
EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María José González

El cuaderno de matemáticas del estudiante suele ser un instrumento habitual en las aulas de matemáticas de muchos lugares del mundo. Este hecho ha podido contribuir a que sea visto como una herramienta natural e intrínseca al aula y al estudiante, y se haya cuestionado poco su influencia y el diferente papel que puede jugar en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. En este artículo se presenta una revisión bibliográfica de las escasas investigaciones en educación matemática centradas en el cuaderno de matemáticas, explicándose los principales resultados obtenidos en esas investigaciones. A partir de esos resultados se aportan reflexiones y recomendaciones generales ligadas al papel del cuaderno de matemáticas en el aula, y en el estudio y aprendizaje del estudiante.

El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido

por

Matías Arce

1. INTRODUCCIÓN

Un cuaderno, un humilde instrumento de papel. Es posible que usted, lector de este artículo, tenga al menos uno cerca en estos momentos. Quizá para anotar ideas que le pueden surgir en cualquier momento y sobre las cuales quiere indagar, testar o empezar a desarrollar escribiéndolas en un papel. O quizá para que quede registro de las mismas, o de otros aspectos relevantes para su trabajo.

En la historia de las matemáticas son célebres algunos cuadernos famosos pertenecientes a matemáticos importantes. Podríamos citar los cuadernos de Ramanujan, en los que el matemático indio iba recopilando los resultados que obtenía de un modo «poco ortodoxo» y difícil de comprender e hilar para los matemáticos de la época ([9]). O el cuaderno que se fue escribiendo en el Café Escocés de la ciudad polaca de Lwów. En él se recogieron las anotaciones de Stefan Banach con los problemas que se generaban y proponían en las reuniones que tenían lugar en dicho

café, y en las que participaban otros matemáticos ilustres como Steinhaus, Lomicki o Ulam ([10]).

Desde una perspectiva escolar, el cuaderno de matemáticas (de ahora en adelante, CM) es un instrumento común del estudiante en las clases de muchos países. La popularización en las aulas escolares del cuaderno data del siglo XIX, en el seno de una situación en la que se buscaba una alfabetización mayor de la población manteniendo los costes. Para favorecer la atención a grupos de mayor tamaño, se sustituyeron los pizarrines de mano por los cuadernos y se hizo un mayor énfasis en una cultura escolar escrita, en un contexto en el que el papel se abarató como materia prima ([17]). Desde entonces, el cuaderno y, en particular, el CM, se ha convertido en un objeto exento de cuestionamiento, que suele verse como un elemento natural e intrínseco a la naturaleza del aula ([33]).

Aquí nos referiremos al CM en un sentido amplio, como el instrumento en el que el estudiante puede escribir anotaciones derivadas de las explicaciones o discusiones que tienen lugar en la clase de matemáticas, y desarrollar, recopilar y revisar su trabajo personal en la asignatura (generalmente a través de la realización de tareas). Este instrumento puede adoptar diferentes formatos (bloc de anillas, conjunto de hojas agrupadas y numeradas...). En todos los casos, el cuaderno y, en particular, el CM, suele constituirse inicialmente como un soporte vacío y flexible que los estudiantes van construyendo y dotando de contenido a lo largo del curso ([4]). Así, la herramienta cuaderno de matemáticas, tenga la forma que tenga, se convierte en un instrumento para el estudiante, a partir de las funciones y de los esquemas de uso del mismo que cada uno adopta y le asigna, y que pueden variar de unos estudiantes a otros (lo que Rabardel denomina génesis instrumental, [26]).

Así, el CM puede aportar información rica sobre muchos aspectos ligados al docente, al estudiante, al contenido abordado en el aula, al modo de abordarlo... Sin embargo, esa ausencia de cuestionamiento del rol que puede jugar el CM en el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes, la propia diversidad de la actividad matemática que potencialmente puede desarrollarse en él según cómo sea la metodología docente del profesor y el posible control que puede ejercer este sobre el CM, pueden ser las causas de que este instrumento haya recibido poca atención en la investigación en Didáctica de la Matemática.

En este artículo pretendo exponer una revisión bibliográfica de algunas investigaciones relevantes en Educación Matemática ligadas al CM. En los siguientes apartados iré desgranando resultados de investigación que nos permiten entender mejor, en la medida de lo posible, el papel y el rol que juega este instrumento. A partir de esos resultados, en el último apartado enunciaré algunas reflexiones y recomendaciones desde un punto de vista docente ligadas a este instrumento en el aula de matemáticas.

2. ¿QUÉ NOS PUEDE APORTAR INVESTIGAR SOBRE EL CUADERNO DE MATEMÁTICAS?

Viñao ([34]) destaca el gran número de investigaciones que pueden llevarse a cabo ligadas al cuaderno escolar: como fuente para estudiar el trabajo del estudiante, o el proceso de enseñanza-aprendizaje llevado a cabo por el profesor en el día a día escolar, como medio para estudiar el currículo y las actividades desarrolladas en la clase, como instrumento de transmisión de valores y actitudes, como medio de expresión personal y subjetiva del estudiante... En particular, el CM es una importante fuente de información sobre el trabajo y sobre el pensamiento matemático de los estudiantes ([13]), así como un medio para que los estudiantes comuniquen y organicen sus conocimientos matemáticos ([20]). Así, el CM contiene información muy valiosa, no solo para los propios estudiantes, sino también para los docentes y los investigadores en Educación Matemática, al permitir tener una visión de conjunto del trabajo matemático del estudiante. No obstante, también es necesario tener presentes sus limitaciones como fuente para la investigación ([4]): el CM no tiene por qué recoger o reflejar todo lo realizado en un aula de matemáticas (como pueden ser las comunicaciones orales, gestualidad...), ni está garantizado que lo trabajado en el CM haya sido comprendido por el estudiante (por ejemplo, puede haberlo transcrito directamente). Además, es necesario situar adecuadamente el estudio del CM dentro del contexto escolar, social, cultural e histórico en el que ha sido producido, para interpretar adecuadamente lo que en él se encuentre.

Como hemos comentado, el CM es un instrumento sobre el cual no han abundado las investigaciones en Didáctica de la Matemática, pero sí se han publicado algunos trabajos sobre temas concretos ligados al cuaderno de matemáticas, o en los que se ha hecho uso del CM como instrumento de investigación. Estos estudios, además de poner de relevancia el interés de analizar y estudiar el CM, nos han aportado algunos resultados y un mayor conocimiento sobre el mismo. Algunos de los temas en los que podemos encontrar más investigaciones publicadas son los siguientes:

- El cuaderno como instrumento para conocer el currículo real o la actividad real que se desarrolla en las aulas de matemáticas.
- La situación del CM dentro de un dominio público o privado del estudiante.
- La inclusión o no del CM en la evaluación de la asignatura de matemáticas y sus posibles efectos.
- Las características de los apuntes o de las anotaciones ligadas al desarrollo de las clases que los estudiantes toman en su CM.

En los apartados 3, 4 y 5 se presentan varias investigaciones relevantes sobre estos temas.

3. EL CUADERNO COMO INSTRUMENTO PARA CONOCER LA ACTIVIDAD REAL EN LAS AULAS DE MATEMÁTICAS

Hay varias investigaciones donde se hace uso del cuaderno del estudiante para llegar a conocer mejor cuál es la actividad real desarrollada en las aulas de matemáticas, especialmente tras la introducción de reformas curriculares importantes. Este tipo de estudios han sido más frecuentes en los últimos años, en especial desde la Historia de la Educación. Es cierto que no es fácil encontrar cuadernos antiguos que, por una u otra razón, hayan sido conservados en alguna colección particular, museo... Así, en muchos casos responden a estudios de caso de algún conjunto de cuadernos particular, lo que obliga a ser cauteloso con las conclusiones extraídas. Pero también es verdad que esos cuadernos suponen prácticamente los únicos testimonios de la posible actividad real en aulas de épocas antiguas, en contraposición con los currículos oficiales, que sí suelen conservarse.

