
MATEMÁTICAS EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Sección a cargo de

Inmaculada Fuentes Gil

Matemáticas de bachillerato con Scientific Notebook

por

Santiago Peña

Cuando empecé a dar clase, allá por octubre de 1990, los ordenadores eran poco más que un conjunto de promesas. Yo solo los había usado para hacer algún programa sencillo en BASIC.

Con el tiempo han ido haciéndose realidad muchas de esas promesas: aparecen los editores y procesadores de texto, las hojas de cálculo, los programas de dibujo... Y en el contexto de las matemáticas, los editores de ecuaciones, los sistemas de álgebra computacional (CAS), los programas de geometría dinámica (GeoGebra, por ejemplo) y el fabuloso $\text{\LaTeX}$ ¹. Y, por supuesto, internet y el correo electrónico, que han cambiado nuestra vida personal y laboral.

Buscando en internet información sobre *software* de matemáticas encontré una pequeña empresa de Estados Unidos, *MacKichan Software* [5], y un producto, *Scientific Notebook*. En las próximas líneas explicaré cómo ha ido cambiando mi manera de dar clase usando *Scientific Notebook* (en adelante SNB).

En realidad, la idea, que ya rondaba por mi cabeza, tomó forma al visitar la página web de profesor Jonathan Lewin [3], de la Universidad de Kennesaw, que ha dado charlas por todo el mundo y ha escrito varios artículos sobre el uso del ordenador en el aula de matemáticas.

1. BREVE DESCRIPCIÓN DE *Scientific Notebook*

Aunque mi objetivo no es describir cómo se utiliza el programa, sino cómo lo uso para dar clase, es importante darse cuenta de lo sencillo que es manejarlo, pues en esa sencillez radica, en buena parte, la eficacia del método.

¹Aunque $\text{\LaTeX}$ ya se conocía antes de los 90, en España, a nivel de enseñanzas medias, casi no se utilizaba.

1.1. EDICIÓN DE TEXTOS MATEMÁTICOS

Scientific Notebook (SNB) es uno de los programas para trabajar con matemáticas de *MacKichan Software*. Existen otros dos programas parecidos llamados *Scientific Word* y *Scientific Workplace*.

SNB incluye un procesador de texto (con muchas menos opciones que Word, pero suficientes para preparar un documento con un gran acabado) que es a la vez procesador de ecuaciones. El mismo programa procesa el texto y las ecuaciones con lo que no se necesita insertar estas como objetos extraños creados con otro programa.

Podemos acceder a todas las características de edición del programa (y a las de cálculo, que comentaré más adelante) de varias formas:

- Mediante los menús desplegables, donde aparecen todas las opciones ordenadas por categorías.
- Mediante barras de herramientas, que podemos mostrar u ocultar, y cuyos botones podemos personalizar.
- Mediante atajos de teclado, que se escriben manteniendo pulsada la tecla [Ctrl]. A veces estos atajos son solo una letra o un comando entero, que suele coincidir con el nombre del símbolo en L^AT_EX. Por ejemplo [Ctrl f] crea un fracción.
- Mediante los llamados *Frag*s o *Fragments*, pequeñas partes de un documento, que pueden incluir texto y matemáticas, y que se guardan con un nombre. El programa trae cargados varios por defecto, pero podemos crear los nuestros propios. Se activan mediante [Ctrl] y el nombre que les asignemos. Por ejemplo, si voy a escribir muchas veces la expresión «*Aplicamos la regla de L'Hôpital*», puedo guardar esa expresión con el nombre **lh** y cada vez que pulse [Ctrl lh] aparecerá esa frase. O si voy a escribir muchas veces la fórmula

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

puedo guardarla con el nombre **dc** y el comando [Ctrl dc] escribe automáticamente la expresión.

Algunos atajos de teclado utilizados con frecuencia son:

- Las combinaciones [Ctrl t] y [Ctrl m] permiten alternar entre texto y matemáticas *in text* (usando el vocabulario L^AT_EX). Con [Ctrl d] creamos una ecuación en formato *display* (usando de nuevo el vocabulario L^AT_EX), es decir, centrada en el párrafo con una cierta distancia entre la línea anterior y posterior.
- [Ctrl f] crea una fracción, [Ctrl r] crea una raíz, donde el tabulador nos permite alternar entre el radicando y el índice.
- Con [Ctrl] y las flechas del cursor se crean exponentes (↑) y subíndices (↓).
- [Ctrl i] crea un signo de integral, y el tabulador nos permite saltar entre los dos límites de integración.

- [Ctrl sum] crea un sumatorio.

