Educación

Sección a cargo de

María José González

Michèle Artigue, profesora emérita de la Universidad Paris Diderot (Paris 7), tiene una trayectoria investigadora mundialmente reconocida en el campo de la Didáctica de la Matemática. Durante el periodo 2010–13, formó parte del Comité Científico del Proyecto Fibonacci (`http://www.fibonacci-project.eu`*). El artículo que se incluye a continuación, en su versión en inglés, forma parte del informe «Inquiry in Mathematics Education» [2] perteneciente a dicho proyecto. Agradecemos al Coordinador de la Sección de Matemáticas y Educación Matemática del Proyecto Fibonacci, el profesor Peter Baptist (Universidad de Bayreuth, Alemania), y a la propia autora, la profesora Michèle Artigue, su autorización para traducirlo al español y para publicarlo en* La Gaceta de la RSME. *Se puede encontrar una versión más extensa de este trabajo en el artículo [4] de Artigue y Blomøj.*

¿Qué es la educación matemática basada en la indagación?

por

Michèle Artigue

1. Introducción

Al contrario de lo que ocurre en la educación en ciencias, el término «educación matemática basada en la indagación» (IBME, del inglés *Inquiry Based Mathematics Education*) es de uso reciente en educación matemática. Sin embargo, en este ámbito encontramos varios intentos de promover prácticas de enseñanza con los mismos propósitos que las asociadas a la «enseñanza de las ciencias basada en la indagación» (IBSE, *Inquiry Based Science Education*). De hecho, a lo largo de los últimos cincuenta años, uno de los principales objetivos de la innovación y la investigación en el campo de la educación matemática ha sido promover el aprendizaje con comprensión, ayudar a los estudiantes a experimentar una auténtica actividad matemática desde la infancia y determinar las condiciones para que esto sea posible. En consecuencia, es necesario contemplar la educación matemática basada en la indagación en relación con estos antecedentes, e investigar cómo los recursos científicos que proporciona pueden ser utilizados para desarrollar y fortalecer este tipo de educación.

El informe *Inquiry in Science Education* [18] señala que «la indagación es un término usado, tanto en la educación como en la vida cotidiana, para referirse a la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas», y que «lo que distingue la indagación en ciencias es que conduce al conocimiento y a la comprensión de lo que ocurre a nuestro alrededor». El texto también propone un modelo de aprendizaje de las ciencias a través de la indagación, que se resume en el esquema que se reproduce a continuación (figura 1) y se describe como «el proceso de construcción de la comprensión a través de la recopilación de evidencias para probar posibles explicaciones e ideas de forma científica» (p. 9).

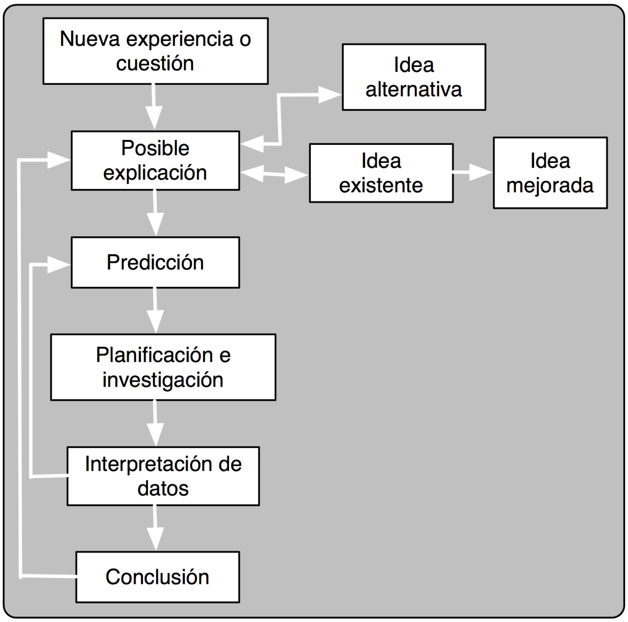


Figura 1: Modelo de aprendizaje de la ciencia a través de la indagación.

Tal como señala el informe *Learning Through Inquiry* ([3]), la indagación matemática presenta similitudes evidentes con la indagación en ciencias. Al igual que la indagación en ciencias, la indagación matemática parte de una pregunta o un problema, y las respuestas se buscan a través de la observación y la exploración; se realizan experimentos mentales, materiales o virtuales; se buscan conexiones con preguntas ya respondidas y que tienen analogías relevantes para la pregunta que se está investigando; se ponen en juego técnicas matemáticas conocidas y se adaptan cuando es necesario. Este proceso de indagación está dirigido por, o conduce a, respuestas hipotéticas, a conjeturas que requieren una validación. Éste no suele ser un proceso lineal. A menudo, las conjeturas iniciales sólo son ciertas en condiciones específicas, lo que puede conducir a su revisión, o incluso a cuestionar la definición de los objetos matemáticos implicados (según ilustra Lakatos [23] en su estudio paradigmático sobre la fórmula de Euler para los poliedros). Además, el proceso puede conducir a nuevas preguntas y problemas cuya solución puede afectar a las respuestas a la pregunta inicial, o incluso a la formulación de la pregunta en sí.

Sin embargo, a pesar de la existencia de similitudes con la indagación en ciencias, la indagación matemática tiene algunas especificidades, tanto en cuanto al tipo de preguntas que aborda como a los procesos en que se apoya para responderlas.

