Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y José Luis Díaz Barrero

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2019.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco ($\star$) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 345. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Gerona.*

Para construir un muro de L metros de longitud y A metros de altura disponemos de unos grandes ladrillos de 2×1 metros que podemos colocar en sentido horizontal o vertical. No está permitido romper ningún ladrillo y el muro no debe tener *debilidad estructural*, entendiendo por tal la posibilidad de dividir el muro en dos partes rectangulares sin romper ningún ladrillo. Estudiar la posibilidad de construir muros con estas condiciones según sean L y A.

Problema 346. *Propuesto por Ovidiu Furdui, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(\cos x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cos \frac{k\pi}{2} \right)$$

converge absolutamente para cada $x \in \mathbb{R}$ y determinar su suma.

PROBLEMA 347. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Agus y Berna juegan por turnos a un cierto juego. Empieza Agus, sigue Berna en el segundo turno, y así sucesivamente hasta el turno 347, en el que juega Agus y acaba el juego. Quien juega en cada turno escribe en la pizarra un número real positivo. Si al final la suma de los 347 números escritos resulta ser igual a la suma de sus inversos gana Agus, en caso contrario gana Berna. Determinar quién tiene una estrategia ganadora en cada una de las siguientes situaciones, en las que deben cumplirse unas reglas adicionales que se indican:

a) Nadie puede repetir ninguno de los números escritos anteriormente.

b) Agus no puede repetir ninguno de sus números, pero sí puede repetir números que haya escrito Berna. Por su parte, Berna puede repetir cualquier número aparecido ya, propio o ajeno.

PROBLEMA 348. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Sean

$$H_k^{(2)} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{k^2}, \qquad k \geq 1,$$

los números armónicos de orden dos. Probar que

$$\log 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(2)}}{(k+1)^2 2^{k+1}} = \frac{\zeta(4)}{16} + \frac{\zeta(2)\log^2 2}{2} - \frac{\log^4 2}{8}.$$

PROBLEMA 349. *Propuesto por Francisco Morales Morillas, Universidad de Granada, Granada.*

Sobre los lados de un cuadrado construimos cuatro triángulos rectángulos iguales tal y como se muestra en la figura adjunta. Probar que los puntos E, F, G y H están alineados.

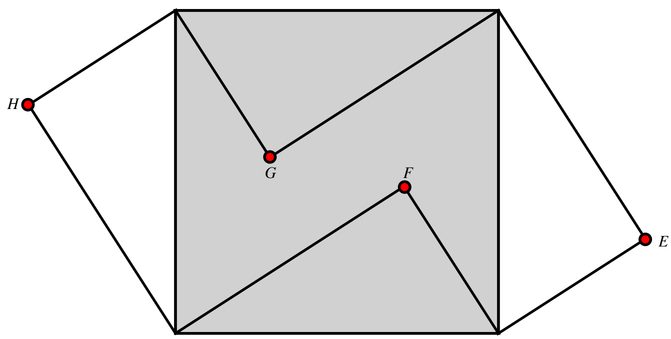

Figura correspondiente al Problema 349.

Problema 350. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I.E.S. Penyagolosa, Castellón.*

Se consideran una circunferencia c y una recta r. En la circunferencia c se toman dos puntos fijos A y A' y un tercer punto variable M. Las rectas MA y MA' cortan a r en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que existen (encontrar) dos puntos fijos R y S de r tales que el producto de distancias $PR \cdot QS$ es constante cuando se deja que M recorra la circunferencia c.

Problema 351. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Sea

$$T(u) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\tanh\left((2n+1)u\frac{\pi}{2}\right)}{\tanh((n+1)u\pi)}, \qquad 0 < u < 1.$$

Probar que $T(1/u) = \sqrt{u}\,T(u)$.