Por ejemplo, la integral

$$\int_1^x \ln t \, dt$$

se escribe mediante la secuencia de comandos que se muestra más abajo (donde las flechas indican las teclas del cursor, [tab] el tabulador y [b] un espacio en blanco):

[Ctrl m] [Ctrl i] [Ctrl ↓] 1 [tab] x [→] ln t [b] dt [Ctrl t]

(después de un nombre de función que el programa tenga identificado, como `ln`, no es necesario dejar un espacio en blanco porque SNB lo añade automáticamente).

Además, a medida que vamos escribiendo la fórmula, esta aparece en pantalla en notación estándar como una plantilla con huecos que se van rellenando según escribimos. También podríamos ir haciendo *clic* con el ratón en esos huecos y rellenarlos uno a uno. Para la integral anterior, lo que veríamos en pantalla a medida que tecleamos es:

[Ctrl m] [Ctrl i] : ∫
 [Ctrl ↓] : ∫_□
 1 : ∫₁
 [tab] : ∫₁[□]
 x [→] : ∫₁^x
 ln t : ∫₁^x ln t
 [b] dt [Ctrl t] : ∫₁^x ln t dt

Con un poco de práctica se alcanza gran velocidad en la escritura. Mis alumnos aprenden a escribir las cosas básicas para matemáticas de bachillerato en 10 o 15 minutos.

1.2. CÁLCULOS DENTRO DEL DOCUMENTO

Scientific Notebook incluye un sistema de álgebra computacional que permite hacer los cálculos dentro del mismo documento y usando la notación matemática estándar. Hasta la versión 3 el sistema incluido era **Maple** [6], en la 4 se incluyeron **Maple** y **MuPAD** [8] y en la 5 queda solamente **MuPAD**. La versión 6, lanzada hace unos meses, sigue incluyendo **MuPAD** como CAS.

Si al terminar de escribir una expresión matemática, antes de pasar a texto con [Ctrl t], pulsamos el botón de evaluar [Ctrl e], el programa nos da el resultado automáticamente, en forma cerrada si esta existe, o en forma numérica si no es el caso: por ejemplo, la secuencia

[Ctrl m] [Ctrl i] e [Ctrl ↑] x [→] [b] cos x [b] dx [Ctrl e]

produce, automáticamente,

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x).$$

SNB entiende prácticamente todas las notaciones estándar de las Matemáticas, y las adapta al contexto. Así, el producto de dos números, polinomios, matrices, etc., puede expresarse de cualquiera de las formas siguientes:

$$ab = (a)(b) = a \times b = a \cdot b,$$

y [Ctrl e] nos dará el resultado correcto, distinguiendo en cada caso si el producto lo es de números, de polinomios, de matrices, etc.

Como hemos mencionado, *Scientific Notebook* no solo permite escribir ecuaciones usando notación estándar. Esas ecuaciones o expresiones pueden ser evaluadas (entendiendo esta palabra en sentido amplio: evaluar, simplificar, factorizar, descomponer, resolver, derivar, integrar, etc.) con el sistema de álgebra computacional MuPAD sin más que pulsar [Ctrl e] o elegir la opción de un menú con una gran cantidad de posibilidades de cálculo. Si sabemos editar la expresión para escribirla en pantalla, no necesitamos conocer el lenguaje de MuPAD, porque SNB interpreta lo que hemos escrito.

Disponemos, pues, de un programa que permite escribir texto y ecuaciones usando formato estándar en pantalla; efectuar cálculos con MuPAD (¡sin conocer ni siquiera su lenguaje!)² con números, polinomios, matrices y determinantes, límites, integrales, derivadas, todo tipo de ecuaciones y sistemas, sumatorios y series, descomposiciones factoriales, construcción de gráficas fijas y animadas, en 2 y 3 dimensiones... Y todo usando expresiones exactas (cuando es posible) o numéricas con tantos decimales como nos permita la potencia de nuestro ordenador.

1.3. EN EL FONDO, TODO ES L^AT_EX

Todo esto es posible porque el programa internamente guarda el documento en formato L^AT_EX³. De hecho, los comandos para introducir muchos de los símbolos son directamente los de L^AT_EX. Uno de los «defectos» de SNB es que no procesa el documento con L^AT_EX, aunque lo usa internamente. Para eso están los otros dos programas: *Scientific Word*, que permite procesar el documento con L^AT_EX, pero no dispone de MuPAD para hacer cálculos, y *Scientific Workplace*, que incluye el procesado con L^AT_EX y el cálculo con MuPAD. En ambos, se pueden introducir comandos L^AT_EX directamente si el programa no los tiene implementados.