2. Indagación matemática: preguntas internas y externas

Al igual que en la indagación en ciencias, la indagación matemática viene frecuentemente motivada por cuestiones que surgen del mundo natural o del entorno que nos rodea. Pero, si bien uno de los principales propósitos de la matemática es contribuir a la comprensión del mundo natural, social y cultural, y facultar a los seres humanos a actuar en este mundo, no debe olvidarse que la matemática como ciencia también crea sus propios objetos, y que las preguntas planteadas por estos objetos han sido siempre un motor esencial de su desarrollo. Como se destacó en el informe *Learning Through Inquiry* ([3]):

> «A medida que se vuelven familiares, los objetos matemáticos también llegan a conformar un terreno para la experimentación matemática. Los números, por ejemplo, se han utilizado durante siglos y siguen siendo un contexto magnífico para los experimentos matemáticos, y lo mismo se puede decir de las formas geométricas. Los patrones desempeñan un gran papel en las matemáticas, tanto si provienen del mundo natural como si son imaginados por la mente del matemático. Las tecnologías digitales también ofrecen herramientas nuevas y poderosas para apoyar la investigación y la experimentación en el ámbito de las matemáticas. Por consiguiente, la educación matemática basada en la indagación no sólo debe basarse en situaciones y cuestiones derivadas de fenómenos del mundo real, aunque la consideración de éstos es, por supuesto, muy importante, sino que ha de utilizar la diversidad de contextos que nutren las prácticas de investigación en matemáticas».

Así, las fuentes de la indagación matemática y las preguntas asociadas pueden ser muy diversas. Pueden surgir de:

- Fenómenos naturales (por ejemplo, ¿cómo comprender y caracterizar los cambios en la sombra de un objeto iluminado por el sol?).
- Problemas técnicos (por ejemplo, ¿cómo medir magnitudes y objetos inaccesibles?).
- Artefactos humanos (por ejemplo, ¿cuál es el efecto de un pantógrafo sobre las figuras geométricas y por qué?, ¿cómo funciona un GPS?).

- Arte (por ejemplo, ¿cuáles son las simetrías de un objeto arquitectónico o una pieza artística?, ¿cuáles son los elementos mínimos que se pueden utilizar para generar un mosaico periódico?).
- Problemas de la vida diaria (por ejemplo, ¿cómo elegir entre diferentes ofertas de telefonía móvil e Internet?).

Los objetos matemáticos también pueden ser una fuente esencial de indagación matemática desde las primeras edades:

- ¿Cuál es el producto máximo que se puede obtener descomponiendo un número entero positivo en una suma de enteros positivos y multiplicando los términos de la suma?
- ¿Se puede escribir cualquier entero positivo como diferencia de dos cuadrados de números enteros?, ¿y como suma de enteros positivos consecutivos?
- ¿Qué significa que dos triángulos, dos rectángulos, dos polígonos tengan la misma forma?
- Dados dos triángulos con la misma área, ¿se puede transformar uno en el otro cortando y pegando? ¿Se puede extender esta propiedad a cualquier par de polígonos?
- Si dos triángulos tienen el mismo perímetro y la misma área, ¿son necesariamente congruentes?

La naturaleza de la pregunta, obviamente, tiene consecuencias en el proceso de indagación. En el caso de las preguntas que provienen de una fuente externa, como en los primeros ejemplos mencionados, su transformación en preguntas de carácter matemático es una parte importante del proceso de indagación, que involucra un proceso de modelización. En las últimas décadas, la investigación en educación matemática ha prestado cada vez más atención a estos procesos, como demuestran, por ejemplo, las actividades del grupo internacional ICTMA o la extensa literatura dedicada a este tema[1].

Esta literatura suele presentar la modelización como un proceso cíclico, lo que crea cierta similitud, al menos a nivel estructural, con el modelo de IBSE que hemos mostrado en la figura 1. La figura 2, junto con la descripción de las fases que se indican en ella, tomadas de [6, p. 127], presenta una visión clásica de este ciclo de modelización:

a) *Formulación de una tarea (más o menos explícita) que está relacionada con una realidad percibida y que está influenciada por los intereses del investigador. En esta etapa, se construye el objeto del proceso de modelización. El objeto puede ser luego reconstruido como resultado del proceso de modelización. Sin embargo, es el objeto y la tarea formulada lo que guía la identificación y construcción de un dominio de indagación.*

b) *Selección y construcción de los objetos relevantes, relaciones, etc., del dominio de indagación, y transformación de éstos para hacer posible una representación matemática.*

[1] Ver las actividades del grupo internacional ICTMA (`http://www.ictma.net`) o [22].

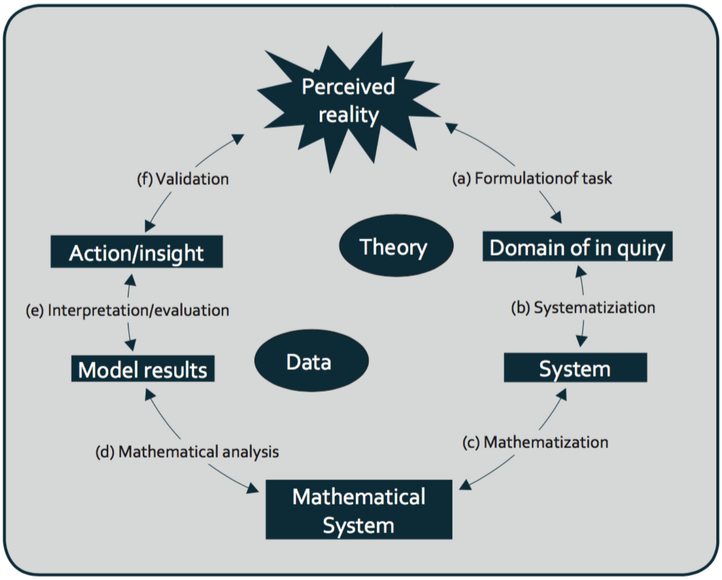


Figura 2: Ciclo de modelización.