Problema 352. *Propuesto por D. M. Bătineţu Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sean $a_1, \dots, a_n$, con $n \geq 3$, números reales positivos. Si para cada $m \in [1, \infty)$ definimos $S_n(m) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^m$, probar que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2S_n(m) - a_k^m}{(S_n(1) - a_k)^m} \geq \frac{2^m n(n-1)}{(n-2)^m}.$$

Soluciones

Problema 321. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

Un cuadrilátero plano tiene vértices $ABCD$ en orden cíclico. Los ángulos en A y C son rectos, y el ángulo en B es agudo. Sea H el ortocentro del triángulo ABC. Se construye el rectángulo de vértices $DEFG$ en orden cíclico que cumple las siguientes condiciones:

i) El lado DE es paralelo a la bisectriz interior del ángulo ABC.

ii) El vértice F es el punto donde se cortan la bisectriz interior del ángulo BCH y la bisectriz interior del ángulo BAH.

Probar que la diagonal EG de este rectángulo pasa por el punto medio M de la diagonal AC del cuadrilátero inicial.

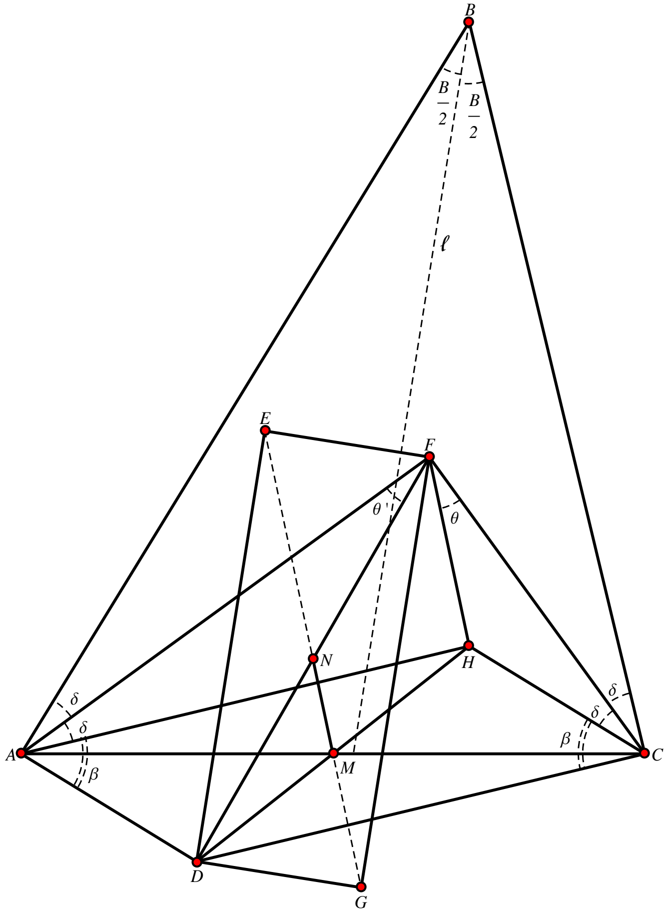

Figura 1: Esquema para la solución del Problema 321.

Solución enviada por el proponente (modificada por los editores).

Denotaremos con N el punto medio común de las diagonales del rectángulo $DEFG$, y con M el punto medio del segmento AC, que es también punto medio del segmento DH ya que, por construcción, $ADCH$ es un paralelogramo, véase la figura 1. Sean $\beta = \angle HAD = \angle HCD$ (de hecho, como $\angle HAB = \frac{\pi}{2} - B$ y $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$, se tiene $\beta = B$) y $\delta = \angle HAF = \angle HCF = \frac{\pi}{4} - \frac{B}{2}$. Se tiene así $\angle FAD = \angle FCD + \beta + \delta$ y

$$\begin{aligned}\angle AFC &= 2\pi - (2(\beta+\delta) + \angle ADC) = 2\pi - (2(\beta+\delta) + \pi - \beta)\\ &= \pi - (\beta + 2\delta) = \pi - \Big(B + \frac{\pi}{2} - B\Big) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Por otra parte, las rectas FA y FC son simétricas respecto de la bisectriz interior

ℓ del ángulo $\angle ABC$ (ambas forman con ℓ un ángulo de amplitud $\delta + \frac{B}{2}$), de donde resulta que también son simétricas respecto de la recta FG y, por consiguiente, FG resulta ser la bisectriz del ángulo $\angle AFC$.