1.4. ALGUNOS INCONVENIENTES

Tal vez la mayor pega que podemos encontrar es que es un programa comercial y, como tal, no es barato. Es cierto que tanto para estudiantes como para instituciones educativas hay tarifas especiales (las de estudiantes, realmente asequibles) muy baratas en comparación con otros programas del mercado. En mi caso, solo lo

²Por supuesto, si se conoce MuPAD pueden ampliarse las opciones por defecto de SNB, escribiendo algoritmos o programas en el lenguaje MuPAD que se efectúan dentro de SNB.

³Hace unos meses ha salido al mercado la versión 6, que presenta como ventaja la posibilidad de trabajar en Windows y en el OS de Apple, pero la gran desventaja —desde mi punto de vista— de sustituir el lenguaje L^AT_EX de fondo por HTML, y un acabado peor en pantalla.

utilizo a modo de pizarra electrónica, pero podría plantearse la opción de usar SNB como cuaderno para todos los alumnos, usando licencias individuales (si los alumnos desean conservar su propia copia del programa para el futuro) o una licencia *de campus* para usar en los ordenadores del centro.

Otro inconveniente es que no dispone de una herramienta de dibujo simple. Las capacidades gráficas del programa permiten dibujar gráficas en 2 y 3 dimensiones, en forma cartesiana, polar, implícita o paramétrica, pero no pequeños dibujos *a mano alzada* para ilustrar problemas (por ejemplo, medidas de alturas en trigonometría o esquemas de situaciones de geometría). Por supuesto, estos dibujos pueden incorporarse como imágenes realizadas con otros programas (yo he usado la herramienta de dibujo de Excel en estas situaciones, o un clásico dibujo en la pizarra).

No quiero extenderme más hablando del programa. Pasemos a ver cómo lo uso en el aula.

2. LA CLASE

Hace casi 10 años la dirección del centro me facilitó un aula con ordenador y cañón, donde instalamos la copia del centro de SNB (que hasta entonces solo usaba para preparar mis apuntes y mis clases) con el objetivo de hacer una prueba con un grupo y dar la clase con el programa. Dada la buena aceptación que tuvo la experiencia por parte de los alumnos, fuimos ampliando grupos y actualmente doy todas mis clases (6 grupos de bachillerato) en un aula así preparada (son los alumnos los que van entrando y saliendo cuando tienen clase de matemáticas). El grado de satisfacción de los alumnos con el método sigue siendo muy alto, independientemente de los resultados obtenidos en las calificaciones. Incluso alumnos con resultados bajos en matemáticas aseguran que esta forma de trabajar les ayuda a seguir la clase y a entender mejor las cosas.

A nivel de enseñanza media, no me parece apropiado usar presentaciones para las clases de matemáticas. El alumno se aburre y desconecta muy pronto. Por otra parte, una clase de ESO o bachillerato necesita más flexibilidad, pues en cualquier momento hay que repasar cosas que no esperábamos o surge un tema interesante del que debemos hablar. Con *Scientific Notebook* voy escribiendo la clase en directo, a medida que doy las explicaciones, como lo haría con tiza y pizarra. El programa permite cambiar colores y tamaños de letras para resaltar ciertos aspectos, hacer los cálculos y deducciones paso a paso (si así lo veo oportuno) u obtener un resultado directamente si no quiero descentrar la atención del alumno en el desarrollo de un razonamiento. Al principio resulta un poco extraño ir hablando mientras se escribe en el ordenador, pero, cuando se entra en la dinámica de la clase, acaba resultando tan natural como hablar mientras se escribe en la pizarra. Por supuesto, procuro levantarme tras cada párrafo, para dar explicaciones de palabra, resolver dudas de los alumnos o hacer que participen en el desarrollo de la clase. ¡De ninguna manera se debería permanecer sentado escribiendo durante toda la hora!

Una situación a modo de ejemplo. Si en medio de un problema de geometría del espacio necesito calcular un producto vectorial, puedo:

- Calcularlo directamente con el programa escribiendo $(1, 2, 3) \times (3, 0, -1)$ [Ctrl e] y obteniendo el resultado, para seguir el razonamiento del problema.
- Plantear hasta el determinante y obtener, con el ordenador,

$$(1, 2, 3) \times (3, 0, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [\text{Ctrl e}],$$

y continuar con el resultado obtenido.

- Escribir, uno a uno, todos los pasos para resolver el determinante como lo haría en una pizarra con la tiza.

Yo elijo lo que sea más apropiado en cada momento.