En particular, destacamos tres investigaciones ligadas a la Historia de la Educación Matemática. Hébrard ([17]) detectó un patrón sistemático en los cuadernos franceses, durante la segunda mitad del siglo XIX, al escribir la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal: debajo del enunciado se dividía la escritura en dos columnas, operaciones a la izquierda y explicación verbal de las operaciones y solución a la derecha. En general, se aprecia un mayor interés por la buena organización y presentación del cuaderno que por la precisión del contenido (que, en muchos casos, era copiado).

Los otros dos estudios se sitúan en Brasil, y se hace uso del CM para tratar de evaluar el impacto de algunas reformas curriculares en matemáticas promulgadas en ese país en el siglo XX. Leme y Rodrigues ([19]) utilizan varios CM de estudiantes de Secundaria de distintos momentos del siglo XX para analizar qué huellas pueden hallarse en ellos de la implantación de las ideas de Felix Klein (inicios del siglo XX) y de la llamada matemática moderna (años 50–60). Los CM delataban la ausencia de una adopción real de las ideas propias de ambos movimientos reformistas; y un papel muy diferente del CM: como elemento de mediación entre el aprendizaje del estudiante y el docente en la primera parte del siglo XX, y como guía de referencia de estudio que contiene lo hecho en clase por el docente, en los años 60. El estudio de Lacerda y colaboradores ([18]) analiza el cuaderno de aritmética de una maestra en formación inicial de los años 30. Dicho cuaderno sí que reflejaba la introducción y el desarrollo real en las aulas de formación de maestros de ideas reformistas, basadas en la defensa del papel central del estudiante en su aprendizaje y en el desarrollo de unas matemáticas basadas en la comprensión y la resolución de problemas en contextos prácticos y motivadores.

También existen varios estudios en la actualidad en los que el CM es usado como una fuente para analizar posibles diferencias entre el currículo oficial y el implementado. Estos estudios son más frecuentes en países con resultados mediocres en estudios internacionales de evaluación (PISA, TIMSS). Podemos destacar los estudios de Cueto, Ramírez y León en Perú ([8]), y el de Reeves y Mayor en Botsuana y Sudáfrica ([27]), en cursos finales de primaria. Los resultados presentan coincidencias relevantes, como el énfasis en tareas aritméticas y de baja demanda cognitiva (basa-

das en memorizar o reproducir hechos o procedimientos) observado en los CM, así como una formación muy pobre del profesorado, que tiende a impartir aquello que domina y que no siempre aporta una retroalimentación adecuada a las resoluciones de las tareas de sus estudiantes.

4. LA SITUACIÓN DEL CUADERNO DE MATEMÁTICAS EN EL AULA Y EN LA EVALUACIÓN

La propia naturaleza del cuaderno hace que sea una herramienta muy flexible, que puede tener una posición y un desarrollo muy diferente según cuál sea su papel en la metodología del profesor y la visión que tengan del mismo tanto el profesor como cada estudiante. El cuaderno puede situarse en un continuo que abarca desde la libertad total del estudiante de sus contenidos y expresión hasta su más férreo control ([4]). Durante el siglo XIX y gran parte del siglo XX, era habitual que el cuaderno estuviera sometido a un fuerte control por parte del docente y que también se usara para inspeccionar su labor en el aula ([4]). En esa época, el cuaderno servía para transmitir contenidos a través de actividades de tipo reproductivo y los estudiantes apenas tenían oportunidades para trabajar libremente con él. Durante el siglo XX han ganado protagonismo metodologías en las que el estudiante se sitúa en el centro del aprendizaje. En ellas, el cuaderno puede verse como un lugar donde el estudiante puede, por ejemplo, recoger los diferentes intentos o etapas seguidas al desarrollar una actividad o problema, comunicar sus ideas y reflexionar sobre ellas, reflexionar sobre su propio trabajo, aprendizaje y comprensión... ([15]).

Así, el papel y el posicionamiento del cuaderno, y en particular del CM, puede ser muy variado. Para facilitar la reflexión sobre cuál es el papel del CM en la vida matemática del estudiante y en su aprendizaje, Fried y Amit ([13], p. 101) adoptaron una valiosa distinción entre actividad de dominio público y actividad de dominio privado:

- Actividad de dominio público: actividad en la que un estudiante es responsable de la misma ante el profesor y el resto de compañeros, y existen tanto obligaciones y ataduras derivadas del seguimiento de prácticas comunes como una necesidad de comunicar formalmente lo realizado en la actividad.
- Actividad de dominio privado: actividad en la que no existe esa responsabilidad ante profesores y compañeros, ni hay restricciones ligadas a prácticas comunes, siendo libre el estudiante para explorar, dar marcha atrás, reflexionar...

En general, el propio cuaderno y las actividades que en él se realizan pueden encuadrarse en uno u otro dominio según cuál sea la práctica pedagógica ligada a ellas. Por ejemplo, no es lo mismo que un docente revise y evalúe directamente las tareas propuestas a los estudiantes y desarrolladas en el CM, a que no lo haga. Esta diferencia puede tener consecuencias muy importantes en el modo en el que los estudiantes trabajan con su CM o plasman en él el trabajo que han realizado, y en la función que el CM cumple para ellos.

En el estudio de Fried y Amit ([13]) se analizaron los CM de los estudiantes de dos aulas israelíes del equivalente a 2.º de ESO. En las dos aulas sucedía algo similar: los

docentes decían dar libertad a sus estudiantes para usar sus CM, pero en realidad ambos ejercían un control sobre ellos que los situaba en un dominio público. Ese control se evidenciaba a través de indicaciones sobre qué anotar en las explicaciones, el modo en que recoger las tareas resueltas (de forma nítida y correcta, sin intentos de resolución en falso ni correcciones), la inspección periódica de cada CM... En entornos así, el CM de cada estudiante parece que debe ser imagen y semejanza del CM «ideal» que cada profesor tiene en su mente. Esto provocó que los estudiantes no anotaran comentarios o reflexiones que pudieran considerar relevantes durante las explicaciones (pero no enfatizadas por el docente) o que no recogieran en su CM sus tentativas de resolución de las tareas o sus dudas, por ejemplo; aspectos que serían más propios de una situación del CM dentro del dominio privado del estudiante.

Algunos estudios proponen formas concretas de organización y de trabajo en matemáticas con el cuaderno ([24], [25]), que todo el alumnado ha de seguir. Aunque algunas pautas generales podrían ser útiles, sobre todo en edades tempranas en las que los estudiantes son menos autónomos, esto también situaría lo realizado en el CM dentro de un dominio público, y limita la flexibilidad del CM para poder adaptarse a la diversidad, necesidades y modos de trabajo de cada estudiante.