Veamos ahora que los ángulos $\angle HFC$ y $\angle DFA$, que denotaremos por θ y θ', respectivamente, son iguales. Aplicando el teorema de los senos en los triángulos FHA y FHC se tiene

$$\frac{HC}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{HF}{\operatorname{sen}\delta} = \frac{HA}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)},$$

de donde $\frac{HC}{HA} = \tan\theta$. De la misma manera, a partir de los triángulos FDA y FDC obtenemos que

$$\frac{DA}{\operatorname{sen}\theta'} = \frac{DF}{\operatorname{sen}(\beta+\delta)} = \frac{DC}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)},$$

y, de esta forma, $\frac{DA}{DC} = \tan\theta'$. Pero como $DA = HC$ y $DC = HA$, se cumple que $\tan\theta = \tan\theta'$ y, por tanto, $\theta = \theta'$.

Entonces, en particular, las rectas FD y FH son simétricas respecto de FG (forman con ella ángulos de $\frac{\pi}{4} - \theta$). Pero también son simétricas respecto de FG las direcciones de las diagonales FD y EG del rectángulo $DEFG$. Luego las rectas EG y FH son paralelas.

Finalmente, consideremos que M y N son los puntos medios de los lados DH y DF, respectivamente, del triángulo DHF. Entonces MN es paralela (una paralela media en dicho triángulo) a la recta FH. Pero la recta EG también pasa por el punto N, lo que implica que EG y MN son la misma recta, y hemos concluido.

También resuelto por A. Fanchini y J. Nadal.

Problema 322. *Propuesto por Cristóbal Sánchez Rubio, I.E.S. Penyagolosa, Castellón.*

Dado un triángulo ABC, sean D y E, respectivamente, el punto de la semirrecta BA con origen B y el punto de la semirrecta CA con origen C tales que $BD = CE = BC$.

a) Probar que los segmentos DE y OI, donde O e I son, respectivamente, el circuncentro y el incentro del triángulo ABC, son perpendiculares.

b) Probar que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ADE es igual a la distancia OI.

Nota. N. Stanciu y T. Zvonaru nos informan de que este problema, con el enunciado restringido al caso en que el triángulo ABC es acutángulo, escaleno y con BC como lado menor, apareció propuesto en la *X Olimpiada Nacional de Turquía* (diciembre de 2002) y puede verse una solución en *Crux Mathematicorum* **33** (2007), 157–158 (`https://cms.math.ca/crux/v33/n3/`). De hecho, es una elegante solución, debida a D. J. Smeenk, que sin cambiar nada sirve para resolver el caso del enunciado más general propuesto aquí. Remitimos entonces a esta referencia al lector interesado.

Resuelto por A. Fanchini, J. Nadal, B. Salgueiro y el proponente.

PROBLEMA 323. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, x, y y z números reales positivos y m un número real no negativo. Probar que

$$\frac{x^{2m+2}}{(ay+bz)^{2m+2}\sec^{2m}\frac{\pi}{18}}+\frac{y^{2m+2}}{(az+bx)^{2m+2}\operatorname{cosec}^{2m}\frac{\pi}{9}}+\frac{z^{2m+2}}{(ax+by)^{2m+2}\operatorname{cosec}^{2m}\frac{2\pi}{9}}\geq\frac{3}{4^m(a+b)^{2m+2}}.$$

Solución enviada por Kevin Soto Palacios, Huarmey, Perú (modificada por los editores).