Al preparar la clase, puedo crear un documento con las secciones, encabezados, enunciados, ejemplos, etc., e ir rellenándolo a medida que avanza la explicación, ir cargando partes de otros documentos con el comando **Import Contents**, crear enlaces de hipertexto a otros documentos o páginas web, etc. O, por supuesto, comenzar con un documento en blanco y tener al lado mis notas sobre lo que quiero explicar (no uso libro).

Por tanto, la clase se desarrolla igual que se haría con pizarra y tiza, con esa misma flexibilidad, pero sin polvo, con un acabado mucho más ordenado y atractivo, y con opciones de cálculo y gráficas que superan largamente las que podríamos tener con una calculadora. Y con posibilidad de volver a lo escrito media hora antes, o varios días antes. Aquello de «*nunca hemos hecho nada parecido a la pregunta 2 del examen*» puede rebatirse yendo a la clase del día y buscando el momento donde la «pregunta 2» se explicó.

Siempre dejo algún rato en clase para hacer ejercicios, individualmente o en grupo, y luego saco a los alumnos a la pizarra a resolverlos (lo mismo que con los ejercicios propuestos para hacer en casa). Algunos alumnos prefieren usar la pizarra, pero la mayoría quieren resolver el ejercicio con el ordenador. Una breve charla de entre 10 y 15 minutos explicando los comandos básicos hace que la gran mayoría de los alumnos pueda escribir su solución usando SNB: eso sí, para ellos todas las posibilidades de cálculo están prohibidas; solo pueden usar el ordenador para escribir su solución. No quiero (por el momento) que aprendan a manejar el programa para calcular —aunque son inevitables las preguntas de los alumnos más interesados sobre cómo se consigue tal o cual resultado—, sino que lo hagan a mano o con su calculadora, y que escriban en su cuaderno lo que hacen, como se ha hecho *toda la vida*. Pero se van introduciendo en otra forma de escribir y hacer matemáticas: mediante el ordenador.

Al terminar la clase, guardo el documento que hemos elaborado y lo subo a la web de la asignatura, donde quedan registradas, una a una, las clases del curso.

3. LA WEB DE LA ASIGNATURA

Cada día, al terminar la clase, guardo los documentos creados o modificados en ella, y los subo a la web de la asignatura. La página la he creado y la modifico día

a día con SNB, exportando a formato HTML (esto es una cuestión de comodidad, pues con un poco de HTML se podrían conseguir acabados más elegantes, pero con el mismo contenido). Los documentos los paso a PDF para que sean accesibles desde cualquier plataforma (SNB no convierte directamente a PDF, pero utilizo una impresora virtual para la conversión). Así los alumnos pueden releer el documento de clase si tienen dudas. Si alguno de los estudiantes está enfermo o ausente puede seguir la clase a través de la web, resolviendo dudas vía correo electrónico (he tenido alumnos ingresados durante varias semanas para hacer pruebas en el hospital, y han podido seguir, cuando su salud y ánimo se lo permitían, el desarrollo de la clase).

Debe quedar muy claro que estas clases subidas a la web no pretenden sustituir a un libro de texto o a unos apuntes más acabados. Son las explicaciones de clase puestas por escrito. Se han creado con preguntas y participación de los alumnos, con explicaciones del profesor que pueden no haberse plasmado por escrito. Por eso, no pretenden sustituir a otros medios de estudio, solo dejar constancia de lo que se ha tratado en clase, como consulta cuando los alumnos lean sus apuntes y puedan querer completar alguna cosa.

Un peligro, que se sigue de lo comentado en el párrafo anterior, es que los alumnos dejen de prestar atención en clase pensando que luego tendrán disponibles los apuntes. Debe insistirse mucho en que tomen sus propios apuntes, con sus comentarios personales, tal como lo harían cuando la clase se imparte con tiza y pizarra. En alguna ocasión (situaciones puntuales con algún grupo concreto) he tenido que dejar de subir los apuntes para corregir esta tendencia cuando se ha hecho mayoritaria. Aunque procuro escribir mucho en los apuntes, faltan las explicaciones de palabra, los comentarios, las preguntas de los compañeros, que dan vida y sentido al documento, y que, una vez más, **no pretende en ningún caso sustituir a un libro de texto o a unos apuntes más elaborados.**

ASIGNATURA PENDIENTE. Los alumnos de segundo curso con la materia de matemáticas de primero pendiente tienen a su disposición toda la web del curso anterior, donde se encuentran los apuntes, las hojas de ejercicios utilizadas y los exámenes realizados, resueltos. Esto resulta especialmente útil para los alumnos que vienen de otros centros a cursar segundo. Disponen de todo el material de la asignatura desde el primer día de clase.