Así, en el CM existe una tensión entre su visión como el lugar en el que los estudiantes reflexionan, elaboran y desarrollan sus pensamientos, elementos más propios de un dominio privado, con el posible tratamiento público del CM como instrumento para revisar su trabajo o para evaluar el desarrollo de su aprendizaje ([12], [13]). Una restricción del CM al dominio público podría conllevar que los estudiantes no vieran el pensamiento, la reflexión propia o la exploración de posibles soluciones a problemas como algo legítimo en matemáticas y malinterpretaran la naturaleza de la disciplina. Por otro lado, también es cierto que existe la necesidad de comunicar los avances obtenidos ante una comunidad (docente y compañeros), haciendo uso de unos signos y de un lenguaje compartido en matemáticas. Por tanto, la propia actividad matemática conjuga una componente privada con una pública ([12]). Esa dualidad se refleja en un instrumento usual de trabajo del estudiante como es su CM, puesto que puede ser visto como un lugar en el que indagar o reflexionar sobre los procesos de resolución de un problema, o solo como el lugar en el que comunicar los resultados positivos obtenidos en ese proceso. El docente de matemáticas, al menos, ha de ser consciente de la existencia de esa dualidad.

En relación con esta dualidad, encontramos algunas investigaciones sobre la naturaleza del trabajo del estudiante cuando el CM se sitúa en un dominio privado, las concepciones sobre el papel y el rol del CM, y qué papel debe jugar el CM en la evaluación del estudiante.

4.1. NATURALEZA DEL TRABAJO DEL ESTUDIANTE EN UN CM SITUADO EN UN DOMINIO PRIVADO

Es habitual que una parte del trabajo en la asignatura de matemáticas sea el trabajo individual del estudiante con diferentes actividades ([30]), y que el CM sea el lugar habitual para desarrollar ese trabajo. Sin embargo, son especialmente escasas las investigaciones que se cuestionan y analizan qué tipo de trabajo desarrollan los

estudiantes en sus CM cuando estos se ubican en un dominio privado, en el que los estudiantes son libres de trabajar como quieran con el CM y el docente únicamente los ve cuando el estudiante quiere compartir algún aspecto (duda, tarea. . .).

Una investigación reciente y relevante al respecto es la de Yau y Mok ([35]), en una clase de Hong Kong con estudiantes del equivalente a 2.º de ESO, y con una metodología de tipo magistral, en la que se seguía un patrón habitual de explicación y ejemplos del docente, y propuesta posterior de tareas a los estudiantes. Yau y Mok analizaron la resolución de las tareas hechas por los estudiantes en sus CM, comparando estas con los modelos que el docente había realizado a modo de ejemplo. Se detectó la presencia en los estudiantes de una imitación total o parcial, en gran parte de los casos, de la resolución realizada previamente por el docente en sus ejemplos prácticos. Ese grado de imitación, además, no dependía de la dificultad cognitiva de la tarea (en tareas tanto de conocer y reproducir, como de aplicar, como de razonar). Dados los buenos resultados de Hong Kong en evaluaciones educativas internacionales, los autores aportan una interpretación ligada a la filosofía y la cultura del entorno, en la que los docentes son considerados como modelos de comportamiento y se da mucha importancia al trabajo como camino para llegar al éxito. Así, sus ejemplos tienen un alto impacto en los estudiantes, que desarrollan un gran número de tareas, resueltas casi siempre de forma completa. Por tanto, la decisión de imitar las ejemplificaciones docentes no tiene por qué ligarse en este caso a que los estudiantes sean pasivos y se dediquen a repetir procedimientos, sino que puede responder a una propia elección de los estudiantes en ese contexto.

En mi tesis doctoral ([1]) se analizaron también las producciones de los estudiantes en sus CM, en cuatro clases de 1.º de Bachillerato y durante el bloque de contenidos de análisis (funciones, límites y derivadas). En estas aulas, la metodología docente también fue magistral participativa, utilizando el libro de texto únicamente como repositorio de tareas, y con patrones similares a los del estudio de Yau y Mok ([35]). El análisis del trabajo de las tareas desarrollado por los estudiantes participantes evidenció que su volumen de trabajo era más desigual que en el estudio en Hong Kong. Tras un análisis clúster basado en las características e interpretación de las producciones de cada estudiante en cada unidad (funciones, límites y derivadas), se detectaron dos grandes perfiles:

- Un grupo de producciones con un alto número de actividades intentadas por los propios estudiantes (lo que daba lugar a la existencia de errores y a que en ocasiones se rehicieran tareas mal resueltas), con una cierta presencia de explicaciones y comentarios sobre las tareas y, en general, una buena presentación.
- Un grupo de producciones donde las actividades intentadas por los estudiantes son más escasas, se tiende a transcribir directamente las resoluciones realizadas en la clase durante las correcciones, hay un menor volumen de explicaciones y comentarios sobre las mismas y la presentación es más pobre.

No obstante, dentro de estos dos grandes perfiles no todas las unidades destacaron por las mismas características, lo que dio lugar a subperfiles más específicos que pueden consultarse en [1]. Además, encontramos estudiantes con un estilo de producción más marcado, pero otros estudiantes tienen un patrón de trabajo práctico

más variable, dependiendo de sus conocimientos previos y habilidades sobre dicho tema, o de la cantidad de tareas propuestas por el docente, por ejemplo.

4.2. ROL DEL CUADERNO DE MATEMÁTICAS. PAPEL DEL CM EN LA EVALUACIÓN DEL ESTUDIANTE EN LA ASIGNATURA

El papel y el rol asignado al CM están influenciados, indudablemente, por su situación en un dominio público o privado. Su situación en un dominio público llevará al CM a un rol de revisión y de control de lo realizado, primando los resultados. Su situación en un dominio privado lo acercará más a un rol como instrumento de reflexión personal y preparación para el estudiante.

Aunque también son muy escasas, hay algunas investigaciones acerca de las concepciones de profesores y estudiantes sobre el CM. Uno de ellos es el de Blochs ([6]), que plantea una dicotomía interesante entre una concepción del CM como una obra que refleja el trabajo desarrollado por el docente en un aula o como un instrumento del que el estudiante se apropia para mejorar su aprendizaje a través de unos esquemas de uso personales asociados al mismo. En su estudio, en cinco clases francesas del equivalente a 3.º de ESO, este autor detectó tres grandes concepciones en profesores y estudiantes sobre el cuaderno donde los estudiantes solían recoger contenidos teóricos ([6], pp. 188–190):

- Cuaderno como una obra maestra del profesor: el docente controla tanto la forma como los contenidos del CM, que deben ser aprendidos por los estudiantes. Apenas hay personalizaciones por parte de estos.
- Cuaderno como obra efímera o instantánea del profesor: la responsabilidad sobre el CM depende ampliamente del profesor, aunque sea escrito por los estudiantes. El CM y su elaboración son concebidos como un fin en sí mismo por el docente, que incita a los estudiantes, de un modo genérico, a hacer uso del mismo en su aprendizaje.
- Cuaderno co-construido entre profesor y estudiantes: la producción del CM es colectiva, en la que el estudiante tiene una responsabilidad real, lo que ayuda a que el CM se convierta en un instrumento para su aprendizaje.

Esa restricción a la recogida de contenidos teóricos pudo influir en las concepciones detectadas, en las que el docente tiene una alta influencia en el CM resultante, y en las que los estudiantes evidenciaron dificultades para poder convertir el CM en un instrumento de aprendizaje para ellos.

En mi trabajo de tesis doctoral ([1]) se realizaron entrevistas a un número importante de los estudiantes participantes, que permitieron detectar algunas concepciones sobre el CM y su rol en el aprendizaje de las matemáticas. Todos los estudiantes consideraban necesario tener un CM, aunque no todos daban las mismas razones, apareciendo una dualidad entre la importancia del contenido y de registrar los aspectos más importantes, y la importancia de una buena organización y presentación del mismo. Además de para anotar los aspectos teóricos más importantes, se detectaron dos visiones en relación con las actividades: el CM como lugar en el que

hacer actividades o el CM como lugar en el que registrar actividades para que queden ahí recogidas. Algunos estudiantes conjugaban ambas visiones, pero otros solo otorgaban al CM uno de los dos roles, obviando el otro. Los estudiantes que daban importancia al registro tienden a utilizar el CM como un instrumento de referencia para el estudio de la asignatura, a través de la revisión y comprobación de las tareas recogidas en él a lo largo del tema, con un perfil de estudio más cercano a la memorización y a la reproducción de contenidos y procedimientos.