La desigualdad propuesta puede reescribirse como

$$\frac{\left(\frac{x^2}{(ay+bz)^2}\right)^{m+1}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}\right)^m}+\frac{\left(\frac{y^2}{(az+bx)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}\right)^m}+\frac{\left(\frac{z^2}{(ax+by)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}\geq\frac{3}{4^m(a+b)^{2m+2}}. \tag{1}$$

La desigualdad de Radon y la desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática implican

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{x^2}{(ay+bz)^2}\right)^{m+1}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}\right)^m}+\frac{\left(\frac{y^2}{(az+bx)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}\right)^m}+\frac{\left(\frac{z^2}{(ax+by)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}\\ &\geq\frac{\left(\frac{x^2}{(ay+bz)^2}+\frac{y^2}{(az+bx)^2}+\frac{z^2}{(ax+by)^2}\right)^{m+1}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}\geq\frac{\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}\right)^2\right)^{m+1}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}.\end{aligned}$$

Usando nuevamente la desigualdad de Radon,

$$\begin{aligned}\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}&=\frac{x^2}{ayx+bzx}+\frac{y^2}{azy+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\\ &\geq\frac{(x+y+z)^2}{(xy+yz+zx)(a+b)}\geq\frac{3}{a+b},\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado la bien conocida desigualdad

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx).$$

Así,

$$\begin{aligned}&\frac{\left(\frac{x^2}{(ay+bz)^2}\right)^{m+1}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}\right)^m}+\frac{\left(\frac{y^2}{(az+bx)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}\right)^m}+\frac{\left(\frac{z^2}{(ax+by)^2}\right)^{m+1}}{\left(\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}\\ &\geq\frac{\frac{3^{m+1}}{(a+b)^{2(m+1)}}}{\left(\sec^2\frac{\pi}{18}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{9}+\operatorname{cosec}^2\frac{2\pi}{9}\right)^m}\end{aligned}$$

y para deducir (1) basta usar la identidad (véase Problema 283 de *La Gaceta de la RSME*, solución en vol. **19** (2016), págs. 594–595)

$$\sec^2 \frac{\pi}{18} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{9} + \operatorname{cosec}^2 \frac{2\pi}{9} = 12.$$

También resuelto por los proponentes.

Problema 324. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioculescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa tal que $f(0) = 0$. Probar que

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq 4 \int_0^{1/2} f(x)\,dx.$$

Solución enviada (independientemente) por Alberto Debernardi Pinos, Centre de Recerca Matemàtica, Barcelona, y Alejandro Mahillo Cazorla (estudiante), Universidad de La Rioja, Logroño.

Demostraremos que para todo $t \in [0,1]$ se cumple la siguiente desigualdad

$$t^2 \int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_0^t f(x)\,dx,$$

de la cual se deduce el resultado requerido con $t = 1/2$.

Como $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función convexa, dados $x, y \in [0,1]$, para cualquier $t \in [0,1]$, se verifica

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

En particular, tomando $y = 0$ y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, tenemos que $f(tx) \leq tf(x)$, para $t \in [0,1]$. Así,

$$t^2 \int_0^1 f(x)\,dx \geq t \int_0^1 f(tx)\,dx = \int_0^t f(x)\,dx,$$

como queríamos demostrar.

Debemos señalar que la igualdad se alcanza al considerar la función $f(x) = x$. Además, en caso de considerar una función cóncava la desigualdad se invierte.

También resuelto por P. Acosta, J. A. Bárcena, D. Cao, M. A. Díaz, A. Espuny, L. Giugiuc, Kee-Wai Lau, S. Mandal, J. Mozo, J. Nadal, A. M. Oller, P. Perfetti, H. Ricardo (dos soluciones), B. Salgueiro, J. Vinuesa y el proponente.

Nota. A. Stadler y D. Sitaru nos hacen saber que el problema ya había sido previamente propuesto, por el mismo autor, como Problema U366 en la publicación online *Mathematical Reflections*. Rogamos nuevamente a los proponentes que no remitan la misma propuesta a dos publicaciones diferentes de manera simultánea.