c) *Transformación de los objetos y relaciones seleccionados desde su estado de apariencia inicial hacia la matemática, mediante una mayor abstracción e idealización.*

d) *Uso de métodos matemáticos para obtener resultados matemáticos y conclusiones.*

e) *Interpretación de los resultados y conclusiones obtenidos con respecto al dominio de indagación.*

f) *Evaluación de la validez del modelo por comparación de los datos (observados o previstos) y/o con los conocimientos establecidos (basados en la teoría o en la experiencia compartida/personal).*

Este ciclo de modelización organiza las relaciones e interacciones entre dos sistemas: un sistema extramatemático y un sistema matemático. Cada uno tiene su propia lógica y, en consecuencia, el proceso de indagación no sólo está sujeto a las reglas de la racionalidad matemática. Como se deduce de la descripción anterior, la racionalidad matemática regula el trabajo realizado en la fase d), y esta parte puede tener una dimensión de indagación, pero la validación de las respuestas obtenidas a través del proceso de indagación en su conjunto también está sometida a la racionalidad del sistema extramatemático. En IBME, sin duda es importante sensibilizar a los estudiantes y darles la oportunidad de experimentar la diversidad de dominios que, además del mundo natural, son accesibles a la indagación matemática a través de procesos de modelización.

Comparando con el IBSE, además del hecho de que el proceso de modelización no necesariamente utiliza las matemáticas, debe señalarse que el ciclo en ciencias suele involucrar más ideas preconcebidas que en matemáticas, ya que el mundo natural se percibe de forma más inmediata por los sentidos y requiere tratar con un modelo en bruto, incluso desde edades tempranas. Estas preconcepciones pueden tener un fuerte impacto en el proceso. Debe añadirse que las indagaciones motivadas por preguntas matemáticas (indagaciones internas) también pueden requerir o beneficiarse de la construcción de interacciones entre sistemas diferentes (entre sistemas numéricos y algebraicos, sistemas algebraicos y geométricos, perspectivas deterministas y aleatorias, etc.), ya que las matemáticas constituyen un dominio extremadamente interconectado. Tales interacciones pueden ser consideradas formas específicas de procesos de modelización internos a la matemática[2].

3. Indagación matemática: algunas especificidades del proceso

El cuadro 1 presenta un ejemplo de un proceso de indagación basado en una pregunta matemática: ¿Cuál es el producto máximo que se puede obtener descomponiendo un número entero positivo en una suma de enteros positivos y multiplicando los términos de la suma?

Esta pregunta ha llevado al desarrollo de numerosas actividades en los diferentes niveles de escolaridad, desde la Educación Primaria hasta el Bachillerato ([14], [1]).

Este problema es sólo un ejemplo, pero muestra algunas especificidades de la indagación matemática (interna) y de sus resultados, por ejemplo:

- el papel desempeñado por la exploración y su progresiva sistematización a medida que aumenta la familiaridad con el problema;
- el pragmatismo del proceso de indagación y su no linealidad;
- la interacción dialéctica entre la prueba y la refutación, y el papel que desempeñan en ella los contraejemplos;
- la naturaleza concluyente (apodíctica) de los resultados obtenidos y la convicción de que ninguna experiencia adicional los invalidará, y también la satisfacción intelectual que se obtiene al descubrir nuevos argumentos sobre los resultados ya probados;
- el hecho de que una vez que se encuentra una solución, se buscan inmediatamente generalizaciones posibles, considerando tanto los resultados como las técnicas utilizadas para obtenerlos;
- el cambio de perspectiva que tales generalizaciones pueden requerir, haciendo intervenir a nuevos ámbitos y técnicas matemáticas, y cómo pueden contribuir a una nueva comprensión de los resultados iniciales obtenidos.

[2]Douady ha puesto especial énfasis en este punto en su enfoque de la educación matemática en términos de dialéctica herramienta-objeto e interacción entre marcos ([13]).

¿Cuál es el producto máximo que se puede obtener descomponiendo un entero positivo en una suma de enteros positivos y multiplicando los sumandos?

Seleccione, por ejemplo, el número 10 y realice alguna exploración.

Si 10 se descompone en la suma de dos números, es sencillo hacer una exploración exhaustiva de todas las posibilidades. Podemos concluir rápidamente que el producto máximo se obtiene a través de la descomposición en sumandos iguales, $10 = 5 + 5$, que genera el producto $5 \times 5 = 25$. Normalmente, esta conjetura se expresa en los primeros momentos del proceso de indagación, antes de haber realizado ningún trabajo sistemático.

Sin embargo, la conjetura $5 + 5$ no se cumple cuando 10 se descompone en la suma de tres números (por ejemplo $10 = 5 + 3 + 2$, dando lugar al producto $5 \times 3 \times 2 = 30$). En este caso, la exploración sistemática requiere la consideración de muchos casos diferentes. Además, esto no soluciona el problema, ya que 10 también puede descomponerse en más de tres números.

