(x)$, utilizaremos la notación $\mathbf{ord}(p) = k$ para denotar el mínimo grado del monomio de $p(x)$ con coeficiente no nulo, $p(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i x^i$ (decimos, en tal caso, que $p(x)$ tiene orden k). Podemos utilizar los polinomios $\widetilde{B_n} f$ para demostrar el siguiente resultado:

TEOREMA 2 *$\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0,1,...,m\})$ es denso en $\mathbf{C}_0[a,1] := \{f \in \mathbf{C}[a,1] : f(1) \in \mathbb{Z}\}$, para $0 < a < 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathbf{C}_0[a,1]$ y sea $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ una extensión contínua de f tal que $\overline{f}(0) = 0$ para todo $x \in [0, a/2]$. Entonces $\overline{f} \in \mathbf{C}_0[0,1]$ y por tanto, $\|\widetilde{B_n}\overline{f} - \overline{f}\|_{[0,1]}$ converge a cero para $n \to \infty$. Ahora bien,

$$\widetilde{B_n}\overline{f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\overline{f}(k/n) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k > an/2}^{n} \left[\overline{f}(k/n) \binom{n}{k} \right] x^k (1-x)^{n-k}$$

tiene orden mayor que m siempre que $an/2 \geq m$. □

COROLARIO 3 *Las siguientes afirmaciones se satisfacen:*
i) $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0,1,...,m\})$ es denso en $\mathbf{C}_0^0[0,1] := \{f \in \mathbf{C}_0[0,1] : f(0) = 0\}$.
ii) $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{1,...,m\})$ es denso en $\mathbf{C}_0[0,1]$.

DEMOSTRACIÓN. Dados $f \in \mathbf{C}_0^0[0,1]$ y $\varepsilon > 0$, existe un cierto $\delta > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para $0 < x < \delta$ (por la continuidad de f), de modo que podemos encontrar $\overline{f} \in \mathbf{C}_0[0,1]$ tal que $\overline{f}(x) = 0$ para $x \in [0, \delta/2]$ y $\|f - \overline{f}\|_{[0,1]} < \varepsilon$. Mediante el uso de los operadores $\widetilde{B_n}$, podemos aproximar $\overline{f}$ con polinomios de coeficientes enteros y orden mayor que m uniformemente en $[0,1]$, de modo que lo mismo sucederá para f. Esto demuestra i). Con respecto a ii), si $f \in \mathbf{C}_0[0,1]$ pero $f(0) = N \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ entonces aproximamos $f_1(x) = f(x) - N$ con polinomios $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$de $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$ y a continuación utilizamos los polinomios $p_k = q_k + N$ para aproximar a f desde $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{1, ..., m\})$. $\Box$

Los operadores $\widetilde{B_n}$ han sido ampliamente estudiados por F. Luquin (ver, por ejemplo, [35], [36], [14]).

Con frecuencia, un mismo resultado admite varias demostraciones. Ya hemos comentado esto para el teorema de Weierstrass y, cómo no, el Teorema 2 no es una excepción. Vamos a exponer una segunda prueba de la densidad de $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$ en $\mathbf{C}[a, 1]$, para $0 < a < 1$, basándonos en la construcción de sucesiones de aproximantes para las potencias x^s, que convergen uniformemente sobre compactos de $(0, 1]$. Las ideas que llevan a esta segunda prueba del teorema, nos serán útiles para obtener los resultados de la siguiente sección del artículo.

Segunda demostración del Teorema 2. Debido a la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}_0[0, 1]$, para demostrar la densidad de $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}\setminus\{0, 1, ..., m\})$ en $\mathbf{C}_0[a, 1]$ sólo tenemos que aproximar los monomios x^k, $0 \le k \le m$ con elementos de $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$. Supongamos que esto se puede hacer para $k = 0$, de modo que existe una sucesión $\{q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinomios de orden mayor o igual a m, tal que $\|q_n(x) - 1\|_{[a,1]}$ converge a cero para $n \to \infty$. Sea $k > 0$ fijo. Entonces

$$x^k q_n(x) \in x^k \Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\}) = \Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m + k\})$$

y

$$\left\| x^k - x^k q_n(x) \right\|_{[a,1]} \le \|1 - q_n(x)\|_{[a,1]} \to 0$$

para $n \to \infty$. Esto reduce nuestro problema al de aproximar a $1 = x^0$ por polinomios orden mayor que m uniformemente en compactos de $(0, 1]$. Para ello, utilizamos el siguiente resultado técnico:

Lema 4 *Sea* $a_0(n) = -1$ *y definamos*

$$a_{m+1}(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k(n) \binom{n}{m+1-k} (-1)^{m-k}, \ m \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Entonces $|a_k(n)| = \mathbf{O}(n^k)$ *para todo* $k \ge 0$ *y el polinomio*

$$p_{n,m}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{m} a_k(n) x^k (1 - x)^n$$

pertenece a $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$ *para todo* $n > m$.

DEMOSTRACIÓN. Empezamos tomando $m = 0$. Es claro que $p_{n,0}(x) = 1 - (1-x)^n$ no contiene la potencia $1 = x^0$ en su expansión (i.e., $\mathbf{ord}(p) > 0$). Procedemos, pues, por inducción sobre m. Supongamos que $p_{n,m}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{m} a_k(n)x^k(1-x)^n$ pertenece a $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0,1,...,m\})$ para $n > m$, donde los coeficientes $a_k(n)$ se definen por recurrencia como en (1). Entonces $p_{n,m+1}(x) = p_{n,m}(x) + a_{m+1}(n)x^{m+1}(1-x)^n$, y

$$p_{n,m}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{m} a_k(n)x^k(1-x)^n = \sum_{k=m+1}^{m+n} b_{n,k}x^k$$

para ciertos enteros $\{b_{n,k}\}_{k=m+1}^{n}$. Utilizando la fórmula del binomio para $(1-x)^n$, se sigue que

$$b_{n,m+1} = \sum_{k=0}^{m} a_k(n)\binom{n}{m+1-k}(-1)^{m+1-k} = -a_{m+1}(n)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{ord}(p_{n,m+1}) &= \mathbf{ord}\left(-a_{m+1}(n)x^{m+1} + \sum_{k=m+2}^{m+n} b_{n,k}x^k + a_{m+1}(n)x^{m+1}(1-x)^n\right) \\
&= \mathbf{ord}\left(\sum_{k=m+2}^{m+n} b_{n,k}x^k + a_{m+1}(n)x^{m+1}\sum_{t=1}^{n}\binom{n}{t}(-1)^t x^t\right) \\
&\geq m+2,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. Por otra parte, si $|a_k(n)| = \mathbf{O}(n^k)$ para todo $k \leq m$, entonces

$$\begin{aligned}
|a_{m+1}(n)| &\leq \sum_{k=0}^{m} |a_k(n)|\binom{n}{m+1-k} \leq C\sum_{k=0}^{m} n^k\binom{n}{m+1-k} \\
&= C\sum_{t=1}^{m+1} n^{m+1-t}\binom{n}{t} \leq Cn^{m+1}\sum_{t=1}^{m+1}(1/n)^t\binom{n}{t} \\
&\leq Cn^{m+1}\sum_{t=0}^{n}(1/n)^t\binom{n}{t} = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n n^{m+1} \\
&\leq \exp(1)Cn^{m+1} = \mathbf{O}(n^{m+1}). \ \Box
\end{aligned}$$

TEOREMA 5 *Supongamos que $0 < a < 1$, y sea $p_{n,m}$ el polinomio definido en el Lema 4. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \|1 - p_{n,m}(x)\|_{[a,1]} = 0$$

Demostración. Se sigue de la relación $|a_k(n)| = \mathbf{O}(n^k)$, que $|a_k(n)|x^k(1-x)^n$ converge a cero uniformemente sobre subconjuntos compactos de $(0,1]$, para $n \to \infty$. Por tanto,

$$|1 - p_{n,m}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{m} a_k(n) x^k (1-x)^n \right| \leq \sum_{k=0}^{m} |a_k(n)| x^k (1-x)^n$$

también converge a cero uniformemente sobre compactos de $(0,1]$. $\square$

Teniendo en cuenta las observaciones previas al Lema 4, se concluye la demostración del Teorema 2. $\square$