PROBLEMA 325. *Propuesto por Abdilkadir Altintas, Afyon, Turquía, y Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b, c, d y e números reales tales que $a+b+c+d+e=0$ y $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=k$, con k un número real positivo. Probar que

$$abcd+abce+abde+acde+bcde \geq -\frac{3k^2}{80}.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Usando las restricciones dadas para eliminar e y k^2 de la desigualdad propuesta, esta se convierte en

$$abcd-(abc+abd+acd+bcd)(a+b+c+d)+\frac{3}{80}(a^2+b^2+c^2+d^2+(a+b+c+d)^2)2 \geq 0. \tag{1}$$

Desarrollando, obtenemos que (1) es equivalente a

$$2\sum_{\text{simétrica}} a^4+12\sum_{\text{simétrica}} a^3b+9\sum_{\text{simétrica}} a^2b^2 \geq 16\sum_{\text{simétrica}} a^2bc+7\sum_{\text{simétrica}} abcd. \tag{2}$$

Ahora, por la desigualdad de Muirhead, se tienen las desigualdades

$$2\sum_{\text{simétrica}} a^4 \geq 2\sum_{\text{simétrica}} a^2bc, \qquad 12\sum_{\text{simétrica}} a^3b \geq 12\sum_{\text{simétrica}} a^2bc,$$

$$2\sum_{\text{simétrica}} a^2b^2 \geq 2\sum_{\text{simétrica}} a^2bc \qquad \text{y} \qquad 7\sum_{\text{simétrica}} a^2b^2 \geq 7\sum_{\text{simétrica}} abcd,$$

que al sumarlas prueban (2).

NOTAS. Recordemos que si $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ es un polinomio homogéneo, se define

$$\sum_{\text{simétrica}} P(x_1,x_2,\ldots,x_n) := \sum_{\sigma\in S_n} P(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}),$$

donde S_n es el conjunto de permutaciones del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$.

Además, dados dos vectores $s=(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ y $t=(t_1,t_2,\ldots,t_n)$, decimos que s mayora a t si $\sum_{j=1}^{i} s_j \geq \sum_{j=1}^{i} t_j$, para $i=1,\ldots,n-1$, y $\sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{j=1}^{n} t_j$. Con la notación anterior, la desigualdad de Muirhead establece que

$$\sum_{\text{simétrica}} x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_n^{s_n} \geq \sum_{\text{simétrica}} x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_n^{t_n}$$

cuando s mayora a t.

También resuelto por J. Nadal, J. A. Bárcena y los proponentes.

Problema 326. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño.*

N personas salen ordenadamente de una estancia pero, antes de abandonarla, cada uno debe retirar su paraguas. Cada persona reconoce su paraguas excepto una, a la que llamaremos Donald. Cuando le toca salir a Donald, lo que hace es retirar al azar un paraguas de los que quedan disponibles. Todas las demás personas se llevan su propio paraguas si lo encuentran cuando van a salir, y, si no lo está, retiran al azar un paraguas disponible.

Sea X el número de personas que, finalmente, abandonan la estancia con un paraguas que no es el suyo. Se trata de calcular el valor esperado de X en dos supuestos:

a) Donald es la primera persona en salir.

b) El orden de salida es totalmente aleatorio.

Solución enviada por Juan Mir Pieras, Lloseta, Mallorca.

Llamemos E_N al valor esperado de X en un supuesto igual al del apartado a) del problema excepto por la siguiente modificación: imaginemos que Goofy es una persona adicional que ya ha abandonado la estancia y que por error ha dejado su paraguas y se ha llevado el de Donald. En este supuesto modificado, Donald nunca podrá llevarse su propio paraguas y $E_N \geq 1$.

Si $N = 1$, sólo hay un caso: Donald se lleva el paraguas de Goofy, con lo que $E_1 = 1$.

Si $N > 1$, Donald, que es el primero de los N en salir, escoge con probabilidad $1/N$ uno de los siguientes N casos, que denotamos por $E_{N,n}$:

- Si $n = 1, 2, \dots, N-1$, Donald se lleva el paraguas de la persona P_n que va a salir cuando queden n personas. Tras ese primer error, la persona P_n va a encontrarse en una situación análoga a la de Donald pero con n personas, así que $E_{N,n} = 1 + E_n$.
- Si $n = N$, Donald se lleva el paraguas de Goofy. Tras ese primer error, el resto de personas podrán llevarse su propio paraguas, así que $E_{N,N} = 1$.