4. ALGUNOS EJEMPLOS

En esta sección describo algunos ejemplos que surgen en el día a día. Me gustaría insistir una vez más en que la verdadera ventaja está en que puedo hacer los cálculos directamente, sobre la marcha, siempre que lo considere oportuno. Sugiero al lector que teclee en un documento de texto las secuencias que iré exponiendo para ver la sencillez con la que se obtienen tanto las fórmulas escritas en notación habitual como los resultados.

4.1. EN CLASE DE GEOMETRÍA

Los problemas de geometría del espacio suelen incluir dos componentes: el razonamiento geométrico y los cálculos algebraicos. El razonamiento a veces puede ser largo y constar de varias etapas. Pararse a hacer todos los cálculos puede descentrar al alumno de la línea de razonamiento principal. *Scientific Notebook* me permite desarrollar paso a paso los cálculos si lo veo oportuno o escribir el resultado directamente.

Por supuesto, puedo llevar todos estos cálculos preparados en un papel (incluso para eso SNB me da más rapidez y eficacia), pero puede que un alumno nos pregunte un ejercicio que no teníamos pensado plantear. Ahí es donde se ve claramente la diferencia. Planteo alguno de los cálculos que pueden aparecer.

UN PRODUCTO VECTORIAL. Si necesito el producto vectorial de los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 0, 1)$, puedo obtenerlo escribiendo

$$(1, 2, 3) \times (4, 0, 2) \text{ [Ctrl e]}$$

($\times$ se obtiene con [Ctrl times], que yo he personalizado a [Ctrl po]) lo que produce, automáticamente,

$$(1, 2, 3) \times (4, 0, 2) = 4 \quad 10 \quad -8.$$

Pulsando [Ctrl 9] se añade el paréntesis al resultado:

$$(1, 2, 3) \times (4, 0, 2) = (4 \quad 10 \quad -8).$$

SNB expresa los vectores con notación matricial (quiero decir, separándolos con espacios en blanco en lugar de comas). Si escribo los datos con ese formato, el resultado añade automáticamente el paréntesis. Suelo explicar a los alumnos que la forma habitual es separar con comas los elementos del vector, pero que el ordenador lo hace con espacios en blanco. Yo he creado un comando, [Ctrl 3v], que crea un vector con tres coordenadas, ($\square \square \square$) (los cuadraditos, llamados *input boxes*, aparecen para ayudarme a ver los huecos que hay en la expresión, y desaparecen a medida que escribimos). Así, escribiendo

[Ctrl 3v] 1 [tab] 2 [tab] 3 [$\rightarrow$] [Ctrl po]
[Ctrl 3v] 4 [tab] 0 [tab] 2 [tab] 0 [Ctrl e]

obtendremos automáticamente, en pantalla,

$$(1 \quad 2 \quad 3) \times (4 \quad 0 \quad 2) = (4 \quad 10 \quad -8).$$

PUNTO DE INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO. Queremos buscar el punto de corte de la recta y el plano que se muestran a continuación:

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \end{array} \right\}; \quad \pi: 2x - 3y - z - 7 = 0.$$

Creamos un sistema de ecuaciones y pedimos al programa que lo resuelva. Yo he definido un comando `[Ctrl set]` que escribe unas llaves vacías que podemos ir rellenando (podríamos elegir las llaves en un botón de la barra de herramientas). Las letras griegas se introducen con `[Ctrl g]` y la letra latina correspondiente. Cada vez que apretamos `[enter]` se crea una nueva línea en el sistema.

La secuencia de teclas que pulsamos para crear el sistema formado por la recta y el plano

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 5 - \lambda \\ 2x - 3y - z - 7 = 0 \end{array} \right\}$$

(obsérvese que no es necesario un signo de multiplicación entre un número y una letra) es

```
[Ctrl set]
x = 1 - 2 [Ctrl g] 1 [enter]
y = 3 + [Ctrl g] 1 [enter]
z = 5 - [Ctrl g] 1 [enter]
2 x - 3 y - z - 7 = 0
```

y a continuación pulsamos el botón *resolver sistema* de la barra de comandos. SNB nos da, automáticamente,

$$\text{Solution is: } \left[x = \frac{22}{3}, y = -\frac{1}{6}, z = \frac{49}{6}, \lambda = -\frac{19}{6} \right].$$

4.2. EN CLASE DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

DERIVADAS. Los ejercicios de análisis de funciones requieren realizar varias derivadas, a veces muy largas. Un alumno nos plantea que ha estado haciendo un ejercicio de un libro donde debe estudiar la convexidad de la función $y = \frac{e^x}{x-1}$ y nos pide que revisemos si sus derivadas y cálculos están correctamente realizados. En un minuto podemos darle la respuesta.