Ligado al rol del CM, un tema controvertido es si debe tener o no un papel en la evaluación del estudiante en la asignatura y, en caso afirmativo, qué papel. La inclusión del CM en una evaluación sumativa, con un determinado peso en la evaluación a través de una calificación, sitúa al CM dentro de un dominio público. Como indican Fried y Amit ([13]), el hecho de que exista una calificación del docente introduce una influencia importante. En cierta medida, predetermina qué es lo que el estudiante debe hacer en su CM, puesto que tratará de reflejar aquello que el docente valore positivamente y evitar aquello que valore negativamente. Todo ello quita libertad y flexibilidad al estudiante para optimizar el cuaderno como instrumento para su aprendizaje.

No obstante, eso no quiere decir que el docente no vea el trabajo que los estudiantes desarrollan en su CM. Por ejemplo, Fried y Amit ([13]) defienden que el CM se sitúe como herramienta para la autoevaluación del estudiante, a través de compartir lo realizado en él con el docente, y este haga el papel de guía, apoyo o retroalimentación, en un proceso de evaluación continua. Masingila y colaboradores ([20]) describen un ejemplo de uso del CM como instrumento individual del alumnado tras periodos de trabajo grupal, a través de la realización de tareas y de reflexión del proceso seguido en el grupo. La revisión de las respuestas por parte del docente puede ayudar tanto a conocer mejor el aprendizaje desarrollado por el estudiante, la implicación y participación en el trabajo del grupo o la capacidad para reflexionar sobre el trabajo desarrollado. Por tanto, el docente no debe descuidar la información potencial y útil que le puede proporcionar que el estudiante comparta con él lo que realiza en su CM, aunque haciéndolo de tal forma que el estudiante no se vea constantemente evaluado cada vez que presenta su trabajo al docente.

5. INVESTIGACIONES SOBRE LOS APUNTES QUE LOS ESTUDIANTES TOMAN EN CLASES DE MATEMÁTICAS

Un proceso que también suele tener lugar en los cuadernos de matemáticas, especialmente en los niveles universitarios y preuniversitarios, es la posible escritura de anotaciones por parte del estudiante durante la explicación de contenidos del docente en metodologías de tipo magistral participativo. La presentación suele estar basada en la exposición oral del docente, con posibles aportaciones de los estudiantes, generalmente a preguntas o sugerencias de participación del docente, o consulta de dudas. El docente puede ayudarse en la exposición de otros medios, como la pizarra (de tiza o digital), diapositivas, imágenes, material extraído de Internet u otros recursos más específicos.

Esta toma de anotaciones o de apuntes puede ser considerada, como afirma Espino ([11]), como una tarea híbrida, al ser necesario tener presente y articular diferentes capacidades, como las asociadas a la comprensión del discurso, a la lectura y a la escritura. Así, la toma de apuntes es considerada como una actividad compleja, que precisa de un alto nivel cognitivo, al relacionar la comprensión de la información presentada y los procesos de análisis y síntesis de la misma ([11], [29]). Sin embargo, no siempre resulta ser suficientemente valorada y considerada por docentes y estudiantes.

La revisión de investigaciones sobre toma de apuntes revela la existencia de dos grandes concepciones o funciones ligadas a esta actividad por docentes y estudiantes ([5], [16], [32]):

- Funciones ligadas al propio proceso de tomar apuntes: contribuye a mantener la atención y la concentración en la clase, facilita la organización y estructuración del contenido presentado, y la detección y comprensión de los aspectos más importantes, y es una oportunidad para parafrasear y elaborar la información presentada (lo que facilita su comprensión y recuerdo).
- Funciones ligadas al producto resultante de tomar apuntes: permite recordar y revisar la clase y la información recogida durante la misma, sirve de ayuda para estudiar y preparar tareas y exámenes, y los apuntes generados son una muestra ante el docente del esfuerzo desarrollado por los estudiantes.

Así, tradicionalmente han existido dos hipótesis sobre la toma de apuntes según cuál fuera la función considerada como predominante: la hipótesis de codificación, que da más importancia al proceso de elaboración de las notas, o la hipótesis de almacenamiento, que da más trascendencia a la revisión posterior de las notas recogidas. Esta última hipótesis suele ser preponderante en las visiones de los estudiantes.

Sin embargo, la toma de apuntes no puede verse hoy con los mismos ojos que hace unos años. Hoy en día, el acceso a diferentes fuentes de información y conocimiento es mucho mayor, y más fácil, así como las posibilidades de comunicarse, por ejemplo, con los compañeros de clase. En este contexto, la labor del docente se mueve de poseer y transmitir un determinado conocimiento a articular el mismo y a guiar su desarrollo, a partir de las muy diversas fuentes de información que pueden estar a nuestro alcance y que pueden ser proporcionadas o utilizadas en un aula. Los procesos de codificación de la información asociados a la actividad de tomar notas ganan mayor relevancia en este tipo de entornos, lo que supone un cambio de paradigma del que los estudiantes no suelen ser conscientes ni para el cual suelen estar preparados. Por ejemplo, es habitual que, ante tareas o situaciones en las que los estudiantes cuentan con varias fuentes de información a su disposición, predominen procesos de recogida literal de la información y una yuxtaposición no conectada de informaciones de diversas fuentes ([14]).

¿Qué características tienen las notas tomadas por los estudiantes en una clase? Es claro que la respuesta depende de muchos factores, como son el propio estudiante y sus conocimientos e intereses, la metodología docente y la naturaleza del contenido ([22], [32]). En sus estudios con universitarios, Monereo y colaboradores ([22]) distinguen entre estudiantes exhaustivos (que recogen todas o gran parte de las unidades

de información de que consta una clase), selectivos (recogen un menor número de unidades de información, pero sí todos los temas tratados) e incompletos (recogen un menor número de unidades de información, con temas ausentes). Además, estos mismos autores distinguen entre una toma de apuntes personalizada o literal, según exista o no cierta elaboración y organización de la información por parte del estudiante, y expresiones o recursos personales.

Se han llevado a cabo muchos estudios tratando de analizar cómo son los apuntes tomados por los estudiantes. Sin embargo, muchos de ellos se encuadran en una perspectiva psicopedagógica, en la que el tipo de contenido tratado no se considera como variable de investigación. Los estudios sobre características de los apuntes tomados en clases de matemáticas son mucho más escasos ([2], [3], [21], [28]).

La investigación de Mercado ([21]) tiene lugar en un aula de 4.º de ESO, en un contexto de resolución de problemas. En ella se analiza cómo plasma cada estudiante en su CM la resolución de un problema que fue planteado como tarea para casa y que fue posteriormente corregido en el aula. Este autor detecta una amplia diversidad en las anotaciones y sus características. Hay estudiantes que tan solo copiaron el sistema de ecuaciones que resolvía el problema propuesto y su resolución. Otros estudiantes mezclaron, de modo desordenado, su intento de resolución del problema con la copia de la solución realizada en la pizarra, sin señalar algunos errores y sin explicar ni justificar el proceso seguido. Por último, hubo estudiantes que se apoyaron en gráficos y en anotaciones personales para explicar el proceso seguido, tratando de aclarar sus dudas e intentando que el problema resultara más significativo para ellos. En un contexto de resolución de problemas, las anotaciones registradas deberían tener presentes aspectos importantes como la distinción entre planteamiento y resolución, la posible aparición de razonamientos no fructíferos, la justificación de los procedimientos o la posible existencia de diversos métodos de resolución, aspectos que muchos estudiantes no tuvieron presentes.