De forma que, como

$$E_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E_{N,n},$$

tendremos que $E_1 = 1$ y

$$E_N = \frac{1}{N}\left(1 + \sum_{n=1}^{N-1}(1 + E_n)\right) = 1 + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} E_n, \qquad N > 1.$$

La solución a esta recurrencia son los números armónicos $H_N = \sum_{n=1}^{N} 1/n$. En efecto, $H_1 = 1$ y, para $N > 1$, se cumple

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1} H_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{N-m}{m} = H_N - 1.$$

Ahora, llamemos E'_N al valor esperado de X en el supuesto del apartado a) del problema. Con respecto al supuesto anterior, sólo cambia el caso $n = N$: ahora Donald sí puede llevarse su propio paraguas con probabilidad $1/N$ y entonces $E'_{N,N} = 0$ (en vez de 1). Así pues, $E'_N = E_n - \frac{1}{N} = H_{n-1}$, donde consideramos $H_0 = 0$.

Por último, llamemos E''_n al valor esperado de X en el supuesto del apartado b) del problema. Donald sale en posición n totalmente aleatoria y las personas anteriores pueden llevarse su propio paraguas, así que

$$E''_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} E'_n = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} H_{n-1} = H_n - 1.$$

Solución enviada por el proponente.

Resolvamos primero el apartado b). Escribimos la variable aleatoria X como una suma $X^{(1)} + X^{(2)} + \cdots + X^{(N)}$, donde $X^{(k)}$ vale 1 si la persona que sale en k-ésimo lugar cambia de paraguas, y vale 0 en caso contrario. Expresando con P las probabilidades y con E las esperanzas,

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{E}(X^{(k)}) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X^{(k)} = 1).$$

Llamemos $[k]$ a la persona que sale en k-ésimo lugar. Usando probabilidades condicionadas, para cada k tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X^{(k)} = 1) &= \sum_{j=1}^{N} \mathrm{P}(X^{(k)} = 1 \mid \text{Donald} = [j])\,\mathrm{P}(\text{Donald} = [j])\\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathrm{P}(X^{(k)} = 1 \mid \text{Donald} = [j]).\end{aligned}$$

Supongamos que Donald es $[j]$, para calcular la suma de la última expresión. Si $j > k$ dicho sumando es nulo porque $X^{(k)} = 0$. Si $j = k$, o sea si Donald es $[k]$, cuando sale se encuentra con $N - k + 1$ paraguas, entre ellos el suyo, y la probabilidad de que tome otro distinto es $(N-k)/(N-k+1)$. En el caso $j < k$, cuando $[k]$ va a salir se encuentra con $N - k + 1$ paraguas de entre los $N - k + 2$ de $\{[j], [k], [k+1], \dots, [N]\}$ (el resto se los han llevado ya, sus dueños o alguien antes que ellos). La persona $[k]$ cambia de paraguas si y sólo si el que falta es el suyo, que tiene la misma probabilidad de faltar que los demás (porque cualquier persona que ha elegido al azar los ha tratado por igual). Así que la probabilidad de ser $X^{(k)} = 1$ es, en ese caso, $1/(N-k+2)$. Por tanto,

$$\mathrm{P}(X^{(k)} = 1) = \frac{1}{N}\Big(\frac{k-1}{N-k+2} + \frac{N-k}{N-k+1}\Big),$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{k-1}{N-k+2}+\sum_{k=1}^{N}\frac{N-k}{N-k+1}\right)\\
&= \frac{1}{N}\left(\left(\frac{1}{N}+\frac{2}{N-1}+\cdots+\frac{N-1}{2}\right)+\left(\frac{N-1}{N}+\frac{N-2}{N-1}+\cdots+\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{N}+\frac{1}{N-1}+\cdots+\frac{1}{2}=H_N-1,
\end{aligned}$$

donde, como es usual, denotamos $H_N = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/N$.