3. Aproximación en $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, $0 < a < b < 1$

En esta sección vamos a demostrar que $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0,1,...,m\})$ es denso en $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$ para $0 < a < b < 1$ y $s > 0$. Los polinomios de Bernstein serán de nuevo útiles para nuestra prueba. De hecho, la idea de la prueba se basa en el uso del siguiente resultado (combinado con algunas propiedades conocidas de las funciones de una variable compleja):

Lema 6 ***(ver [15, p. 326]).*** *Si $f(z)$ es una función entera, entonces la sucesión de polinomios de Bernstein $\{B_n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a $f(z)$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$.*

Demostración. Si derivamos s veces la expresión

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

obtenemos que

$$(B_n f)^{(s)}(x) = n(n-1)\cdots(n-s+1) \sum_{k=0}^{n-s} \Delta^s f(k/n) \binom{n-s}{k} x^k (1-x)^{n-s-k}$$

(donde $\Delta^1 f(x) = f(x+1/n) - f(x)$ y, $\Delta^k f(x) = \Delta^1(\Delta^{k-1} f(x))$ son los operadores en diferencias sucesivas de paso $1/n$) y, por tanto,

$$(B_n f)^{(s)}(0) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-s+1)\Delta^s f(0), \; s = 0, ..., n.$$

Ahora bien, como $B_n f$ es un polinomio de grado $\leq n$, coincide con su desarrollo de Taylor, de donde se deduce la fórmula:

$$B_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k f(0) z^k$$

Por otra parte, si f es analítica, entonces es derivable de clase $\mathbf{C}^{(\infty)}$ y por tanto para todo $k \geq 0$ existe $a_k \in (0, k/n]$ tal que $\Delta^k f(0) = f^{(k)}(a_k)/n^k$, lo que nos lleva a la expresión:

$$B_n f(z) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} f^{(k)}(a_k) z^k$$

Sea ahora $r > 1$ fijado. Vamos a demostrar la convergencia uniforme sobre $\mathbb{D}(0, r)$ de $B_n f(z)$ a f. Sea $r_1 > r$ y sea $M = ||f||_{\mathbb{D}(0,r_1+1)}$. Entonces $|f(z)| \leq M$ para todo z tal que $|z - a| \leq r_1$ para algún valor $a \in [0, 1]$. Se sigue de la fórmula integral de Cauchy generalizada, que $\frac{1}{k!}|f^{(k)}(a_k)| \leq M r_1^{-k}$ se satisface para todo $k \geq 0$. Esto demuestra que la sucesión de polinomios $\{B_n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ está uniformemente acotada en $\mathbb{D}(0, r)$,

$$|B_n f(z)| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} (r/r_1)^k < \infty, \text{ para todo } n \geq 0 \text{ y } |z| \leq r.$$

Es más, si hacemos $n > m$, $m \to \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |B_n f(z) - B_m f(z)| &= \sum_{k=m}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} |f^{(k)}(a_k)| z^k \\ &\leq M \sum_{k=m}^{n} (r/r_1)^k \to 0, \text{ para } m \to \infty \text{ y } |z| \leq r, \end{aligned}$$

de modo que $\{B_n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ es uniformemente de Cauchy y por tanto uniformemente convergente en $\mathbb{D}(0, r)$. Como además sabemos que $B_n f(z)$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$, y f es entera, podemos utilizar el principio de identidad para garantizar que el límite uniforme de $B_n f(z)$ es f en todo el disco $\mathbb{D}(0, r)$.□

LEMA 7 *Si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente sobre compactos de un abierto y conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ a cierta función f, entonces f es analítica en Ω y la sucesión $\{f_n^{(v)}\}_{n=0}^{\infty}$ converge uniformemente sobre compactos de Ω a $f^{(v)}$, para todo $v \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Se trata de una consecuencia conocida de la fórmula integral de Cauchy (ver [44, p. 201]).

TEOREMA 8 *$\mathbb{Z}[x]$ es denso en $\mathbf{C}^{(s)}[a, b]$ para $0 < a < b < 1$ y $s \geq 0$. Lo mismo sucede para $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$, para todo $m \geq 0$.*

Demostración. Sea $f \in \mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, con $0 < a < b < 1$, $s \geq 0$ y sea $\overline{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ una extensión de f de clase al menos $\mathbf{C}^{(s)}$ tal que $\overline{f}(0), \overline{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Dado $\varepsilon > 0$, sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\max_{0 \leq v \leq s} ||\overline{f}^{(v)}(x) - p^{(v)}(x)||_{[0,1]} \leq \varepsilon/2$ y además $p(0) = \overline{f}(0)$, $p(1) = \overline{f}(1)$ (Esto es siempre posible. De hecho, basta realizar algunas modificaciones mínimas sobre la prueba que aparece en [12, p. 121], del teorema de Walsh).

Teniendo en cuenta que p es una función entera y, por tanto, podemos utilizar el Lema 5, es claro que la sucesión de polinomios de Bernstein $\{B_n(p)\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$. Por otra parte, se tiene que la estimación

$$|B_n p(z) - \widetilde{B_n p}(z)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} |z|^k |1-z|^{n-k} \leq \sum_{k=1}^{n-1} |z|^k \leq \frac{1}{1-|z|},$$

se satisface para los puntos del dominio $\Omega = \{z : |z| < 1 \text{ y } |1-z| < 1\} = \mathbb{D}(0,1) \cap \mathbb{D}(1,1)$, que es un abierto conexo que contiene al intervalo $(0,1)$. Se sigue que $\widetilde{B_n p}$ está uniformemente acotado en compactos de Ω (ya que $|\widetilde{B_n p}(z)| \leq |B_n p(z)| + |\widetilde{B_n p}(z) - B_n p(z)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} ||B_n p||_{\overline{\Omega}} + \max_{z \in K} \frac{1}{1-|z|} = C(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$) y por tanto, existe una sucesión $\{n_k\} \to \infty$ y una función g holomorfa en Ω tales que $\widetilde{B_{n_k} p}(z) - g(z)$ converge a cero uniformemente sobre compactos $K \subset \Omega$. Ahora bien, utilizando que $p(0), p(1) \in \mathbb{Z}$, se tiene que $|B_{n_k} p(z) - \widetilde{B_{n_k} p}(z)| \leq \frac{1}{n_k}$ para todo $z \in [0,1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |\widetilde{B_{n_k} p}(z) - p(z)| &\leq |\widetilde{B_{n_k} p}(z) - B_{n_k} p(z)| + ||B_{n_k} p - p||_{\overline{\Omega}} \\ &\leq ||B_{n_k} p - p||_{\overline{\Omega}} + \frac{1}{n_k} \to 0 \text{ (para } z \in [0,1] \text{ y } k \to \infty). \end{aligned}$$

Si se tiene en cuenta el principio de identidad, concluimos que $g = p$ y por tanto $\widetilde{B_{n_k} p}$ converge uniformemente a p sobre compactos de Ω. Se sigue entonces que

$$|\widetilde{B_{n_k} p}^{(v)}(z) - p^{(v)}(z)| \to 0$$

uniformemente sobre compactos de Ω, para cada $v \geq 0$. Por tanto, para k suficientemente grande, podemos asegurar que

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq v \leq s} ||\widetilde{B_{n_k} p}^{(v)}(z) - f^{(v)}(z)||_{[a,b]} &\leq \max_{0 \leq v \leq s} ||\widetilde{B_{n_k} p}^{(v)}(z) - p^{(v)}(z)||_{[a,b]} \\ &\quad + \max_{0 \leq v \leq s} ||p^{(v)}(z) - f^{(v)}(z)||_{[a,b]} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo que demuestra la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$.