Empezamos escribiendo la derivada segunda. Los comandos `[Ctrl f]` y `[Ctrl 9]` crean, respectivamente, una fracción y unos paréntesis. Con ellos se teclea de forma inmediata la expresión

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{e^x}{x-1} \right),$$

que aparece así escrita en pantalla, y pulsando `[Ctrl e]` se tiene la derivada segunda, que se ve en pantalla tal como se muestra a continuación:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{e^x}{x-1} \right) = \frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5).$$

Los puntos de inflexión se obtienen igualando a cero la derivada segunda. Copio y pego la expresión y la igualo a cero tecleando `=0`, esto es,

$$\frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5) = 0;$$

y pulsando el botón de resolución de ecuaciones tengo en pantalla, literalmente,

$$\frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5) = 0, \text{ Solution is: } 2 - i, 2 + i$$

con lo que no tenemos puntos de inflexión reales. Si antes de la resolución escribimos `assume(x,real)` [Ctrl e], trabajaremos solo con valores reales, y la respuesta será

$$\frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5) = 0, \text{ No solution found.}$$

Las regiones de concavidad y convexidad son inmediatas resolviendo inecuaciones. Copio y pego la expresión de la derivada segunda y escribo >0:

$$\frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5) > 0;$$

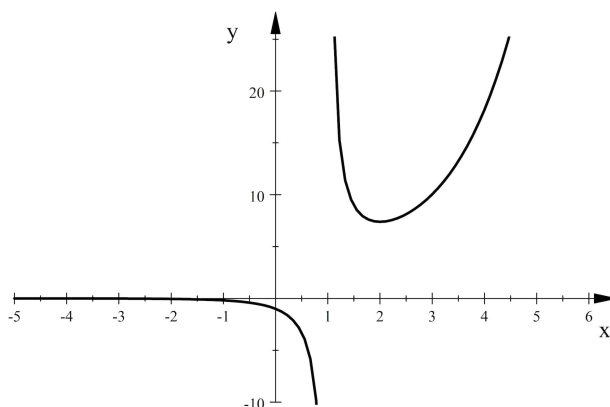
pulsando de nuevo el botón de resolver ecuación (es el mismo para ecuaciones, inecuaciones y sistemas) obtengo

$$\frac{e^x}{(x-1)^3} (x^2 - 4x + 5) > 0, \text{ Solution is: } (1, \infty).$$

Por último, queremos dar al alumno la gráfica de la función para que vea su forma. Copio y pego la expresión de la función

$$y = \frac{e^x}{x-1}$$

y hago *clic* en el botón *representar gráfica*, obteniendo de forma inmediata la de la función, donde luego puedo, con un clic, cambiar escalas, colores, grosor de la curva, etc.



INTEGRALES. En una hoja de ejercicios quiero esbozar la solución de una integral. Supongamos que quiero desarrollar los pasos para resolver

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

El primer paso es hacer la división. Copio la fracción y selecciono la opción `Compute > Polynomials > Divide`, que me da, automáticamente,

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} = 3x - 1 - \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1}.$$

Añado los símbolos de integral (`[Ctrl i]`) y las diferenciales y tengo

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx = \int (3x - 1) dx - \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Ahora hago la descomposición en fracciones simples de la segunda integral: copio la fracción y elijo la opción `Compute > Polynomials > Partial fractions`, y tengo

$$\frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2}{x - 1} + \frac{3}{(x - 1)^2};$$

añado de nuevo integrales y diferenciales para conseguir la expresión

$$\int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx = \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx,$$

que copiando y pegando el resto de la integral muestra el resultado:

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx = \int (3x - 1) dx - \int \frac{2}{x - 1} dx - \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx.$$

En una nueva línea añado un $=$, copio la parte derecha de la ecuación y voy seleccionando con el ratón cada una de las integrales y apretando el botón de evaluar (o el comando `[Ctrl e]`), para tener

$$= \frac{3}{2}x^2 - x - 2 \ln(x - 1) + \frac{3}{x - 1},$$

que termino añadiendo $+C$ y los valores absolutos del logaritmo (un *doble clic* en el paréntesis):

$$= \frac{3}{2}x^2 - x - 2 \ln|x - 1| + \frac{3}{x - 1} + C.$$

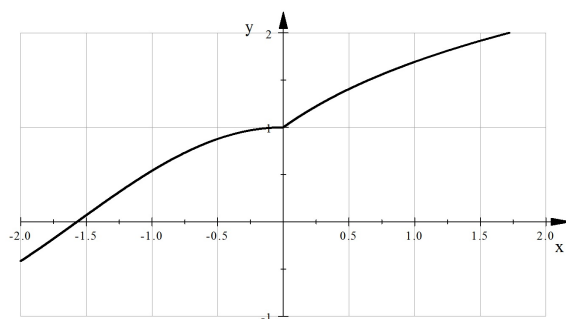
En un par de minutos la secuencia que quedaría escrita es