Así, nos involucramos en un proceso dialéctico que implica ensayos y la elaboración progresiva de resultados parciales y conjeturas. Por ejemplo, muy pronto descubrimos que las descomposiciones óptimas no deben incluir el número 1 ni el número 5 (porque $3\times 2 > 5$), ni el número 6 (porque $3\times 3 > 6$). Esta línea de razonamiento excluye todos los números diferentes de 2, 3 y 4. Observamos entonces que $3\times 3 > 2\times 2\times 2$, y que, en cualquier descomposición, el número 4 puede ser reemplazado por dos veces el 2 (ya que $4 = 2+2 = 2\times 2$). De esta forma, obtenemos dos descomposiciones óptimas, $10 = 3 + 3 + 4$ y $10 = 3 + 3 + 2 + 2$, que conducen al producto 36.

De hecho, el trabajo realizado en este caso particular se generaliza al caso de cualquier número entero, siendo las descomposiciones óptimas aquellas que incluyen tantas veces como sea posible el número 3 y no incluyen al número 1. El resultado también puede generalizarse a descomposiciones racionales, como muestra Perrin en [14]. En este caso, si n es el número de sumandos de la descomposición del número S, las propiedades de convexidad conducen a concluir que la descomposición óptima es la descomposición en n sumandos iguales de valor S/n. Así, uno acaba buscando el máximo $(S/n)^n$ como función de n. Si se extiende esta función a los números reales y se calcula la derivada, se obtiene que el máximo de esta función real es en $x = S/e$, y la descomposición óptima en números racionales se obtiene eligiendo n tal que el sumando sea lo más próximo posible a e. Esto da nuevas ideas sobre el resultado obtenido para 10 y posteriormente generalizado a cualquier descomposición con números enteros. ¡3 es el entero más próximo a e!

Cuadro 1: El producto máximo.

Dicho esto, no existe una forma única o estándar de indagación en matemáticas, ni siquiera para las formas de indagación internas al ámbito matemático, como en el ejemplo del cuadro 1. Un proceso de indagación puede conducir, por ejemplo, a un resultado universal (mostrando que todos los objetos que pertenecen a la misma categoría comparten una propiedad dada), pero también puede conducir a un resultado existencial (demostrando que existe al menos un objeto que cumple un conjunto de condiciones dadas). El desarrollo de la indagación y el proceso de validación que incluye se verá necesariamente afectado por estas características, ya que se verá condicionado por la naturaleza de los objetos involucrados, la conceptualización que realicen los estudiantes, el lenguaje, las herramientas simbólicas y semióticas accesibles que les permitan expresar y discutir sus ideas y razonamiento con otros estudiantes y el profesor, y los artefactos disponibles para apoyar la exploración y la experimentación. Dicha diversidad, junto con el hecho de que la indagación matemática, cuando proviene de situaciones externas, incluye necesariamente un proceso de modelización y combina varias lógicas, sugiere que, en la práctica, en la educación basada en la indagación hay un continuo entre las formas de indagación en matemáticas y en ciencias, como se ha señalado, por ejemplo, en [19].

4. El carácter conectado y acumulativo de las matemáticas

El informe *Learning Through Inquiry* ([3, p. 9]) afirma que:

> «Las matemáticas tienen un carácter acumulativo mayor que las ciencias. Las herramientas matemáticas que se desarrollan para resolver problemas concretos necesitan construirse unas sobre otras para convertirse en métodos y técnicas que puedan ser utilizadas, de forma eficiente, para resolver clases de problemas y conducir eventualmente al desarrollo de nuevas ideas matemáticas e incluso teorías y nuevos campos de aplicación. Además, las conexiones entre diferentes dominios desempeñan un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. En consecuencia, en la educación matemática basada en la indagación, es importante que los estudiantes no traten con problemas aislados, por desafiantes que sean, ya que esto no les permite desarrollar los conceptos matemáticos generales (o más generalmente aplicables).»

Esto sugiere que la IBME debe prestar especial atención a que se desarrollen recursos a partir del trabajo con problemas que tengan un claro potencial para generar ideas matemáticas y conocimiento. Aunque desarrollar «hábitos de indagación de la mente» ([12]) es una dimensión importante de la IBME, claramente no es suficiente.

Desde esta perspectiva, a pesar de su interés, un problema como el del producto máximo (cuadro 1) presenta algunas limitaciones, ya que el papel crucial que ha de desempeñar en el progreso hacia el conocimiento matemático no es evidente. El caso es diferente, por ejemplo, con la conocida situación del rompecabezas, creada inicialmente por Brousseau[3] ([9]) y descrita en el cuadro 2.

La actividad del rompecabezas descrita en el cuadro 2 merece comentarse. Muestra que en matemáticas, al igual que en ciencias, la construcción de conocimiento no es un proceso lineal. Modelos como el modelo aditivo, que han probado su eficiencia en una serie de contextos, deben ser cuestionados en algún momento por los estudiantes para que puedan desarrollarse nuevas ideas. Existen obstáculos epistemológicos que necesitan ser superados ([31]). Dentro de la IBME, el profesor debe guiar a los estudiantes a experimentar las limitaciones de su conocimiento y crear las condiciones para lograr la evolución cognitiva requerida.