Para probar el correspondiente resultado para $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}\setminus\{0,1,...,m\})$, bastará demostrar que es posible aproximar en $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$ con elementos de $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}\setminus\{0,1,...,m\})$ a las potencias que hemos eliminado, x^h $(0\leq h\leq m)$. Ahora bien,

$$p_{n,m}(x)'=\sum_{k=0}^{m}(ka_k(n)x^{k-1}(1-x)^n-na_k(n)x^k(1-x)^{n-1})$$

converge uniformemente a cero sobre $[a,b]$, ya que $ka_k(n)=\mathbf{O}(n^{k+1})$, $na_k(n)=\mathbf{O}(n^{k+1})$, y $\max_{x\in[a,b]}|1-x|=1-a<1$. Es claro que el mismo tipo de argumento se puede utilizar para cada una de las derivadas $p_{n,m}^{(v)}(x)$, $1\leq v\leq s$. Por tanto, $\max_{1\leq t\leq s}\left|\left|p_{n,m}(x)^{(t)}\right|\right|_{[a,b]}$ converge a cero para $n\to\infty$. Utilizando la regla de derivación de Leibnitz, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\max_{x\in[a,b]}\left|(x^h(p_{n,m}(x)-1))^{(v)}\right|\\
=&\max_{x\in[a,b]}\left|\left(x^h\right)^{(v)}(p_{n,m}(x)-1)+\sum_{t=1}^{v}\binom{v}{t}p_{n,m}(x)^{(t)}\left(x^h\right)^{(v-t)}\right|\\
\leq& h(h-1)...(h-v+1)\max_{x\in[a,b]}x^{h-v}\left|p_{n,m}(x)-1\right|\\
&+\sum_{t=1}^{v}\binom{v}{t}h(h-1)\cdots(h-v+t+1)\max_{x\in[a,b]}x^{h-v+t}\left|p_{n,m}(x)^{(t)}\right|\\
\leq& h(h-1)...(h-v+1)|\,|p_{n,m}(x)-1|\,|_{[a,b]}\\
&+\sum_{t=1}^{v}\binom{v}{t}h(h-1)\cdots(h-v+t+1)\max_{1\leq t\leq s}\left\|p_{n,m}(x)^{(t)}\right\|_{[a,b]},
\end{aligned}$$

que converge a cero para $n\to\infty$ independientemente de $v\in\{0,1,...,s\}$. Esto demuestra la convergencia de la sucesión de polinomios $\{x^hp_{n,m}(x)\}_{n=0}^{\infty}\subset\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N}\setminus\{0,1,...,m\})$, a x^h en $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, para todo $h\leq m$, $s\geq 0$ y $0<a<b<1$.□

4. Material para ejercicios

En esta sección explicamos algunos resultados sencillos relacionados con los expuestos en las secciones anteriores que, previa modificación de los enunciados, se pueden proponer a los alumnos en forma de ejercicios. Por ejemplo, podemos proponer un ejercicio guiado, en el que se establezca una demostración sencilla de la densidad de $\mathbf{span}\{1,x^{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbf{C}[a,b]$ para intervalos arbitrarios $[a, b]$ (por supuesto la demostración no funcionará en el caso de aproximación con polinomios de ceficientes enteros). Para ello, utilizamos el teorema de aproximación de Stone-Weierstrass, que es la extensión por excelencia del teorema de aproximación de Weierstrass y se explica normalmente en un primer curso de Análisis Numérico o de Análisis Funcional:

Teorema 9 ***(Stone-Weierstrass)*** *Sea* $\mathbf{A}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbf{C}(K)$ *que es, además, cerrado para el producto usual de funciones y tal que* $1 \in \mathbf{A}$. *Si para cada par de puntos distintos* $\alpha, \beta \in K$ *existe una función* $f \in \mathbf{A}$ *tal que* $f(\alpha) \neq f(\beta)$, *entonces* $\mathbf{A}$ *es un subconjunto denso de* $\mathbf{C}(K)$.

Probamos ahora nuestro resultado:

Teorema 10 *Si* $K \subset \mathbb{R}$ *es compacto entonces* $\mathbf{span}\{1, x^{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$ *es denso en* $\mathbf{C}(K)$ *para cada* $m \geq 0$ *y si además* $0 \notin K$, *entonces* $\mathbf{span}\{x^{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$ *es denso en* $\mathbf{C}(K)$ *para cada* $m \geq 0$.

Demostración. Consideremos el espacio vectorial $\mathbf{A} = \mathbf{span}\{1, x^{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$. Es claro que los elementos de $\mathbf{A}$ son de la forma $a + x^m p(x)$ para elecciones arbitrarias de $a \in \mathbb{R}$ y $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Esto implica que $\mathbf{A}$ es cerrado para el producto usual de funciones, ya que

$$(a + x^m p(x))(b + x^m q(x)) = ab + x^m(aq(x) + bp(x) + x^m p(x)q(x))$$

Por otra parte, $x^m, x^{m+1} \in \mathbf{A}$ y, si $\alpha^m = \beta^m$ y $\alpha^{m+1} = \beta^{m+1}$ entonces $\alpha = \beta$. Por tanto, si $\alpha \neq \beta$, entonces bien la función x^m o bien la función x^{m+1} separa los puntos α, β. Esto, unido a que $1 \in \mathbf{A}$, implica que $\mathbf{A}$ es denso en $\mathbf{C}(K)$. Si $0 \notin K$, entonces ponemos $K^* = K \cup \{0\}$ y, para cada $f \in \mathbf{C}(K)$ definimos la extensión natural

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ f(x) & \text{si } x \in K \end{cases}$$

Para cada $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $q(x) = a + x^m p(x) \in \mathbf{A}$ tal que $\left\|\overline{f}(x) - q(x)\right\|_{K^*} < \varepsilon/2$. Se sigue que $|a| = |\overline{f}(0) - q(0)| < \varepsilon/2$ y por tanto,

$$\|f(x) - x^m p(x)\|_K < \|f(x) - q(x)\|_K + |a| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, hemos probado la densidad de $\mathbf{span}\{x^{m+k}\}_{k=0}^{\infty}$ en $\mathbf{C}(K)$. $\square$

La demostración del teorema anterior se puede generalizar de manera sencilla a varias variables, tomando $\mathbf{K}$ un compacto de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbf{A} = \{1+p(x_1, ..., x_N) : \mathbf{ord}(p) \geq m\} \subset \mathbf{C}(\mathbf{K})$, donde $\mathbf{ord}$ denota cualquiera de los posibles órdenes que se pueden definir para polinomios de varias variables. (Téngase en cuenta que hay varias definiciones de grado para polinomios de varias variables y, por tanto, el órden, que es el menor de los grados de los monomios que aparecen efectivamente en la expansión de p, admite también varias caracterizaciones). También es cierto que la misma prueba valdría para demostrar que si la ecuación $x^m - y^m = 0$ no tiene soluciones en $K \times K \setminus \Delta(K)$, donde $\Delta(K) = \{(x,x) : x \in K\}$ denota la diagonal de K, entonces $\Pi(m\mathbb{N})$ es denso en $\mathbf{C}(K)$ (y ahora hemos borrado infinitas potencias).

Una vez se ha demostrado el Teorema 9, podemos probar la densidad de $\mathbf{span}(\{x^k\}_{k=0}^s \cup \{x^{m+k}\}_{k=0}^\infty)$ en $\mathbf{C}^{(s)}(K)$ (y si además $0 \notin K$, la densidad de $\mathbf{span}\{x^{m+k}\}_{k=0}^\infty$ en $\mathbf{C}^{(s)}(K)$) para cada $s, m \geq 0$. La idea de la prueba es, en este caso, sencilla: dada una función $f \in \mathbf{C}^{(s)}(K)$, aproximamos a $f^{(s)} \in \mathbf{C}(K)$ con una sucesión de polinomios $p_n(x) \in \mathbf{span}\{1, x^{m-\min\{s,m\}+k}\}_{k=0}^\infty$ y definimos:

$$p_{0,n}(x) = p_n(x);\ p_{k,n}(x) = \int_0^x p_{k-1,n}(s)ds;\ k = 1, 2, ..., s.$$

Si $0 \in K$, la sucesión de polinomios

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + p_{s,n}(x),\ n = 1, 2, ...$$

satisface, obviamente, $P_n(x) \in \mathbf{span}(\{1, x, x^2, ..., x^s\} \cup \{x^{m+k}\}_{k=0}^\infty)$, y

$$\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k\leq s} \left\| f^{(k)}(x) - P_n^{(k)}(x) \right\|_K = 0.$$

Si $0 \notin K$ entonces extendemos f como función de clase $\mathbf{C}^{(s)}$ a una función $\overline{f}$ definida sobre el intervalo $[\min K, \max K]$ y tal que $\overline{f}^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \leq s$.