El estudio de Rensaa ([28]) también es un estudio de caso, focalizado en una alumna universitaria de ingeniería en asignaturas de cálculo y álgebra lineal. En un contexto docente con una metodología expositiva apoyada en diapositivas, Rensaa analiza los apuntes tomados por esta alumna y su impacto en su estudio de las matemáticas y en el aprendizaje logrado. Se detectó la falta de integración por parte de la alumna de la teoría presentada por el docente a través de diapositivas con las notas que tomaba en las exposiciones, que se reducían a los ejemplos desarrollados por el docente. Esas notas se mostraron como un elemento importante de estudio de la alumna. En muchas tareas de evaluación, la alumna mostró dificultades de comprensión de los conceptos y recurrió a reproducir los ejemplos tomados, evidenciando un aprendizaje de poca calidad.

Dedicaré un subapartado para dos estudios derivados de mi tesis doctoral ([1]) que están ligados a las anotaciones realizadas por los estudiantes en sus cuadernos de matemáticas y en el que se busca conocer mejor qué es lo que los estudiantes consideran como relevante a través de su decisión de anotarlo. Estas anotaciones fueron especialmente relevantes dado que, al igual que en el estudio de Rensaa ([28]), suponían un material fundamental de estudio de la asignatura de matemáticas para los estudiantes.

5.1. ANOTACIONES TOMADAS EN LA PRESENTACIÓN DE UN TEMA DE CARÁCTER PROCEDIMENTAL (REGLAS Y TÉCNICAS DE DERIVACIÓN)

Este estudio está publicado en *Enseñanza de las Ciencias* ([3]). Se decidió la elección del tema de estudio (reglas y técnicas de derivación) por el interés de su desarrollo en las clases por los docentes, ya que fue el único apartado del bloque de análisis matemático en el que algunos docentes incluyeron justificaciones de varios resultados.

En esta investigación se realizó una comparación entre el contenido expuesto por cada docente y las notas tomadas por cada estudiante en su CM. Para ello, se aplicaron técnicas de análisis de contenido, basadas en cuatro elementos (enunciados, ejemplos de aplicación, justificaciones y otros comentarios) y en la construcción de mapas de elementos y relaciones, una especie de mapas conceptuales que muestran los elementos y los procesos de aplicación y demostración que relacionan unos con otros en cada caso. Pueden verse ejemplos de estos mapas en el artículo publicado ([3], pp. 154–156, 164 y 165). Resumimos a continuación los resultados principales derivados de este estudio comparativo y la interpretación realizada de dichos resultados.

Alrededor de un 30 % de los estudiantes mostraron un comportamiento exhaustivo en el registro de enunciados y ejemplos de aplicación, especialmente en dos aulas en las que el docente siguió un patrón continuado de exposición de una regla seguida de un ejemplo de aplicación. En el resto de los casos, se detectó un amplio espectro de perfiles intermedios. Podemos destacar estudiantes que recogen todas las reglas pero que son selectivo-estratégicos en la recogida de ejemplos de aplicación (no recogen todos los ejemplos de aplicación de una misma regla si se hace más de uno), estudiantes que anotan gran parte de las reglas pero apenas recogen ejemplos de aplicación y estudiantes que recogen algún ejemplo sin anotar la regla que pretende ilustrar.

La anotación de las justificaciones de reglas fue, en general, menor que la de enunciados y ejemplos y, en muchos casos, su registro fue incompleto o parcial. Aportamos tres razones para interpretar este hecho. Una es la dificultad para simultanear el seguimiento del proceso de demostración y su registro. Otra es la falta de concienciación en los estudiantes de la diferencia entre la derivada en un punto (resolución del límite del cociente incremental en un punto genérico) y la construcción de la función derivada, aspecto no recogido por muchos estudiantes. El tercero es la posible dificultad de los estudiantes para distinguir entre diferentes procesos y elementos matemáticos e identificar el papel que juega la justificación.

La anotación de comentarios, entendidos como observaciones que enfatizan la relación entre diferentes enunciados o su aplicabilidad, o destacan otros elementos relevantes, fue también muy reducida. La recogida fue mayor en el aula donde el docente dictó algunas de estas observaciones, en el resto de casos apenas se recogieron en los CM. Varios estudiantes también añadieron alguna anotación personal, en la mayoría de casos a modo de ayuda o aclaración de la aplicación de algunas reglas. Únicamente en una alumna se detectó una anotación personal de distinto carácter, que interpretamos como un intento de relacionar dos reglas de derivación tratadas

de modo independiente en el aula: las reglas para derivar la función identidad y cualquier función potencial. Se muestra este comentario personal en la figura 1.

The image shows a handwritten note on a grid background. It contains the following text: $x^n = 1 \cdot x^{n-1}$ and $1 \cdot 1 = 0$. The x^n has a circled 'n' as a superscript. The x^{n-1} has an $n-1$ as a superscript. The expression $1 \cdot 1 = 0$ is written to the right of the first expression.

Figura 1: Comentario de carácter relacional de una alumna en su CM.

En general, la representación simbólica fue la mayoritaria en las anotaciones recogidas por los estudiantes, en muchos casos tomada de lo anotado por los docentes en la pizarra. Apenas existieron verbalizaciones de reglas y comentarios. En este estudio se reafirman comportamientos que encontró Nogueira ([23]) con alumnado universitario en varias asignaturas. Ante dos sistemas semióticos simultáneos, como son la escritura en la pizarra y el discurso oral del docente, en los estudiantes prevalece el primero, infiriendo que el profesor da más importancia a lo allí escrito. Esto suele provocar dificultad para identificar conexiones o relaciones, que suelen situarse en el discurso oral del docente. Así, en un número importante de estudiantes, las notas muestran un predominio de aspectos algorítmicos o procedimentales, y una baja presencia de justificaciones, observaciones y explicaciones ligadas al uso o no de estas reglas y procedimientos, y a la relación entre ellos.

Muchos estudiantes afirmaron que el CM era un instrumento básico para su estudio en matemáticas. A pesar de que una exposición teórica suele ser unidireccional (del docente al estudiante) y muestra contenido ya construido, los estudiantes exhibieron una falta de integración de dos puntos de atención (pizarra y discurso oral del docente), optando generalmente por centrar su atención en uno de ellos, teniendo poco en cuenta la naturaleza e importancia del contenido presentado en cada medio. Este hecho es preocupante, más teniendo presente la adopción cada vez mayor de metodologías y entornos de trabajo más dinámicos, con una mayor cantidad de focos de atención de posible conocimiento, como pueden ser las intervenciones y discusiones entre compañeros, la introducción de más recursos...