Además del diseño de problemas apropiados, tales experiencias de aprendizaje requieren condiciones apropiadas para que los estudiantes interactúen con el problema. Estas condiciones se expresan mediante las nociones de situación y medio en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau ([8]). En la situación descrita en el cuadro 2, los estudiantes se enfrentan físicamente a las limitaciones del modelo aditivo, lo que sienta las bases para que se produzca la evolución cognitiva requerida. Entender por qué el modelo aditivo no funciona en esta situación particular conduce a la idea esencial de que la imagen de la suma de dos longitudes debe ser igual a la suma de sus imágenes, la imagen de 4 cm debe ser el doble de la imagen de 2 cm, es decir, a la esencia del modelo lineal. Sin embargo, como señala Sensevy ([29]), la acción dialógica conjunta del profesor y de los estudiantes, y el uso preciso de recursos semióticos, como las tablas con medidas, es crucial para que esta evolución potencial se convierta en una realidad y para que el proceso de indagación se dirija a la conclusión esperada. Las «características clave de la pedagogía de la indagación», descritas en el informe *Learning Through Inquiry*, prestan especial atención a esta dimensión dialógica esencial en el proceso de aprendizaje en la IBME.

5. IBME y tecnologías digitales

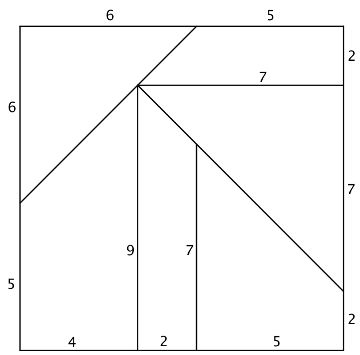
Citando de nuevo el informe *Learning Through Inquiry* ([3, p. 8]):

> «Que la IBME sea más que un eslogan requiere que se desarrollen metodologías de enseñanza. Estas metodologías deben tener en cuenta la componente experimental de las matemáticas y las nuevas oportunidades que ofrecen las tecnologías digitales. La historia de las matemáticas muestra que dicha componente experimental no es nueva, pero en las últimas décadas los desarrollos tecnológicos han puesto a disposición de las matemáticas un gran número de nuevos recursos que han hecho que la componente experimental sea más visible y compartida por la comunidad matemática. Sin embargo, si comparamos con las prácticas experimentales en ciencias naturales, hay que tener en cuenta que las experiencias para el aprendizaje de matemáticas no se limitan a lo que se suele llamar el "mundo real"».

[3]Una interesante reflexión sobre esta propuesta se encuentra en [10].

Esta situación es parte de un proceso de ingeniería didáctica cuyo objetivo es extender el conjunto de los números enteros a los números racionales y decimales. En este punto del proceso de ingeniería, los estudiantes han estudiado las fracciones a través de la comparación y medida del espesor de los diferentes tipos de papel. Saben comparar y sumar fracciones, y multiplicar una fracción por un número entero. Pero todavía no tienen recursos para multiplicar dos fracciones. Dentro del proceso de ingeniería didáctica, estos recursos se construyen presentando la multiplicación como un operador lineal en el contexto del estiramiento de objetos.

El rompecabezas es la primera actividad seleccionada para proporcionar a los estudiantes dichos recursos. Se pide a los estudiantes que amplíen el rompecabezas mostrado en la imagen, de tal manera que la longitud de 4 cm en el rompecabezas inicial sea de 7 cm en el rompecabezas ampliado (el lado inicial del cuadrado es de 11 cm).

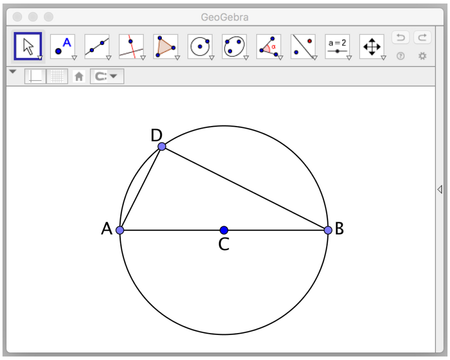


Trabajan en grupos y se pide a cada grupo que produzca un rompecabezas ampliado. El trabajo se distribuye entre los estudiantes, cada uno de ellos tiene que ampliar una o dos piezas del rompecabezas. Como no existe una relación simple entre 4 y 7, su estrategia inicial es añadir 3 cm a todas las dimensiones (modelo aditivo). Después de comprobar que la estrategia se ha aplicado correctamente para obtener las piezas ampliadas, se dan cuenta de que no funciona, por lo que buscan otra estrategia. Progresivamente, con ayuda del profesor, concluyen que si conocen la longitud de la imagen del segmento de 4 cm, pueden calcular la longitud de la imagen del segmento de 2 cm y la del segmento de 6 cm. Finalmente, comprenden, más en general, que conocer la longitud de la imagen de un segmento de 1 cm les permite calcular la imagen de un segmento de cualquier longitud, y que esta técnica puede generalizarse a cualquier otra situación similar. Posteriormente, se les pedirá que amplíen esta técnica para trabajar con dimensiones racionales, lo que completará la extensión deseada de la multiplicación de números racionales.

Cuadro 2: El rompecabezas.