Un ejercicio mucho más sencillo podría consistir en la formalización de la prueba del siguiente resultado:

TEOREMA 11 *$\mathbb{Z}[x]$ es denso en $L^p(0,1)$ para todo $p \geq 1$. Lo mismo sucede para $\Pi^{\mathbb{Z}}(\mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., m\})$, para todo $m \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tener en cuenta que $\mathbf{C}_0[0,1]$ es denso en $L^p(0,1)$ y utilizar el Teorema 3. □

Un poco más difícil (pero no mucho) será la demostración del siguiente teorema.

TEOREMA 12 *$\mathbb{Z}[x,y]$ es denso en $\mathbf{C}([a,b] \times [c,d])$, si $0 < a < b < 1$ y $0 < c < d < 1$.*

Demostración. Los polinomios

$$B_{n,m}g(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m} g(\frac{k}{n},\frac{s}{m})\binom{n}{k}\binom{m}{s}x^k(1-x)^{n-k}y^s(1-y)^{m-s}$$

son una generalización adecuada de los polinomios de Bernstein, en el sentido de que si $g \in \mathbf{C}([0,1]\times[0,1])$, entonces (ver [15])

$$\lim_{\min\{n,m\}\to\infty} ||g(x,y) - B_{n,m}g(x,y)||_{[0,1]\times[0,1]} = 0.$$

Se sigue que, si $g \in \mathbf{C}([0,1]\times[0,1])$ es una extensión contínua de la función $f \in \mathbf{C}([a,b]\times[c,d])$ tal que $g(\{0,1\}\times[0,1]\cup[0,1]\times\{0,1\}) \subset \mathbb{Z}$ (obsérvese que esto es siempre posible), entonces los polinomios

$$\widetilde{B_{n,m}}g(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left[g(\frac{k}{n},\frac{s}{m})\binom{n}{k}\binom{m}{s}\right]x^k(1-x)^{n-k}y^s(1-y)^{m-s}$$

satisfacen

$$\left|B_{n,m}g(x,y) - \widetilde{B_{n,m}}g(x,y)\right| \leq \frac{1}{nm}$$

para todo $n,m \geq 1$ y, por tanto, sirven para la aproximación uniforme de g en $[0,1]\times[0,1]$. $\square$

Una observación que posiblemente llamará la atención de los estudiantes, es la que se deduce de la siguiente proposición, que relaciona la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ con la no ortogonalidad de ciertos sistemas de polinomios.

Proposición 13 *Sea* $\mathbf{H}$ *un espacio de Hilbert real (complejo, resp.), sea* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *(*$\Delta \subset \mathbb{C}$*, resp.) tal que* 0 *no es punto de acumulación de* Δ*, y sea* $\{\varphi_i\}_{i=0}^n \subset \mathbf{H}$ *tal que*

$$\mathcal{L}^{\Delta}(\{\varphi_i\}_{i=0}^n) := \{\sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i : n \geq 0, \ y \ a_i \in \Delta\cup\{0\} \ \textit{para todo } i\}$$

es un subconjunto denso de $\mathbf{H}$*. Entonces* $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ *no es un sistema ortogonal en* $\mathbf{H}$*.*

Demostración. Supongamos que $\{\varphi_i\}_{i=0}^n$ es un sistema ortogonal en $\mathbf{H}$, y sea $\delta = d(0,\Delta) := \inf\{|a| : a \in \Delta\}$. Sea $0 < \alpha < \delta/2$. Entonces $\inf_{a\in\Delta\cup\{0\}}|\alpha - a| = |\alpha|$ y, por tanto, si $p = \sum_{i=0}^n a_i\varphi_i \in \mathcal{L}^{\Delta}(\{\varphi_i\}_{i=0}^n)$, se tiene que

$$||\alpha\varphi_0 - p||_{\mathbf{H}}^2 =\geq |\alpha|^2||\varphi_0||_{\mathbf{H}}^2 + \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2||\varphi_i||_{\mathbf{H}}^2 \geq |\alpha|^2||\varphi_0||_{\mathbf{H}}^2 > 0,$$

lo que implica que $\mathcal{L}^{\Delta}(\{\varphi_i\}_{i=0}^n)$ no puede ser denso en $\mathbf{H}$. $\square$

COROLARIO 14 *Supongamos que* $\mathbb{Z}[x]$ *(*$\mathbb{Z}[\mathbf{i}][x]$*, resp.) es denso en un espacio de Hilbert real (complejo, resp.)* $\mathbf{H}$*, y* $\{\varphi_i\}_{i=0}^{\infty}$ *es un sistema generador para* $\mathbb{Z}[x]$ *(*$\mathbb{Z}[\mathbf{i}][x]$ *resp.) como* $\mathbb{Z}$*-módulo (*$\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$*-módulo, resp.). Entonces* $\{\varphi_i\}_{i=0}^{n}$ *no es un sistema ortogonal en* $\mathbf{H}$*.*

Otro resultado en la misma línea es la siguiente:

PROPOSICIÓN 15 *La función* f *pertenece a la clausura de* $\mathbb{Z}[\mathbf{i}][z]$ *en el espacio de Bergman*

$$\mathbf{L}^2(\mathbb{D}(0,r)) = \{f \ \textit{analítica en}\ \mathbb{D}(0,r) : \ \iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)|^2 dxdy < \infty\}$$

si y sólo si los coeficientes del desarrollo de Taylor de f *son enteros Gaussianos.*

DEMOSTRACIÓN. Las potencias $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ forman un sistema ortogonal de funciones en $\mathbf{L}^2(\mathbb{D}(0,r))$ (ver [25]). Se sigue que si $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es el desarrollo de Taylor de $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{D}(0,r))$ y $\delta = \min_{\alpha\in\mathbb{Z}[\mathbf{i}]} |a_{k_0} - \alpha| > 0$ para cierto $k_0 \in \mathbb{N}$, entonces para todo $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \in \mathbb{Z}[\mathbf{i}][z]$, se satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned} & ||f-p||^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{D}(0,r))} = \iint_{\mathbb{D}(0,r)} |f(z)-p(z)|^2 dxdy \\ = & \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_k|^2 \iint_{\mathbb{D}(0,r)} |z|^{2k} dxdy + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \iint_{\mathbb{D}(0,r)} |z|^{2k} dxdy \\ = & \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_k|^2 \frac{r^{2(k+1)}}{k+1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|^2 \frac{r^{2(k+1)}}{k+1} \geq \delta^2 \frac{r^{2(k_0+1)}}{k_0+1} > 0. \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

5. MATERIAL AVANZADO

En las secciones anteriores hemos descrito algunos resultados sobre aproximación con polinomios de coeficientes enteros en intervalos $[a,b]$ con $0 \leq a < b \leq 1$. Se trata, como es natural, del caso más sencillo de estudiar (piénsese que algunas de nuestras pruebas ni siquiera son válidas para aproximación uniforme en intervalos $[a,b]$, con $n < a < b < n+1$ para valores $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, ya que hemos utilizado muy fuertemente que $\max\{|x|, |1-x|\} < 1$ para $x \in [a,b]$).