5.2. ANOTACIONES TOMADAS EN LA PRESENTACIÓN INICIAL DE UN CONCEPTO RELEVANTE (LÍMITE DE UNA FUNCIÓN)

Este estudio está publicado en *PNA* ([2]), y se centra en un concepto muy importante en el análisis matemático, como es el concepto de límite de una función. El desarrollo de la comprensión de este concepto en los estudiantes supone un proceso largo y complejo ([7], [31]), como prolongado fue el periodo histórico hasta llegar a su conceptualización. La introducción del concepto suele hacerse en 1.º de Bachillerato, haciendo uso generalmente de definiciones descriptivas basadas en aproximaciones de carácter dinámico. Así fue en las cuatro aulas participantes en la tesis doctoral, a

través de exposiciones de los docentes que combinaban el discurso oral con la utilización de la pizarra, y los límites en un punto y en el infinito. Los docentes hicieron uso de ejemplos de límites en funciones definidas simbólicamente y gráficamente, junto con alguna definición o explicaciones descriptivas de tipo dinámico en cada ejemplo concreto, todas ellas basadas en aproximaciones de las variables dependiente e independiente.

En este estudio se realizó un análisis de las anotaciones tomadas por cada estudiante en su CM, fundamentado en el significado del concepto de límite que queda reflejado en las notas de cada uno. Exponemos un resumen de los resultados principales obtenidos.

Se detectó una diferencia muy grande en la cantidad de ejemplos recogidos según las clases, asociado al diferente papel de los ejemplos. En las tres aulas en las que la presentación se articuló directamente a través de ejemplos y su explicación, la anotación de estos fue muy alta (88.4 %), a diferencia del aula en la que se dio una definición descriptiva general inicial de límite y los ejemplos servían para ilustrar la misma en casos concretos (la anotación bajó al 33.3 %). Las anotaciones de carácter simbólico, tomadas de la pizarra, se compusieron de la anotación de cada límite y su resultado. Las referencias al significado del concepto las encontramos en las posibles anotaciones verbales y registros gráficos de los estudiantes, por lo que nos centramos en estos aspectos.

En relación con las anotaciones verbales, encontramos cinco tipos de notas tomadas durante la presentación, con un significado progresivamente más próximo al concepto de límite. Se explican a continuación, mostrando un ejemplo de cada tipo en la figura 2:

- a) Anotaciones indicando el nombre de elementos o cómo se lee una notación, pero sin menciones a su significado. Ejemplo en la figura 2: «Se lee: límite cuando x tiende a infinito de $f(x)$ ».
- b) Anotaciones de hechos concretos o convenios sobre el límite sin que sean explicados ni justificados. Ejemplo en la figura 2: «No hay límite», en un límite que no existe.
- c) Anotaciones que aluden a un proceso dinámico tan solo en la variable independiente, bien indicando únicamente un movimiento o bien indicando el valor concreto de la variable independiente al que se produce la aproximación. Ejemplo en la figura 2: «La x se acerca a 0».
- d) Anotaciones que aluden a un proceso dinámico tan solo en la variable dependiente, con la misma diferenciación del punto anterior. Ejemplo en la figura 2: «Los valores de $f(x)$ pueden superar cualquier valor».
- e) Anotaciones que aluden a un proceso dinámico en ambas variables, y muestran una incipiente coordinación entre ellas. Ejemplo en la figura 2: «A lo que tienden las imágenes de la función $f(x)$ cuando la variable independiente x tiende a algo».

En algunas de las representaciones gráficas de funciones también se añadieron algunas marcas ligadas, en mayor o menor medida, al significado del concepto de

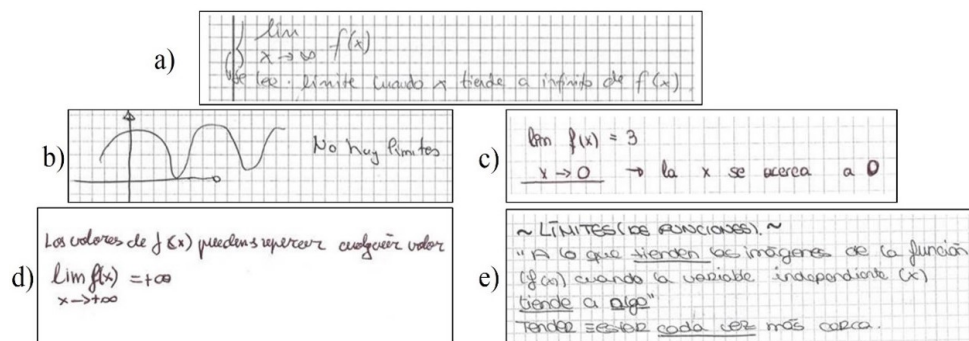


Figura 2: Ejemplos de anotaciones verbales en los CM sobre el concepto de límite.

límite. Se detectaron tres tipos de marcas, progresivamente más cercanas al concepto de límite, que se explican a continuación y se ilustran con un ejemplo en la figura 3:

- Marcas que destacan información de la propia función: bien destacan uno o varios puntos de la función (y sus coordenadas) sin relacionarlos ni evidenciar un proceso de aproximación, bien dibujan las posibles asíntotas de la función.
- Trazado de flechas que parecen indicar un movimiento, un sentido de recorrido en la gráfica de la función o en alguna de las variables.
- Marcas que reflejan la superación de una cota fijada en la variable dependiente, en una función con límite infinito (aspecto más cercano a una concepción métrica y estática del concepto de límite).

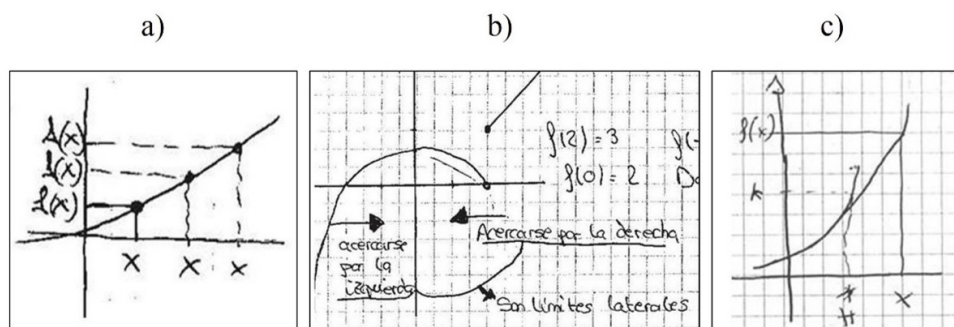


Figura 3: Marcas ligadas al concepto de límite en representaciones gráficas de los CM.

Las decisiones de los estudiantes sobre qué aspectos registrar y cómo hacerlo permiten conjeturar y pueden condicionar la idea de límite que los estudiantes pueden inferir, especialmente porque para muchos esas notas son su instrumento principal de estudio. En términos globales, se observa una anotación muy escasa de ideas

ligadas a la coordinación de aproximaciones en las dos variables, que es una idea fundamental en la comprensión del concepto de límite. Las anotaciones o marcas ligadas al concepto de límite enfatizan en muchos casos el mero hecho de que exista un movimiento, o el proceso de aproximación únicamente en una de las variables.

Además, las anotaciones verbales registradas supusieron la mayor fuente de aspectos ligados al significado del concepto de límite, y el aspecto más variable en su presencia entre unos estudiantes y otros (al tomarse o no del discurso oral del docente, y no siempre de una manera adecuada). Es difícil que aquellos estudiantes con anotaciones registradas compuestas únicamente de gráficas y ejemplos simbólicos transcritos puedan desarrollar a partir de su estudio una conceptualización inicial adecuada del concepto de límite. Seguramente, estos estudiantes infieran varias ideas y reglas basadas en formas concretas de actuar para obtener el resultado del límite en determinados modelos de función o situaciones concretas, pero estas estén lejanas de permitirles poner los cimientos para poder desarrollar una comprensión adecuada del concepto.