Como señalamos aquí, las matemáticas siempre han tenido una componente experimental. La importancia de esta componente experimental en la educación ha sido subrayada por matemáticos como Felix Klein en Alemania o Émile Borel en Francia, quien a principios del siglo XX abogó por la instalación de laboratorios de matemáticas en las instituciones de enseñanza secundaria francesas. Las situaciones descritas en los cuadros 1 y 2 muestran que, incluso en la actualidad, la experimentación en matemáticas no necesita el uso de las tecnologías digitales. Dicho esto, no hay duda de que los avances tecnológicos han ampliado sustancialmente el potencial de la experimentación en matemáticas y en educación matemática, y que la IBME debe hacer uso de estos nuevos recursos tecnológicos. Sin embargo, es importante tener en cuenta que el uso de la tecnología no promueve automáticamente la dimensión de indagación de las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Este punto se ilustra con el ejemplo del cuadro 3.

Los estudiantes utilizan una aplicación de geometría dinámica como la que se muestra en la imagen. D es un punto que se mueve sobre un círculo de diámetro [AB]. Se pide a los estudiantes que hagan conjeturas sobre los valores de los ángulos del triángulo ABD cuando D se mueve.



El objetivo es que los estudiantes observen que el ángulo en D mide siempre 90º y que conjeturen así un teorema importante en la geometría elemental. Pero en esta situación de aprendizaje todo viene dado, por lo que, a pesar de las apariencias, no hay lugar real para la indagación matemática.

Nótese, sin embargo, que un pequeño cambio sería suficiente para crear una diferencia notable. Por ejemplo, a los estudiantes se les podría dar el segmento [AB] y un punto C que se moviese en el plano, y se les puede pedir que delimiten la región del plano en la que puede estar C de forma que el ángulo en C del triángulo ABC sea agudo.

Cuadro 3: Triángulo y círculo – el teorema del ángulo recto.

Lamentablemente, la investigación tiende a demostrar que la tecnología se usa frecuentemente en las aulas como apoyo a métodos de enseñanza ostensivos (que muestran cosas a los estudiantes), o para realizar actividades pseudoexperimentales en las que se guía a los estudiantes paso a paso a lo largo de una hoja de trabajo. Por lo tanto, es importante prestar especial atención a los recursos generados para potenciar la IBME a través del uso de la tecnología.

Otra cuestión que surge cuando la tecnología se utiliza para conjeturar propiedades, como en el ejemplo del cuadro 3, es determinar en qué medida el trabajo experimental realizado con la tecnología facilita la obtención de la demostración de la conjetura. Muy frecuentemente, tanto los problemas seleccionados como la manera en que se gestionan en el aula tienden a desconectar completamente estas dos fases esenciales del proceso de indagación. La investigación educativa en matemáticas muestra que estas dos fases de la indagación matemática se pueden abordar de una manera conectada ([17]). También se debe prestar especial atención a este aspecto en el desarrollo de recursos tecnológicos para la IBME.

Los programas de geometría dinámica y las hojas de cálculo son las tecnologías más utilizadas en la educación matemática para promover prácticas experimentales. Actualmente, los currículos de matemáticas requieren su uso en muchos países, al menos en la etapa secundaria. Sin embargo, como se señala en el informe *Learning Through Inquiry*, hoy en día la tecnología tiene mucho más que ofrecer para apoyar la IBME (por ejemplo, mediante el uso de sensores, herramientas de simulación, applets y recursos de Internet). La literatura educativa proporciona numerosos ejemplos ([20]). El proyecto Comenius *EdUmatics*, por ejemplo, tiene como objetivo el desarrollo colectivo de recursos para el desarrollo profesional de profesores europeos de matemáticas de secundaria en el uso educativo de la tecnología. Uno de los muchos recursos desarrollados en este proyecto se basa en una situación en la que se pide a los estudiantes que usen un programa específico para probar sus tiempos de reacción, que comparen las diferentes series obtenidas para un mismo estudiante y para diferentes estudiantes, y que encuentren las maneras más adecuadas para hacer estas comparaciones. Tales situaciones pueden utilizarse tanto como punto de partida para desarrollar la parte estadística del currículo de matemáticas mediante una metodología basada en la indagación, como para establecer fructíferas conexiones con la enseñanza de las ciencias naturales.

6. IBME y otros enfoques en educación matemática

Como se señaló en la introducción, aunque el uso de la expresión IBME sea bastante reciente, no debe olvidarse que las características y valores de la IBME recuerdan a enfoques que han existido y se han desarrollado en el campo de la educación matemática durante décadas. Por mencionar sólo algunos de ellos:

- la resolución de problemas, que se remonta a Pólya ([26]);
- los enfoques iniciados por Freudenthal en los Países Bajos y Brousseau en Francia a finales de los años sesenta, que han evolucionado progresivamente y son conocidos actualmente como Educación Matemática Realista (EMR) ([15]) y Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) ([8]);
- los enfoques de modelización, antes mencionados;

- los enfoques socioculturales, especialmente los que se refieren a la idea de comunidad de prácticas de Lave y Wenger ([24]) o a la perspectiva dialógica de Bakhtin ([5]);
- los enfoques antropológicos, como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) iniciada por Chevallard a mediados de los años ochenta ([7]), o las perspectivas críticas de Skovsmose ([30]).

En cierta medida, cada una de estas teorías aborda la educación matemática desde una perspectiva basada en la indagación y, por consiguiente, tiene algo que ofrecer a la IBME, pero cada una de ellas tiende a moldearla de una manera particular.

En la tradición de la resolución de problemas se presta una atención especial al desarrollo de habilidades de resolución de problemas y de las competencias metacognitivas asociadas ([28]), lo que ha llevado a destacar la originalidad y el carácter desafiante de los problemas propuestos a los estudiantes por encima de su contribución a un desarrollo organizado del conocimiento matemático.