El punto de partida para nuestra restricción sobre la elección de los intervalos, fue que los polinomios de coeficientes enteros dejan $\mathbb{Z}$ invariante. Sin embargo, $p(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ no es la única restricción que impide la aproximación uniforme a funciones arbitrarias en compactos que contengan enteros. Por ejemplo, si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n \in \mathbb{Z}[x]$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(p(-1)+p(1)) &= \frac{1}{2}(a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n + (a_0 + a_1 + \cdots a_n)) \\
&= \frac{1}{2}(a_0+a_0) + \frac{1}{2}(a_1 - a_1) + \cdots + \frac{1}{2}(a_n + (-1)^n a_n) \\
&= a_0 + a_2 + ... + a_{2[n/2]} \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

y lo mismo sucede con $\frac{1}{2}(p(-1) - p(1))$ y, por tanto, si f se puede aproximar uniformemente sobre $[-1, 1]$ por polinomios de coeficientes enteros, entonces no sólo debe satisfacer $f(0)$, $f(1)$, $f(-1) \in \mathbb{Z}$ sino que, además,

$$\frac{1}{2}(f(-1)+f(1)),\ \frac{1}{2}(f(-1)-f(1)) \in \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, si quisieramos aproximar a f uniformemente en el intervalo $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, deberíamos tener en cuenta que los polinomios $p \in \mathbb{Z}[x]$ satisfacen la relación

$$p(\sqrt{2}) + p(-\sqrt{2}) - 2p(0) = \sum_{k=1}^{[n/2]} a_{2k}2^{k-1} \in \mathbb{Z}.$$

Fijado un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ¿cuántas relaciones como las anteriores debe satisfacer f para ser aproximable uniformemente por polinomios de coeficientes enteros en $[a, b]$? ¿Pueden ser infinitas? ¿Existe alguna caracterización de la clausura de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbb{C}[a, b]$? La respuesta a estas (y otras) preguntas podría ser utilizada, desde nuestro punto de vista, como material para una parte de un curso de doctorado sobre aproximación con restricciones. En esta sección vamos a comentar la solución de algunos de estos problemas.

Comenzamos con un resultado de apariencia inocente:

Teorema 16 ***(ver [41])**. Si $b - a \geq 4$, entonces todo polinomio $p \in \mathbb{Z}[x]$ satisface $||p||_{[a,b]} \geq 2$.*

Demostración. Como es bien conocido, los polinomios mónicos de Tchebychev, $T_n^*(x) := \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$ poseen norma uniforme en $[-1, 1]$ mínima entre todos los polinomios mónicos de grado $\leq n$ (ver [15]),

$$||T_n^*(x)||_{[-1,1]} = E(x^n, \Pi_{n-1})_{[-1,1]} := \min_{p\in\Pi_{n-1}} ||x - p(x)||_{[-1,1]} = 2^{1-n}.$$

Si en vez de trabajar en el intervalo $[-1, 1]$, estamos interesados en la norma uniforme sobre un intervalo $[a, b]$, entonces, realizando el cambio de variable natural, $t = (2x-b-a)/(b-a)$ (que transforma el intervalo $[a, b]$ en el intervalo

$[-1,1]$, y respeta el grado de los polinomios), se tiene que el polinomio mónico de norma mínima en $[a,b]$, está dado por

$$T_n^*(x)_{[a,b]} := \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} T_n((2x-b-a)/(b-a))$$

y, por tanto,

$$E(x^n, \Pi_{n-1})_{[a,b]} := ||T_n^*(x)_{[a,b]}||_{[a,b]} = \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}} \geq 2 \text{ (si } b-a \geq 4).$$

Supongamos ahora que $p(x) = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ satisface $||p||_{[a,b]} < 2$. Entonces

$$2 > ||p(x)||_{[a,b]} \geq E(a_n x^n, \Pi_{n-1})_{[a,b]} = |a_n| E(x^n, \Pi_{n-1})_{[a,b]} \geq 2|a_n| \geq 2,$$

lo que no puede ser. □

Supongamos que hemos fijado un cierto espacio normado $\mathbf{X}$ con $\mathbb{Z}[x] \subset \mathbf{X}$. El problema de la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{X}$ está íntimamente relacionado con la existencia de polinomios $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ tales que la norma $||p_n||_{\mathbf{X}}$ es suficientemente pequeña. Para verlo, basta tener en cuenta que si $f \in \mathbf{X}$ y $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{Z}[x]$ es una sucesión que converge a f en norma, entonces $\lim_{m,n\to\infty} ||p_n - p_m|| = 0$, y $p_n - p_m \in \mathbb{Z}[x]$ para todo n, m. Si $||p||_{\mathbf{X}} > \varepsilon$ para todo $p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ y cierto $\varepsilon > 0$ entonces tendríamos que $p_n = p_m = f$ para n, m suficientemente grandes y, por tanto, tendríamos que $f \in \mathbb{Z}[x]$. Fijada la norma $\|\ \|_{\mathbf{X}}$ de $\mathbf{X}$, los polinomios $p(x)$ de coeficientes enteros y norma $\|p\|_{\mathbf{X}} < 1$ se llaman polinomios fundamentales respecto de $\|\ \|_{\mathbf{X}}$. En todos los casos clásicos, la existencia de polinomios de coeficientes enteros y norma suficientemente pequeña se reduce a la existencia de polinomios fundamentales respecto de esa norma (e.g., tal es el caso para las normas L_p, $1 \leq p \leq \infty$).

El primer resultado que conocemos sobre existencia de polinomios de coeficientes enteros de norma pequeña en intervalos de longitud mayor que uno, se debe a Hilbert, que demostró en 1894 el correspondiente resultado para $\mathbf{L}^2(a,b)$ siempre que $b-a < 4$ (ver [31]). En 1914, Kakeya [33] demostró que si $0 < b < 2$, entonces existe un polinomio $p(x)$ mónico de coeficientes enteros tal que $|p(x)| < 1$, para todo $x \in [-b,b]$ y, en 1923 el mismo resultado fue probado por Fekete (ver [17]) para intervalos arbitrarios $[a,b]$, con $b-a < 4$. Una demostración del mismo resultado se puede encontrar también en el artículo de Hewitt y Zuckerman [30]. En varios artículos (ver [3], [4], [6]), Aparicio extendió el método de Fekete para obtener estimaciones de las normas de los polinomios de coeficientes enteros de mínima desviación L_2 y uniforme a cero en varias variables, sobre paralelepípedos en el espacio euclídeo. Por su parte, Luquin [37] y Luquin y Besga [38] han obtenido las estimaciones correspondientes para el caso de aproximación L_p.

Supongamos que $b-a < 4$. Se sigue que, dado $p(x)$ un polinomio fundamental (que podemos suponer mónico, sin pérdida de generalidad) respecto de la norma $\| \ \|_{[a,b]}$, tomando las potencias $[p(x)]^{2k}$ para k suficientemente grande, se obtienen polinomios mónicos de coeficientes enteros, positivos y de norma arbitrariamente pequeña, en $[a, b]$. Definimos

$$\mathcal{U}(a, b) = \{p \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} : 0 \leq p(x) < 1 \text{ para todo } x \in [a, b]\}.$$

Si $k \in \mathbb{Z} \cap [a, b]$ y $p \in \mathcal{U}(a, b)$ entonces es claro que $p(k) = 0$ (pues $p(k) \in \mathbb{Z}$ y $|p(k)| < 1$). Esto significa que, si $1 < b - a < 4$ entonces $\mathcal{U}(a, b)$ es no vacío y, el conjunto

$$\mathcal{J}(a, b) = \{\alpha \in [a, b] : p(\alpha) = 0 \text{ para todo } p \in \mathcal{U}(a, b)\},$$

es un conjunto finito no vacío de enteros algebraicos. Es más, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 17 *Si f pertenece a la clausura de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[a, b]$, entonces existe al menos un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(\alpha) = p(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}(a, b)$.*

Demostración. Si $||f - p_n||_{[a,b]} \to 0$, entonces $||p_n - p_m||_{[a,b]} < 1$ para n, m suficientemente grandes y, por tanto, $(p_n - p_m)(\alpha) = 0$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}(a, b)$, lo que nos lleva a la identidad $f(\alpha) = p_n(\alpha)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha \in \mathcal{J}(a, b)$. □