6. ALGUNAS REFLEXIONES Y RECOMENDACIONES DOCENTES DERIVADAS DE LOS RESULTADOS DE INVESTIGACIÓN

Los resultados expuestos a partir de la revisión bibliográfica efectuada ponen de manifiesto que el cuaderno de matemáticas no puede ser visto como un instrumento transparente en los procesos ligados a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, a pesar de su presencia natural y generalizada. De ahí la necesidad de continuar investigando para clarificar su papel y su rol en el aprendizaje matemático del estudiante.

El CM es un lugar en el que cada estudiante puede ir recogiendo el trabajo que va realizando a lo largo de la asignatura. Sin embargo, las características del trabajo plasmado y el modo en que se plasma dicho trabajo suelen conllevar una importante complejidad en su interpretación. Por ejemplo, ante la resolución de un problema matemático en su cuaderno de matemáticas, un estudiante puede optar por incluir la gestación de las ideas clave que le condujeron a encontrar la solución (pudiendo hacer mención a intentos no fructíferos, pero de los que extrajo enseñanzas importantes), puede explicar detalladamente la resolución obtenida (sin incluir las indagaciones conducentes a la misma), o puede indicar la resolución de forma telegráfica, sin apenas explicaciones y sin mostrar el proceso seguido hasta su obtención. Esa decisión puede ser consecuencia de múltiples factores.

El docente de matemáticas ha de ser, al menos, consciente de algunos de esos factores para ayudarse en esa interpretación y poder descubrir cuál es el rol y el papel que los estudiantes dan a su CM, y qué papel está jugando en su aprendizaje.

Uno de ellos es el papel que ejerce el cuaderno de matemáticas como instrumento de mediación entre lo que ha sucedido en el aula de matemáticas (que los estudiantes reflejan en su CM) y su aprendizaje de las matemáticas en niveles universitarios y preuniversitarios. Por ejemplo, en muchos casos las anotaciones tomadas en el CM se constituyen en un instrumento de estudio muy importante para los estudiantes,

aduciendo una mayor cercanía del mismo a lo hecho en clase que, por ejemplo, el libro de texto. El cuaderno es visto como un producto derivado de los contenidos presentados en clase, lo que lleva aparejadas varias problemáticas.

Los resultados evidencian que la selección de cada estudiante sobre qué anotar en su CM depende en muchos casos del medio de exposición seleccionado por el docente, y no de la naturaleza del contenido expuesto. En las clases magistrales participativas, donde suelen combinarse dos o tres medios (explicaciones e intervenciones orales, escritura en la pizarra, posible uso de diapositivas u otros recursos digitales), los estudiantes tienden a recoger mayoritariamente lo escrito en la pizarra, pocos o ningún aspecto del discurso oral, y suele existir poca integración de la información.

Es cierto que los estudiantes pueden tener poca autonomía aún para discernir los aspectos relevantes en la introducción de un nuevo contenido matemático, pero las investigaciones también muestran dificultades para identificar elementos y procesos matemáticos relevantes y su papel en la construcción del contenido. Por ejemplo, cuándo un enunciado puede ser una definición o no de un concepto, el diferente papel que tienen un ejemplo y un contraejemplo para validar o refutar una afirmación, la necesidad de justificar una conjetura mediante razonamiento lógico-deductivo, el valor de conocer y relacionar diversos modos de representar objetos matemáticos o de establecer conexiones entre diferentes objetos... Es necesario que los docentes de matemáticas aprovechen las oportunidades que genera el trabajo con algunos contenidos para desarrollar progresivamente conocimiento sobre la propia práctica matemática. Por ejemplo, la geometría sintética presente en la Enseñanza Secundaria es especialmente útil para ayudar a identificar y construir definiciones, conocer el rol de los ejemplos o realizar las primeras pruebas de conjeturas geométricas. Un mayor conocimiento de la práctica matemática podría contribuir a que los estudiantes tomaran notas teniendo presentes en sus decisiones la naturaleza del contenido presentado y el rol de los diferentes elementos.

Habitualmente, el docente suele utilizar la pizarra para escribir aspectos simbólicos o ilustrar el desarrollo de ejemplos asociados a la aplicación de procedimientos, también de forma simbólica. Dada la prevalencia de este medio en las notas tomadas, los estudiantes asignan más importancia a estos aspectos y suelen ser la base de su estudio. Ambos hechos fomentan en ellos una concepción de las matemáticas de naturaleza operacional, y no conceptual, en la que cada concepto se identifica con los procedimientos ligados a él que el estudiante debe resolver, en lugar de con la comprensión y el significado del mismo. Si esta concepción les permite ir aprobando las matemáticas curso a curso, los estudiantes pueden ir consolidando esa concepción sesgada, en la que las matemáticas acaban reduciéndose a la elección de la regla o el procedimiento adecuado para resolver cada tarea y a su aplicación. Así, el círculo vicioso se retroalimenta.

La solución tampoco pasa por escribir también en la pizarra (o a través de apuntes) aspectos conceptuales, si eso conduce a un aprendizaje memorístico y no comprensivo. Además del mayor conocimiento de la práctica matemática, es necesario dar relevancia a la comprensión de los conceptos, a la explicación de los procedimientos y al porqué de su aplicación en una situación, a la relación entre objetos matemáticos (como la mostrada en la figura 1), a que cada estudiante reorganice

en su CM todo lo que sabe sobre algún concepto en la parte final de cada sesión... El planteamiento de cuestiones o de tareas a desarrollar en el CM que permitan practicar y desarrollar estos conocimientos y habilidades, tanto en el trabajo diario en el aula como en la evaluación de la asignatura, contribuirá a evitar concepciones sesgadas de las matemáticas.

Otro factor que condiciona fuertemente el tipo de trabajo que un estudiante desarrolla en su CM es su posicionamiento en un dominio público o privado ([12], [13]), y su inclusión o no como parte de la calificación de la asignatura. Es cierto que en las primeras edades puede ser recomendable un mayor control de lo que hacen los estudiantes en sus cuadernos, pero en Secundaria ese control puede resultar contraproducente. El control o la situación del CM como instrumento que forme parte de la calificación contribuyen a situar el CM como un lugar en el que comunicar los resultados de su trabajo de un modo claro y organizado, y hacerlo al «gusto» del docente, pudiendo perder significatividad para el estudiante (con posibles muestras de individualidad, anotaciones personales útiles para él...).

El docente ha de ser consciente del posicionamiento del CM como un instrumento en un dominio público o privado. Ese posicionamiento tiene influencia en la dualidad entre el proceso seguido para resolver un problema (indagaciones, tentativas, reflexiones, conjeturas, intentos infructuosos de resolución...), que suele situarse en un dominio privado, y la reconstrucción del mismo para comunicar el producto obtenido, más propio de un dominio público. El planteamiento por los docentes de un exceso de tareas de baja demanda cognitiva (ejercicios donde se aplica un procedimiento determinado y conocido) y controlar su realización en el CM pueden producir bloqueos y dificultades insalvables cuando han de gestionar la resolución de un problema en su CM. La resolución de un problema sí que necesita de ese proceso de indagación y reflexión, y una situación del CM en el dominio público hace que los estudiantes no conciban el cuaderno como un lugar de trabajo matemático y reflexión en el que desarrollar esos intentos, por lo que suelen quedarse parados, pensando sin escribir nada, o recurrir a «hojas en sucio», que además desechan enseguida por no considerarse el proceso y las ideas puestas en juego en él como algo valioso.

Por ello, coincidimos con Fried y Amit ([13]) en los beneficios de situar el CM como un instrumento para la autoevaluación del estudiante, a través de compartir lo realizado en él con el docente, y dentro de procesos de evaluación continua. En este proceso, el docente ha de poner en valor ambos aspectos, tanto el proceso seguido para la resolución de un problema como la comunicación de los resultados obtenidos.