Esto contrasta con teorías como la EMR y la TSD que, a pesar de sus diferencias, comparten el propósito de estructurar toda la educación mediante la resolución progresiva de problemas epistemológicamente sólidos que tengan sentido para los estudiantes.

En los enfoques de modelización, el centro de atención son las conexiones entre la matemática y el mundo exterior. Sin embargo, al igual que en los enfoques de resolución de problemas, cuando el desarrollo de competencias de modelización se convierte en el objetivo esencial se da una dicotomía entre la modelización como herramienta para desarrollar conocimiento matemático conectado y la modelización como un objeto de aprendizaje en sí misma.

En los enfoques socioculturales, se presta especial atención a la dimensión social y cultural del proceso de indagación, a las formas en que afecta a las comunidades involucradas ([21]) y a la interacción dialógica entre los estudiantes, y entre los estudiantes y el profesor ([32]). Desde esta perspectiva, el enfoque dialógico desarrollado en el Proyecto Fibonacci alrededor de la obra de Peter Gallin ([27], [16]) es una fuente importante de inspiración. En la TAD se presta especial atención a las condiciones y limitaciones institucionales que configuran el proceso de indagación. La propuesta es reconstruir la educación matemática en torno a una perspectiva basada en la indagación a través de la idea innovadora de «programa de estudio e investigación», inspirada en la pedagogía herbartiana ([11]).

En los enfoques críticos, se hace hincapié en el papel que la investigación puede desempeñar al cuestionar el funcionamiento de nuestras sociedades y en promover valores de ciudadanía, justicia social y equidad.

Podríamos seguir desarrollando este tema, pero lo que hemos presentado ya muestra que la IBME es una idea que está aún en construcción, a la que tienen algo que aportar las diferentes perspectivas que la han precedido. Cada una de dichas perspectivas resalta una faceta importante de la IBME y proporciona conceptos y métodos útiles para abordarla, así como recursos y experiencias que pueden inspirar la enseñanza y la formación del profesorado. Por supuesto, la organización de estas diversas perspectivas es un gran desafío: implica construir vínculos adecuados entre los conceptos correspondientes, así como lo que se conoce en el ámbito de la articulación de marcos teóricos (o *networking of theories*) como una «semiosfera» que haga posible la comunicación.

7. Comentarios finales

El cuadro 4 presenta un ejemplo hipotético de la IBME en el aula, inspirado en un taller realizado en Bayreuth durante una estancia en el marco del Proyecto Fibonacci y en experiencias realizadas en Italia ([25]).

Para iniciar el proceso de indagación, se podría pedir a los estudiantes que manipulasen diferentes tipos de pantógrafos y explorasen su comportamiento. Esto les llevaría a conjeturar que este dispositivo mecánico permite la construcción de representaciones ampliadas de objetos y dibujos. A los estudiantes se les podría invitar a utilizar la geometría dinámica para crear modelos virtuales de pantógrafos reales, con el fin de facilitar una exploración más sistemática de las posibilidades. La geometría dinámica apoyaría así la conexión entre un sistema tecnológico y un sistema matemático en el proceso de modelización. Seguidamente, se organizaría en el aula el estudio de estos modelos virtuales; se plantearían preguntas que se irían articulando y refinando en función de la interacción dialógica entre los estudiantes y el profesor. Se distribuiría el trabajo entre grupos de estudiantes que actuarían como una comunidad de indagación.

Este estudio conduciría a los estudiantes a encontrar transformaciones homotéticas posiblemente nuevas para ellos, lo que motivaría el estudio sistemático de sus propiedades, combinando el uso de la geometría dinámica y el lápiz y papel bajo la supervisión del profesor. Al final del proceso de indagación, los estudiantes habrían comprendido por qué los pantógrafos amplían los dibujos, pero también habrían dado sentido a las limitaciones físicas de esta tecnología. Sabrían cómo construir un pantógrafo correspondiente a una ampliación determinada y cómo combinar el uso de varios pantógrafos para enriquecer sus posibilidades. Habrían aprendido o consolidado su conocimiento sobre las transformaciones homotéticas, sobre el tipo de problemas que se pueden resolver a través de estas transformaciones y sobre el papel que desempeñan en la geometría. Seguramente también habrían conocido la historia de estos objetos y la ingeniosidad de quienes los crearon y los fueron mejorando. Algunos estudiantes podrían incluso considerar la construcción y comercialización de pantógrafos para apoyar proyectos comunitarios, como se hizo en Italia ([25]).

Cuadro 4: Indagación sobre los pantógrafos.

Este proyecto de indagación —que también puede ser considerado como un programa de estudio e investigación desde la perspectiva de la TAD— es un ejemplo de actividad en la que se implementan de manera ideal las ideas principales sobre IBME desarrolladas en este texto. Pero no hay duda de que, actualmente, la creación de las condiciones para que la IBME sea viable es difícil en muchos sistemas educativos. La estructura de los planes de estudios, la organización de la clase y los horarios de matemáticas, la formación de los maestros, el contrato didáctico predominante y muchos otros factores, crean obstáculos difíciles de superar. Como ocurre en el caso de las ciencias, avanzar hacia la IBME es un largo camino que generalmente comienza con la aplicación de formas mucho más modestas de indagación en las que los profesores deben considerar las preguntas de sus estudiantes, actuar conjuntamente con ellos sobre la base de dichas preguntas y de sus producciones ([29]), crear las condiciones para que los estudiantes hagan conexiones dentro de la matemática y con el mundo exterior, y cultivar los hábitos de indagación de la mente.