En el importante artículo [30], Hewitt y Zuckerman demostraron que la condición de interpolación descrita en el teorema anterior es de hecho suficiente para que una función f sea uniformemente aproximable por polinomios de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[a, b]$. A continuación reproducimos el correspondiente teorema y la idea de su demostración:

Teorema 18 *Supongamos que existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x]$ tal que $f(\alpha) = p(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{J}(a, b)$. Entonces f pertenece a la clausura de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[a, b]$.*

Demostración (esbozo). Sea $Q \in \mathcal{U}(a, b)$, y sea $\Delta = Q\mathbf{C}[a, b]$ el ideal generado por Q en $\mathbf{C}[a, b]$. Se puede probar que la clausura uniforme de Δ consiste en el conjunto de funciones que se anulan sobre cierto cerrado $A \subset [a, b]$. De hecho, no es difícil ver que $A = \mathcal{J}(a, b)$. Se sigue que, si f se anula en $\mathcal{J}(a, b)$, entonces existe una función $g \in \mathbf{C}[a, b]$ tal que $||f - gQ||_{[a,b]} < \varepsilon/2$. Utilizando ahora el teorema de aproximación de Weierstrass, podemos cambiar la función g por cierto polinomio $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$. Ahora bien, se sigue, de la densidad de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}_0[0, 1]$, que para toda elección de $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ y $c \in (0, 1)$, existen polinomios $q \in \mathbb{Z}[x]$ tales que $||\lambda x - q(x)||_{[0,c]} < \varepsilon$ y, por tanto, tomando $c = \max\{Q(x) : x \in [a, b]\}$, se tiene que existen polinomios $Q_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ tales que

$$||a_i x - Q_i(x)||_{[0,c]} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)\max\{|a|^n, |b|^n, 1\}}, \; i = 0, 1, ..., n.$$

Si ahora cambiamos la variable x por el polinomio $Q(x)$ (con $x \in [a,b]$) y multiplicamos por x^i, entonces las desigualdades anteriores se transforman en

$$||a_i x^i Q(x) - x^i q_i(x)||_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)},\ q_i(x) = Q_i(Q(x)),\ i = 0, 1, ..., n,$$

de modo que

$$||p(x)Q(x) - \sum_{i=0}^{n} x^i q_i(x)||_{[a,b]} = ||\sum_{i=0}^{n} a_i x^i Q(x) - \sum_{i=0}^{n} x^i q_i(x)||_{[a,b]} \leq \varepsilon/2$$

y, por tanto, $\sum_{i=0}^{n} x^i q_i(x) \in \mathbb{Z}[x]$ y

$$||f - \sum_{i=0}^{n} x^i q_i(x)||_{[a,b]} \leq ||f - p(x)Q(x)||_{[a,b]} + ||p(x)Q(x) - \sum_{i=0}^{n} x^i q_i(x)||_{[a,b]} \leq \varepsilon,$$

que es lo que buscábamos. □

Nos gustaría observar que, si realizamos una demostración directa de que las funciones de la forma λx se pueden aproximar uniformemente por polinomios de coeficientes enteros en compactos de $[0,1)$ (algo que, en realidad no es excesivamente difícil y, de hecho, podría proponerse como ejercicio), la anterior prueba pasa a ser una generalización de la prueba de Kantorovich que explicamos al principio de este artículo y, además, no utiliza los polinomios de Bernstein. Este tipo de resultados se han llevado al contexto de aproximación en compactos del plano complejo con polinomios de coeficientes en subanillos de $\mathbb{C}$ discretos de rango dos (ver [18], [21], y [22]). Si $\mathbf{A}$ es uno de tales anillos y $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, diremos que $f \in \mathbf{C}(K)$ es $\mathbf{A}$-aproximable si pertenece a la clausura de $\mathbf{A}[z]$ en $\mathbf{C}(K)$. Los sustitutos naturales de los conjuntos $\mathcal{U}(a,b)$ y $\mathcal{J}(a,b)$, están dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{\mathbf{A}}(K) &= \{p \in \mathbf{A}[z] \setminus \{0\} : ||p||_K < 1\}, \text{ y} \\ \mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K) &= \{\alpha \in K : p(\alpha) = 0 \text{ para todo } p \in \mathcal{U}_{\mathbf{A}}(K)\}. \end{aligned}$$

Ahora, para que $\mathcal{U}_{\mathbf{A}}(K)$ sea no vacío, necesitamos que el diámetro transfinito de K,

$$d(K) := \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{C}} ||z^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k||_K \Big)^{1/n}$$

sea menor que uno (i.e., $d(K) < 1$ substituye a la desigualdad $b - a < 4$. Es más, de la demostración del Teorema 16, se concluye que $d([a,b]) = (b-a)/4$). Se pueden probar los siguientes resultados:

Teorema 19 *Supongamos que* $d(K) \geq 1$. *Entonces* $f \in \mathbf{C}(K)$ *es* $\mathbf{A}$*-aproximable si y sólo si* $f \in \mathbf{A}[z]$.

Teorema 20 ***(Ferguson (ver [21])).*** *Supongamos que* $K \subset \mathbb{C}$ *es un compacto de* $\mathbb{C}$ *con interior vacío, complementario conexo y* $d(K) < 1$. *Entonces* $\mathcal{U}_{\mathbf{A}}(K)$ *es no vacío y* $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K)$ *es vacío o finito. Además,* $f \in \mathbf{C}(K)$ *es* $\mathbf{A}$*-aproximable si y sólo si existe un polinomio* $p \in \mathbf{A}[z]$ *tal que* $f(\alpha) = p(\alpha)$ *para todo* $\alpha \in \mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K)$. *Es más, podemos tomar* $p = L(f, \mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K))$, *el polinomio de interpolación de Lagrange de* f *en* $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K) = \{\alpha_0, ..., \alpha_N\}$.

El teorema que acabamos de enunciar no es en absoluto una generalización trivial del Teorema 18 (téngase en cuenta el uso que hemos realizado en la prueba del Teorema 18 de que $0 \leq q(x) < 1$ para todo $x \in [a, b]$ y $q \in \mathcal{U}(a, b)$, algo impensable en $\mathbb{C}$, donde no hay un orden compatible con la estructura de cuerpo). Además, la demostración que aparece en [21] incluye un aspecto nada trivial (pero muy importante), como es la caracterización de los elementos de $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K)$. En realidad, gran parte del trabajo realizado para el estudio de la densidad de los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ ($\mathbf{A}[z]$, resp.) en $\mathbf{C}[a, b]$ ($\mathbf{C}(K)$, resp.), consiste en la caracterización de los conjuntos $\mathcal{J}(a, b)$ ($\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K)$, resp.) y, si es posible, en su cálculo explícito. En el caso real, la caracterización de $\mathcal{J}(a, b)$ se debe a Hewitt y Zuckerman (ver [30]), y queda reflejada en el siguiente resultado:

Teorema 21 *Supongamos que* $0 < b - a < 4$, *y sea* $\mathcal{J}^*(a, b)$ *la unión de los conjuntos de raíces de todos los polinomios mónicos* $q \in \mathbb{Z}[x]$ *tales que todas sus raíces son reales y pertenecen a* $[a, b]$. *Entonces* $\mathcal{J}(a, b) = \mathcal{J}^*(a, b)$.

Es más, en [30, pg. 317] se puede encontrar una descripción completa de $\mathcal{J}(a, b)$, si $-2 \leq a < b \leq 2$.