REFERENCIAS

- [1] M. ARCE, *Análisis de los cuadernos de matemáticas de los alumnos de bachillerato: percepciones, perfiles de elaboración y utilización y rendimiento académico*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valladolid, 2016.
- [2] M. ARCE Y L. CONEJO, Análisis de las notas tomadas por los alumnos en una presentación inicial de límite de una función, *PNA* **11** (3) (2017), 155–179.

- [3] M. ARCE, L. CONEJO Y T. ORTEGA, ¿Cómo son los apuntes de matemáticas de un estudiante? Influencia de los elementos matemáticos y sus relaciones, *Enseñanza de las Ciencias* **34** (1) (2016), 149–172.
- [4] A. M. BADANELLI Y K. MAHAMUD, Posibilidades y limitaciones del cuaderno escolar como material curricular. Un estudio de caso, *Avances en supervisión educativa* **6** (2007).
- [5] R. BADGER, G. WHITE, P. SUTHERLAND Y T. HAGGIS, Note perfect: an investigation of how students view taking notes in lectures, *System* **29** (2001), 405–417.
- [6] B. BLOCHS, Le cahier de cours au collège: une oeuvre du professeur? Un instrument pour l'élève?, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **32** (2) (2012), 159–193.
- [7] J. COTTRILL, E. DUBINSKY, D. NICHOLS, K. SCHWINGENDORF, K. THOMAS Y D. VIDAKOVIC, Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process scheme, *Journal of Mathematical Behavior* **15** (1996), 167–192.
- [8] S. CUETO, C. RAMÍREZ Y J. LEÓN, Opportunities to learn and achievement in mathematics in a sample of sixth grade students in Lima, Peru, *Educational Studies in Mathematics* **62** (1) (2006), 25–55.
- [9] G. P. CURBERA, Matemáticas desde las afueras: Ramanujan y Sunyer i Balaguer, *Matemáticos y Matemáticas* (A. J. Durán y J. Ferreirós, eds.), 157–184, Universidad de Sevilla, Sevilla, 2004.
- [10] A. J. DURÁN, *Pasiones, piojos, dioses... y matemáticas: la condición humana a la luz de la ciencia más antigua*, Destino, Barcelona, 2009.
- [11] S. ESPINO, *La toma de apuntes, su uso y enfoque de aprendizaje en estudiantes universitarios*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, 2012.
- [12] M. N. FRIED, Between public and private: where students' mathematical selves reside, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture* (L. Radford, G. Schubring y F. Seeger, eds.), 121–138, Sense Publishers, Rotterdam, 2008.
- [13] M. N. FRIED Y M. AMIT, Some reflections on mathematics classroom notebooks and their relationship to the public and private nature of student practices, *Educational Studies in Mathematics* **53** (2) (2003), 91–112.
- [14] L. GIL, V. ÁVILA Y A. FERRER, Toma de notas en lectura de textos múltiples: análisis de diferencias individuales, *Infancia y Aprendizaje* **34** (4) (2011), 449–464.
- [15] J. M. GRILLES, J. A. LLORENS, J. I. MADALENA, A. M. MARTÍNEZ Y X. M. SOUTO, *Los cuadernos de los alumnos. Una evaluación del currículo real*, Díada, Sevilla, 1996.
- [16] J. HARTLEY Y I. K. DAVIES, Note-taking: A critical review, *Programmed Learning and Educational Technology* **15** (1978), 207–224.
- [17] J. HÉBRARD, Por uma bibliografia material das escritas ordinárias: o espaço gráfico do caderno escolar (França - Séculos XIX e XX), *Revista Brasileira de História da Educação* **1** (2001), 115–141.

- [18] N. M. LACERDA, D. ALVES, M. L. MAGALHÃES Y L. MENDES, O caderno de uma professora-aluna e as propostas para o ensino da aritmética na escola ativa (Minas Gerais, década de 1930), *História da Educação* **18** (42) (2014), 9–35.
- [19] M. C. LEME Y W. RODRIGUES, Students' notebooks as a source of research on the history of mathematics education, *International Journal for the History of Mathematics Education* **4** (1) (2009), 51–63.
- [20] J. O. MASINGILA, P. NIGAM Y A. DOMÍNGUEZ, Evaluación: una herramienta para enseñar y para aprender, *UNO* **11** (1997), 33–41.
- [21] A. I. MERCADO, La toma de apuntes y la resolución de problemas en educación secundaria, *Épsilon* **55** (2003), 63–72.
- [22] C. MONEREO, R. CARRETERO, M. CASTELLÓ, I. GÓMEZ Y M. L. PÉREZ CABANÍ, Toma de apuntes en estudiantes universitarios: descripción de las condiciones de un escenario específico, *El aprendizaje estratégico. Enseñar a aprender desde el currículo* (J. I. Pozo y C. Monereo, coords.), 219–236, Aula XXI, Santillana, Madrid, 1999.
- [23] S. NOGUEIRA, Efectos del uso de la pizarra en la toma de apuntes de estudiantes universitarios, *Cultura y Educación* **17** (4) (2005), 373–385.
- [24] D. PORRAS, Do your students digest mathematics like ice cream or like steak?, *Mathematics and Computer Education* **28** (1) (1994), 6–15.
- [25] J. J. PRICE, M. CANARECCI, J. CONRAD, D. EHRESMAN, C. FOSTER, M. D. HARRIS, K. MARTIN, T. MULLENDORE, T. K. RICE Y P. WRIGHT-HOUSE, Mathematics notebooks in Middle School and Junior High School, *Mathematics Teaching in the Middle School* **3** (1) (1997), 34–38.
- [26] P. RABARDEL, *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, París, 1995.
- [27] C. REEVES Y T. MAJOR, Using students notebooks to measure opportunities to learn in Botswana and South African classrooms, *Prospects* **42** (4) (2012), 403–413.
- [28] R. J. RENSAA, The impact of lecture notes on an engineering student's understanding of mathematical concepts, *Journal of Mathematical Behavior* **34** (2014), 33–57.
- [29] M. SAINT-ONGE, *Yo explico, pero ellos... ¿aprenden?*, Mensajero, Bilbao, 1997.
- [30] A. M. SERRANO, A cross-cultural investigation into how tasks influence seat-work activities in mathematics lessons, *Teaching and Teacher Education* **28** (2012), 806–817.
- [31] J. VALLS, J. PONS Y S. LLINARES, Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función, *Enseñanza de las Ciencias*, **29** (3) (2011), 325–338.
- [32] P. VAN METER, L. YOKOI Y M. PRESSLEY, College students' theory of note-taking derived from their perceptions of note-taking, *Journal of Educational Psychology* **86** (3) (1994), 323–338.
- [33] M. VILLARREAL Y M. BORBA, Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and... no

- tebooks throughout 100 years of ICMI, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education* **42** (1) (2010), 49–62.
- [34] A. VIÑAO, Los cuadernos escolares como fuente histórica: aspectos metodológicos e historiográficos, *Annali di Storia dell'Educazione e delle Istituzioni Scolastiche* **13** (2006), 17–35.
- [35] K. W. YAU Y I. A. C. MOK, Insights from students' private work in their notebooks: how do students learn from the teacher's examples?, *Educational Studies in Mathematics* **93** (3) (2016), 275–292.

MATÍAS ARCE, DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES, SOCIALES Y DE LA MATEMÁTICA, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

Correo electrónico: arcesan@am.uva.es