Las características clave de la pedagogía de la indagación, descritas en el informe *Learning Through Inquiry* ([3]), allanan el camino en esa dirección. Se espera que esta evolución progresiva hacia la IBME:

> «Mejorará la comprensión matemática de los estudiantes, lo que hará que sus conocimientos matemáticos sean más robustos y funcionales en una diversidad de contextos más allá de las tareas escolares habituales. Ayudará a los estudiantes a desarrollar la curiosidad matemática y científica, y la creatividad, así como su potencial para la reflexión crítica, razonamiento y análisis, y su autonomía como estudiantes. También les ayudará a desarrollar una visión más exacta de las matemáticas como una actividad humana, a considerar la matemática como una componente fundamental de nuestra herencia cultural y a apreciar el papel crucial que desempeña en el desarrollo de nuestras sociedades» (p. 8).

Referencias

[1] G. Aldon, P.Y. Cahuet, V. Durand-Guerrier, M. Front, D. Krieger, M. Mizony y C. Tardy, *Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école*, INRP, Lyon, 2010.

[2] M. Artigue y P. Baptist, *Inquiry in mathematics education*, The Fibonacci Project Resources, 2012, `http://fibonacci-project.eu`.

[3] M. Artigue, P. Baptist, J. Dillon, W. Harlen y P. Léna, *Learning through inquiry*, The Fibonacci Project Resources, 2011, `http://fibonacci-project.eu`.

[4] M. Artigue y M. Blomhøj, Conceptualizing inquiry-based education in mathematics, *ZDM* **45** (6) (2013), 797–810.

[5] M. Bakhtin, *The dialogic imagination: Four essays*, University of Texas Press, 2010.

[6] M. Blomhøj y T. Højgaard Jensen, Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning, *Teaching Mathematics and its applications* **22** (3) (2003), 123–139.

[7] M. Bosch y J. Gascón, 25 years of the Didactic Transposition, *ICMI Bulletin* **58** (2006), 51–65.

[8] G. Brousseau, *Theory of didactical situations in mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[9] G. Brousseau y N. Brousseau, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux, 1987.

[10] G. Brousseau, N. Brousseau y V. Warfield, *Teaching fractions through situations: A fundamental experiment*, Springer, New York, 2014.

[11] Y. Chevallard, La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD, *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck y F. Wozniak, eds.), 81–108, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2011.

[12] J. Dewey, *Logic: The theory of inquiry*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1938.

[13] R. Douady, Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7** (2) (1986), 5–31.

[14] ERMEL, *Vrai? Faux? On en débat! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*, INRP, París, 1999.

[15] H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1973.

[16] P. Gallin, Den Unterricht dialogisch gestalten–neun Arbeitsweisen und einige Tipps, *Besser lernen im Dialog* (U. Ruf, S. Keller y F. Winter, eds.), 96–108, Kallmeyer Verlag, Seelze-Velber, 2008.

[17] G. Hanna y M. De Villiers (eds.), *Proof and proving in mathematics education*, The 19th ICMI Study, Springer, 2012.

[18] W. Harlen, *Inquiry in science education*, The Fibonacci Project Resources, 2012, `http://fibonacci-project.eu`.

[19] M. Hersant y D. Orange-Ravachol, La démarche d'investigation, les mathématiques et les SVT : des problèmes de demarcation aux raisons d'une union, *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle-Actes du colloque EMF 2012* (J.-L. Dorier y S. Coutat, eds.), 1378–1388, Université de Genève, 2012.

[20] C. Hoyles y J.B. Lagrange (eds.), *Mathematics Education and Technology – Rethinking the Terrain*, The 17th ICMI Study, Springer, 2010.

[21] B. Jaworsky, Grappling with complexity: co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development, *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (M. J. Høines y A. B. Fuglestad, eds.), vol. 1, 17–36, Bergen University College, Bergen, 2004.

[22] G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri y G. Stillman (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling*, Springer, Dordrecht, 2011.

[23] I. Lakatos, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[24] J. Lave y E. Wenger, *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[25] F. Martignone, *Scienze e Tecnologie in Emilia–Romagna (Azione 1)*, Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia–Romagna, Technodid Editrice, Nápoles, 2010.

[26] G. Pólya, *How to Solve it?* Princeton University Press, Princeton, 1945.

[27] U. Ruf y P. Gallin, *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Vol. 1: Austausch unter Ungleichen. Vol. 2: Spuren legen – Spuren lesen*, Kallmeyer, Seelze-Velber, 1998; tercera edición revisada, 2005.

[28] A. H. Schoenfeld, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics, *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws ed.), 334–370, MacMillan, New York, 1992.

[29] G. Sensevy, *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*, De Boeck, Bruselas, 2011.

[30] O. Skovsmose, Towards a critical mathematics education, *Educational studies in mathematics* **27** (1) (1994), 35–57.

[31] A. Sierpinska, *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, Londres, 1996.

[32] G. Wells, *Dialogic inquiry: Towards a sociocultural practice and theory of education*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

Michèle Artigue, Université Paris Diderot, Francia
Correo electrónico: `michele.artigue@univ-paris-diderot.fr`
Página web: `http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/user/103`