Teorema 22 ***(Hewitt-Zuckerman)*** *Supongamos que* $-2 \leq a < b \leq 2$. *Entonces* $\mathcal{J}^*(a, b)$ *queda determinado por los valores de la forma* $2\cos\frac{2\pi j}{k}$, *tales que* $0 < j < k/2$ *y*

$$\begin{aligned}
a &\leq 2\cos\frac{2\pi(k-1)}{k} \text{ y } 2\cos\frac{2\pi}{k} \leq b, \text{ si } k \text{ es impar,} \\
a &\leq 2\cos\frac{2\pi(k-2)}{k} \text{ y } 2\cos\frac{2\pi}{k} \leq b, \text{ si } k = \dot{4}, \text{ o} \\
a &\leq 2\cos\frac{2\pi(k-4)}{k} \text{ y } 2\cos\frac{2\pi}{k} \leq b, \text{ si } k - 2 = \dot{4}.
\end{aligned}$$

Para establecer la caracterización de $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K)$, es necesario antes hacer algunas observaciones de caracter algebraico. Si $\mathbf{A}$ es un subanillo discreto de rango dos de $\mathbb{C}$, entonces existe un único cuerpo cuadrático imaginario $L = \mathbb{Q}(\theta)$ (i.e, tal que $\theta^2 + \alpha\theta + \beta = 0$ para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ con $\alpha^2 - 4\beta < 0$), tal que $\mathbf{A}$

es un subanillo del anillo $\mathbf{I}_L$ de enteros algebraicos de L. Con esta notación a mano, dado K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$, definimos $\mathcal{J}^*_{\mathbf{A}}(K)$ como la unión de todos los conjuntos completos de conjugados de enteros algebraicos sobre $\mathbf{I}_L$, que están contenidos en K. En [21], Ferguson demuestra el siguiente resultado:

TEOREMA 23 *Con la notación que se acaba de introducir, supongamos además que* $K \subset \mathbb{C}$ *es un compacto de* $\mathbb{C}$ *con interior vacío, complementario conexo y* $d(K) < 1$. *Entonces* $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}(K) = \mathcal{J}^*_{\mathbf{A}}(K)$.

Otro aspecto no trivial de la teoría, es el cálculo de los diámetros transfinitos $d(K)$. En esta dirección, se pueden consultar los trabajos de Fekete (ver [19]).

6. Algunos comentarios históricos

En esta sección, comentaremos algunos aspectos sobre la historia personal de los creadores de los resultados anteriores.

S. N. Bernstein es, sin duda, el teórico de aproximación más importante de este siglo. Aún así, realizó importantes contribuciones a la teoría de ecuaciones diferenciales y al cálculo de probabilidades. De manera más concreta, defendió su tesis doctoral en la Sorbona en 1905, donde resolvió el problema 19 de Hilbert (sobre soluciones analíticas de ED elípticas). Al volver a su país tuvo que volver a realizar un programa de doctorado completo para conseguir trabajo, ya que en Rusia no se aceptaban los títulos extranjeros. Su segunda tesis se ocupa del problema 20 de Hilbert (sobre soluciones analíticas de ED no elípticas). Algunas de sus contribuciones en teoría de probabilidades son: un intento de axiomatizar el cálculo de probabilidades, la generalización de las condiciones de Lyapunov para un teorema central del límite, y algunas generalizaciones de la ley de los grandes números. También se ocupó del estudio de procesos de Markov y procesos estocásticos y obtuvo aplicaciones en genética. (ver [32])

Fekete realizó importantes contribuciones en teoría de interpolación, donde introdujo un procedimiento para el cálculo de conjuntos de nodos uniformemente distribuidos sobre un compacto genérico K y, por tanto, con excelentes propiedades de convergencia de la correspondiente sucesión de operadores de interpolación (ver [25]).

Kantorovich, aunque de sobra conocido por sus aportaciones en teoría de aproximación, se hizo famoso (en un sentido mucho más general del término) en 1975, al recibir el premio Nobel por sus contribuciones en Economía. De hecho, fue uno de los creadores de la programación lineal, y obtuvo numerosos resultados en optimización y, aunque dedicó mucho esfuerzo en las aplicaciones, también posee resultados de caracter esencialmente abstractos, llegando a trabajar en espacios vectoriales topológicos ordenados. En lo que respecta a la teoría de aproximación, demostró un enorme interés por el uso de los polinomios de Bernstein.

Hewitt dirigió la tesis doctoral de L. B. O. Ferguson, que luego se tradujo en la publicación de los artículos [21] y [22]. L. B. O. Ferguson trabaja actualmente en la Universidad de California, en Riverside.

M. von Golitscheck es uno de los teóricos de la aproximación más influyentes que viven en Alemania. Su libro (con Lorentz y Makovoz), [34], contiene un capítulo completo sobre aproximación con restricciones, dos de cuyas secciones se dedican a la aproximación con polinomios de coeficientes enteros (ver [34, pp. 49-63]). Actualmente trabaja en la universidad de Würzburg.

Terminamos estos breves apuntes con algunos comentarios sobre E. Aparicio: Aunque español de nacimiento, realizó gran parte de su investigación en ruso (y en Rusia). Existe, además, una poderosa razón: en junio de 1937 fue embarcado con destino Leningrado junto con otros 1.500 niños vizcaínos, huyendo de la guerra civil y, no pudo reencontrarse con su familia hasta 1964. Aún así, su regreso definitivo a España se produce en 1971, al ser contratado por la Universidad del País Vasco (UPV) como profesor agregado (interino). Estudió Matemáticas en la Universidad Estatal de Lomonósov, y fue alumno de tesis de A. O. Gelfond. Hizo carrera académica en la UPV, donde llegó a ocupar una cátedra en teoría de números y, posteriormente, fue profesor emérito. Fallece en septiembre de 1998 (para más detalles, ver [13]).

7. Algunos problemas abiertos

Existen aún numerosos problemas abiertos. En esta sección planteamos algunos de ellos:

P1. El teorema de Müntz, ¿se mantiene para toda posible elección de exponentes $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$, sin imponer que los exponentes sean números naturales, o la restricción $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, $i = 0, ...$? (un teorema de este tipo fue probado, en el caso de polinomios de coeficientes reales, por Borwein y Erdelyi en 1996 [9]).

En esta dirección existe un resultado debido a Golitschek, que demostró en 1976 (ver [28]), que si $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ es una sucesión de números complejos (distintos dos a dos) tal que $\inf_{i\geq 0} |\lambda_i| > 0$, $\inf_{i\geq 0} \frac{\Re\lambda_i}{|\lambda_i|} > 0$, y $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_i|} < \infty$, entonces $\Pi^{\mathbb{Z}}(\Lambda)$ es denso en $\mathbf{C}_{00}[0,1] := \{f \in \mathbf{C}[0,1] : f(0) = f(1) = 0\}$.

P2. Para $[a,b]$ un intervalo arbitrario, denotemos por $\mathbb{Z}[a,b]$ la clausura uniforme de $\mathbb{Z}[x]$ en $\mathbf{C}[a,b]$. Podemos entonces preguntarnos si son equivalentes (como sucede para $[a,b] = [0,1]$) las afirmaciones:

(1) $\Pi^{\mathbb{Z}}(\Gamma)$ es denso en $\mathbb{Z}[a,b]$.

(2) $\Pi(\Gamma)$ es denso en $\mathbf{C}[a,b]$.

para $\Gamma \subset \mathbb{N}$ arbitrario.

P3. Denotemos por $\mathbb{Z}([a,b]\times[c,d])$ la clausura uniforme de $\mathbb{Z}[x,y]$ en $\mathbf{C}([a,b]\times[c,d])$. En [30] se caracteriza $\mathbb{Z}([a,b]\times[c,d])$ para intervalos $[a,b]\times[c,d]$ arbitrarios. Si la respuesta a **P2** es afirmativa, entonces cabría preguntarse por la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(1) El $\mathbb{Z}$-módulo generado por $\{1\}\cup\{x^iy^j : (i,j)\in S\}$ es denso en $\mathbb{Z}([a,b]\times[c,d])$

(2) El espacio vectorial real generado por $\{1\}\cup\{x^iy^j : (i,j)\in S\}$ es denso en $\mathbf{C}([a,b]\times[c,d])$,

para $S\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ arbitrario. En particular, ¿sucede esto si $[a,b]=[c,d]=[0,1]$?