La diferencia en el apartado a) es que en lo anterior únicamente hay que contar, para cada k, el sumando $j = 1$, luego

$$\mathrm{E}(X) = \mathrm{P}(X^{(1)}=1)+\sum_{k=2}^{N}\mathrm{P}(X^{(k)}=1)=\frac{N-1}{N}+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{N-k+2}=H_{N-1}.$$

También resuelto por J. A. Bárcena, A. Castaño, J. Nadal y Á. Velasco. Se ha recibido una solución incorrecta.

Problema 327. *Propuesto por Cornel Ioan Vălean, Teremia Mare, Timiş, Rumanía.*

Evaluar

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}\,dx,$$

donde $\{x\} = x - [x]$ es la parte decimal de x.

Solución enviada por Pablo González Mazón y Jaime Vinuesa Tejedor, Universidad de Cantabria, Santander.

Probaremos en primer lugar que

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}\,dx = 1+\lim_{n\to\infty}\left(\log n-\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}\right).$$

En efecto, con el cambio de variable $\cot x = y$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}\,dx &= \int_0^{\infty}\frac{\{y\}}{1+y^2}\,dy=\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{y-k}{1+y^2}\,dy\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}\log\left(\frac{(k+1)^2+1}{k^2+1}\right)+\sum_{k=1}^{n}k\left(\arctan\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log(n^2+2n+2)+n\arctan\frac{1}{n+1}-\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}\right)\\
&= 1+\lim_{n\to\infty}\left(\log n-\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

Ahora, usando la identidad (véase el Problema 11592 de la revista *The American Mathematical Monthly*, solución en vol. **120** (2013), págs. 662–664)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}-\log n\right)=\frac{i}{2}\log\left(\frac{\Gamma(1+i)}{\overline{\Gamma(1+i)}}\right)=-\arg\Gamma(1+i),$$

resulta

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}\,dx=1+\arg\Gamma(1+i).$$

NOTA. Usando las identidades

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma,$$

donde γ denota la constante de Euler-Mascheroni, y

$$\arctan\frac{1}{k}-\frac{1}{k}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\frac{1}{k^{2m+1}},$$

se puede deducir fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}\zeta(2m+1).$$

De esta forma, la integral propuesta admite la expresión

$$\int_0^{\pi/2}\{\cot x\}\,dx=1-\gamma+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{2m+1}\zeta(2m+1).$$

También resuelto por P. Acosta, P. Perfetti, A. Stadler y el proponente. Se han recibido dos soluciones incompletas y una incorrecta.

PROBLEMA 328. *Propuesto por Neculai Stanciu, Buzău, Rumanía, y Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.*

Sean x, y y z números reales positivos. Probar que

$$\left(\sum_{\text{cíclica}}\sqrt{\frac{x(x+y)}{x^2-xy+y^2}}\right)^2+\frac{\sum_{\text{cíclica}}x(y-z)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)}}\leq 18.$$

Solución enviada por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.

Resulta sencillo probar las desigualdades

$$\frac{x+y}{x^2-xy+x^2} \leq \frac{4}{x+y} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\sqrt{2(x^2+y^2)}} \leq \frac{1}{x+y},$$

para $x, y > 0$. Así, para obtener el resultado propuesto, basta demostrar que

$$2\left(\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}}\right)^2 + \frac{\sum_{\text{cíclica}} x(y-z)^2}{(x+y)(y+z)(z+x)} \leq 9. \tag{1}$$

Como

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} = \sqrt{\frac{x}{(x+y)(z+x)}}\sqrt{z+x},$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{\frac{x}{x+y}}\right)^2 &\leq \left(\sum_{\text{cíclica}} \frac{x}{(x+y)(z+x)}\right)\left(\sum_{\text{cíclica}} (z+x)\right) \\ &= \frac{4((x+y)(y+z)(z+x)+xyz)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.\end{aligned}$$

Así, de la desigualdad anterior, usando la identidad

$$\sum_{\text{cíclica}} x(y-z)^2 = (x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz,$$

obtenemos inmediatamente (1).

También resuelto por P. Perfetti, K. Soto y los proponentes.