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - 7x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2x + 1} dx &= \int (3x - 1) dx - \int \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1} dx \\ &= \int (3x - 1) dx - \int \frac{2}{x - 1} dx - \int \frac{3}{(x - 1)^2} dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - x - 2 \ln|x - 1| + \frac{3}{x - 1} + C. \end{aligned}$$

REPRESENTACIÓN DE UNA GRÁFICA A TROZOS. Quiero ilustrar el ejemplo de una función definida a trozos que sea continua pero no derivable en el punto de transición. Defino la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0, \\ 1 + \ln(x+1) & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Una vez escrita la función, con el cursor situado en cualquier punto de la definición, pulso el botón de *representar gráfica* o elijo en el menú **Compute > Plot2D > Rectangular** para tener la gráfica:



4.3. OTROS EJEMPLOS

PROGRAMACIÓN LINEAL. Suponemos ahora que hemos planteado un problema de programación lineal para el que debemos resolver

$$\begin{aligned} \text{Max.} \quad & 2x + 3y \\ \text{S. a.:} \quad & x + y \leq 2, \\ & x - y \geq 1, \\ & x \geq 0, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Como siempre, la escritura se hace en una matriz usando **[Ctrl t]** para escribir texto y **[Ctrl m]** para matemáticas.

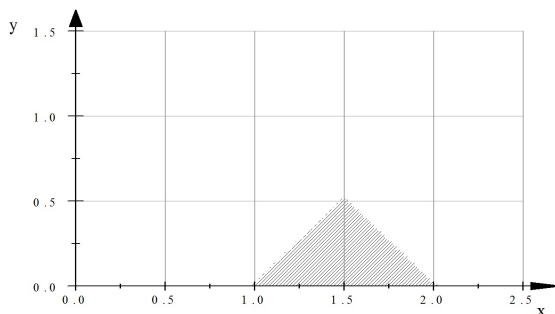
- Si quiero dar de forma automática la solución (por ejemplo, porque es una hoja de ejercicios donde quiero incluirla sin escribir el proceso), selecciono la columna derecha de la matriz y elijo, en el menú, **Compute > Simplex > Maximize**. Al lado del planteamiento aparece la solución

$$\text{Maximum is at: } \left\{ x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} \right\},$$

donde corrijo el texto y escribo

$$\text{El máximo es: } \left\{ x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} \right\}.$$

- Si deseo dar un dibujo de la región factible, selecciono la columna derecha de la matriz sin incluir la primera línea (la función objetivo) y elijo, en el menú, **Compute > Plot2D > Inequality**. Obtengo una gráfica de la región factible. Con un *doble clic* entro en el menú de la gráfica donde puedo ajustar escalas, colores, etc. La imagen siguiente muestra exactamente la obtenida con SNB:



5. OTRAS FORMAS DE UTILIZAR SNB

Concluyo citando otros posibles usos de SNB para la clase.

5.1. DOCUMENTOS INTERACTIVOS

Se puede usar SNB como navegador web. Se puede crear todo un conjunto de páginas web escritas con SNB y usar el programa como navegador. Para la versión 5 existe una versión gratuita del programa, llamada *Scientific Viewer* que permite navegar, abrir e imprimir documentos SNB, pero no permite guardar cambios ni crear documentos nuevos, y que podría facilitarse a los alumnos como navegador⁴. Podría ser una alternativa a una web HTML, con la ventaja de no tener que exportar las ecuaciones como imágenes o como MathML.

Este conjunto de páginas enlazadas bien podría ser un libro de texto electrónico. El profesor Lewin [3] ha desarrollado varios libros de texto interactivos usando SNB. En ellos incluye hasta enlaces a vídeos que él mismo ha creado usando SNB y algún programa que pueda grabar la pantalla del ordenador mientras escribe y da las explicaciones oportunas. Se puede ver este trabajo en la página *Jonathan Lewin's Math Movies* [4].

Desde la página de *MacKichan Software* se puede acceder a un libro de cálculo interactivo escrito por varios autores para ser leído de forma interactiva con SNB 5.5 (ver [1]).