P4. El teorema de Müntz, ¿admite una generalización completa para alguno de los espacios $\mathbf{C}^{(s)}[a,b]$, $0\le a<b\le 1$, $1\le s<\infty$?

Nos gustaría creer que los resultados expuestos aquí son lo bastante interesantes como para que alguno de los lectores se motive por el estudio de este apasionante tema.

8. Agradecimientos

Varias personas han colaborado con sus propias ideas para la redacción de este artículo. Concretamente, la demostración del Teorema 9 se debe a W. H. Schikhof (comunicación informal), y, pensamos, es nueva. Le agradecemos, pues, que haya permitido su publicación en este artículo. La idea para la primera demostración del Teorema 2, fue sugerencia de D. Leviatan. T. Erdelyi fue la persona que nos puso sobre la pista de la existencia de un teorema de Müntz para aproximación con polinomios de coeficientes enteros, refiriéndonos al artículo [20]. M. v. Golitschek leyó una primera versión del artículo, nos proporcionó parte de la bibliografía, y nos ha permitido publicar la foto que aparece en el artículo. También deseamos expresar a A. Romero nuestro agradecimiento por el tiempo que ha dedicado a leer éste y otros artículos, y por sus críticas, que son siempre bien recibidas, y al referee, que realizó importantes sugerencias.

Referencias

[1] N. I. Akhieser, *Academician S. N. Bernstein and his research in the constructive theory of functions,* Kharkov (1955).

[2] J. M. Almira, N. Del Toro, *A survey on Müntz type problems,* Aparecerá en los Procceedings del I Encuentro Internacional de Teoría de Aproximación de la Universidad de Jaén (Úbeda, Junio 2000).

[3] E. Aparicio Bernardo, On some properties of polynomials with integer coefficients, and on approximation of functions in the mean by polynomials with integer coefficients, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **19** (1955) 303–318 [En ruso].

[4] E. Aparicio Bernardo, Generalización de un teorema de M. Fekete a polinomios con coeficientes enteros en varias variables, *Rev. Mat. Hisp. Amer,* **36** (1976) 105–124.

[5] E. Aparicio Bernardo, Generalization of the theorem of L. G. Schnirelman, *J. Analyse Math.* **48** (1987) 217–224.

[6] E. Aparicio Bernardo, On the asymptotic structure of the polynomials of minimal Diophantic deviation from zero, *J. Approx. Theory* **55** (1988) 270–278.

[7] S. N. Bernstein, Proof of a theorem of Weierstrass, based on the theory of probability, *Sochineniya* **1** (1912) 105.

[8] P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities,* Springer (1995).

[9] P. Borwein, T. Erdelyi, The full Müntz Theorem in $\mathbf{C}[0,1]$ and $L_1(0,1)$, *J. London Math. Soc.* **54** (1996) 102–110.

[10] P. Borwein, T. Erdelyi, The integer Chebyshev problem, *Math. Comp.* **65** (1996) 661–681.

[11] E.W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory,* McGraw-Hill (1966).

[12] P. J. Davis, *Approximation and interpolation*, Dover (1975).

[13] J. de la Cal, F. Luquin, Emiliano Aparicio Bernardo (1926–1998), La Gaceta de la RSME **2** (1999) 309–312.

[14] J. de la Cal, F. Luquin, *Use of Bernstein polynomials for approximation of partial derivatives of functions on a triangle,* Progress in Approximation Theory, Academic Press (1991) 661–666.

[15] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive Approximation,* Springer (1993).

[16] R. A. DeVore, *The approximation of continuous functions by positive linear operators*, Lecture Notes in Math, Springer 293 (1972).

[17] M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Z.* **17** (1923) 228–249.

[18] M. Fekete, Approximations par polynomes avec conditions diophantines I et II, *C.R. Acad. Sci. Paris* **239** (1954) pp. 1337–1339, 1455–1457.

[19] M. Fekete, Über den transfiniten Durchmesser ebener Punktmengen I, II, & III, *Math. Z.* **32** (1930) 108–114, **32** (1930) 215–221, **37** (1933) 635–646.

[20] L. B. O. Ferguson, M. v. Golitscheck, Müntz-Szász Theorem with integral coefficients, II, *Trans. Amer. Math. Soc.* **213** (1975) 115–126.

[21] L. B. O. Ferguson, Uniform approximation by polynomials with integral coefficients I, *Pacific J. Math.* **27** (1968) 53–69.

[22] L. B. O. FERGUSON, Uniform approximation by polynomials with integral coefficients II, *Pacific J. Math.* **26** (1968) 273–281.

[23] L. B. O. FERGUSON, *Approximation by polynomials with integral coefficients, Math. Surveys* Amer. Math. Soc., Providence, R.I. **17** (1980).

[24] V. FLAMMANG, Sur le diamètre transfini enteir d'un intervalle à extrémités rationnelles, *Annales de l'institut Fourier* 45 (1995) 779–793.

[25] D. GAIER *Lectures on complex approximation,* Birkhauser (1987).

[26] A. O. GELFOND, *Commentary on the papers on the estimation of the number of primes not exceeding a given value and on prime numbers*, en Collected works of P. L. Chebyshev, I. Akad Nauk SSSR, Moscow/Leningrad (1946) 285–288.

[27] M. v. GOLITSCHECK, The degree of approximation for generalized polynomials with integral coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.* **224** (1976) 417–425.

[28] M. v. GOLITSCHECK, *Approximation durch polynome mit ganzzahligen Koeffizienten,* en Approximation theory (R. Shaback, K. Sherer, eds.) pp. 202–212. Lecture Notes in Mathematics 556, Springer Verlag (1976).

[29] L. HABSIEGER, B. SALVY, On integer Chebychev polynomials, *Math. Comp.* **66** (1997) 763–770.

[30] E. HEWITT, H.S. ZUCKERMAN, Approximation by polynomials with integral coefficients, a reformulation of the Stone-Weierstrass Theorem, *Duke Math. J.* **26** (1959) 305–324.

[31] D. HILBERT, Ein Beitrag zur Theorie des Legendreschen Polynome, *Acta Math.* **18** (1894) 155–159.

[32] `http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/`

[33] S. KAKEYA, On aproximate polynomials, *Tohôku Math. J.* **6** (1914) 182–186.

[34] G. G. LORENTZ, M. v. GOLITSCHECK, Y. MAKOVOZ, *Constructive Approximation: Advanced Problems*, Graduate Texts in MAthematics, Springer (1996).

[35] F. LUQUIN, *Generalizations to n variables of a theorem of A. O. Guelfond,* Proceedings of the eighth Porteguese-Spanish Conference in Mathematics, Vol II (Coimbra, 1981) 169–174.

[36] F. LUQUIN, Some properties of two-dimensional Bernstein polynomials, *J. Approx. Theory* **59** 3 (1989) 300-306.

[37] F. LUQUIN, L_p-deviations from zero of polynomials with integral coefficients, *Acta Arith.* **69** 3 (1995) 217–228.

[38] F. LUQUIN, C. BESGA, Estimation of norms of multivariate polynomials with integral coefficients, *J. Approx. Theory* **96** (1999) 378–398.

[39] H. L. MONTGOMERY, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 84 Amer. Math. Soc. Providence, R.I. v(1994).

[40] M. Nair, On Chebyshev-type inequality for primes, *Amer. Math. Monthly* **89** 2 (1982) 126–129.

[41] Y. Okada, On approximate polynomials with integral coefficients only, *Tohôku Math. J.* **23** (1923) 26–35.

[42] J. Pal, Zwei kleine Bemerkungen, *Tohôku Math. J.* **6** (1914) 42-43.

[43] A. Pinkus, Weierstrass and Approximation Theory, *J. Approx. Theory,* **107** (2000) 1–66.

[44] W. Rudin, *Análisis real y complejo*, Alhambra (1985).

J. M. Almira
N. Del Toro
Departamento de Matemáticas
Universidad de Jaén
E.U.P. Linares
23700 Linares (Jaén)
Correo-electrónico: `jmalmira@ujaen.es`
`ndeltoro@ujaen.es`