Hace años, la Universidad de Texas en Austin desarrolló un proyecto parecido, llamado WEBMATH: utilizando SNB se puso a disposición de los alumnos todo un texto interactivo que desarrollaba el programa de algunas asignaturas de matemáticas.

⁴Los documentos de la versión 6, que usa como lenguaje de fondo HTML, se pueden ver con cualquier navegador.

5.2. HOJAS DE EJERCICIOS Y EXÁMENES

En la web, aparte de documentos del curso (programas, métodos de evaluación, etc.) y clases diarias, también suelo dejar hojas de ejercicios. Aunque no lo utilizo a menudo, SNB cuenta con un generador de exámenes que permite crear ejercicios algorítmicamente. Por ejemplo, podría pedirle que generara tres números enteros aleatorios a, b, c entre -4 y 4 , y que realice el producto $P = (x - a)(x - b)(x - c)$, planteando como pregunta del examen «*Resuelve la ecuación polinómica $P = 0$ y factoriza el polinomio P* ». Cada vez que genere una hoja nueva puedo pedir que recalcule el ejercicio, obteniendo ejemplos distintos. También se pueden seleccionar los ejercicios de un banco de preguntas, generar tests que se corrijan automáticamente *on line*, incluir pistas o soluciones completas, etc.

5.3. GRABACIÓN DE VÍDEOS

Con un programa que capture la pantalla del ordenador y el sonido podrían grabarse vídeos de matemáticas usando SNB para ir escribiendo en pantalla las fórmulas y explicaciones. Como he citado más arriba, el profesor Lewin ya lo usa en sus libros interactivos ([3]).

He grabado un primer vídeo sobre eliminación gaussiana usando el *software* gratuito llamado *CamStudio* (versión 2.7). Con algunos errores técnicos, se puede ver el resultado en [7].

Hay todo un mundo de posibilidades disponibles, que pretendo ir investigando con el tiempo.

6. A MODO DE RESUMEN

Para mí, SNB es una herramienta imprescindible en mi trabajo diario en el aula: para crear documentos, impartir clase, guardar lo explicado en la web. Tiene las ventajas de dar mucha más libertad a la explicación, porque puedo escribir las cosas paso a paso o haciendo cálculos automáticos que ayuden a no perder el hilo principal, porque es posible manejar ejemplos analíticos y gráficos que serían impensables con una tiza y una calculadora, porque me permite la flexibilidad suficiente para cambiar el rumbo de la clase si es necesario, añadiendo o quitando apartados, etc.

Como principales problemas podemos contar con el precio, si queremos que los alumnos dispongan de su propia copia (aunque las licencias para alumnos son baratas) y, sobre todo, el hecho de que dejen de prestar atención por disponer al final de la clase escrita.

Con el tiempo, si los alumnos no tuvieran que enfrentarse al final del bachillerato a pruebas EBAU o finales de etapa, donde van a seguir trabajando con lápiz y papel, se podría usar SNB como cuaderno de trabajo, utilizando toda una web de recursos creados con SNB.

El artículo trata de ser una foto a vista de pájaro de este método de dar clase, que tal vez pueda detallarse más en otra ocasión. Y si he conseguido despertar alguna curiosidad, habrá cumplido su objetivo.

Para más información sobre SNB se puede consultar la web del fabricante [5], donde se pueden descargar los manuales en PDF con las opciones matemáticas del programa. Es especialmente interesante el manual [2].

REFERENCIAS

- [1] D. W. HARDY, F. RICHMAN, C. L. WALKER Y R. WISNER, *Calculus: Understanding Its Concepts and Methods*, MacKichan Software, 2006.
- [2] D. W. HARDY Y C. L. WALKER, *Doing Mathematics with Scientific Workplace and Scientific Notebook Version 5.5*, MacKichan Software, 2005. <ftp://ftp.mackichan.com/download/version55/doingmath-55.pdf>
- [3] J. LEWIN, página web: <http://math.kennesaw.edu/~jlewin/>
- [4] J. LEWIN, *Math Movies*: <http://www.math-movies.com>
- [5] MACKICHAN SOFTWARE, página web de de la empresa: <http://www.mackichan.com>
- [6] MAPLESOFT, fabricante de Maple, página web: <http://www.maplesoft.com>
- [7] S. PEÑA, Vídeo sobre eliminación gaussiana, <https://youtu.be/U3AImZzicEY>
- [8] SCIFACE, fabricante del programa MuPAD, página web: <http://www.sciface.com>

SANTIAGO PEÑA, COLEGIO SAFA-GRIAL, VALLADOLID
Correo electrónico: santiago.grial@gmail.com