Las matemáticas escondidas en la puntuación Elo del ajedrez

por

Julio Benítez y Alicia Roca

Resumen. El sistema Elo es el método usado por la FIDE (Federación Internacional de Ajedrez) para clasificar a los jugadores de ajedrez en función de su calidad. Este sistema tiene una fuerte componente matemática: la teoría de la probabilidad. Con algunas modificaciones sencillas, este trabajo puede usarse como ejemplo en una asignatura de Probabilidad, en cualquier estudio universitario, como una aplicación de esta rama de las matemáticas.

1. Introducción

Todo ajedrecista sabe qué es el «elo», pero la mayoría no conoce cómo se calcula. Todo matemático conoce la teoría básica de probabilidad, pero la inmensa mayoría no conoce qué es el elo, y no es más que una aplicación sencilla de la teoría de la probabilidad. Y esto sucede pese a que la intersección entre ajedrecistas y matemáticos no es vacía[1].

El elo es el sistema de clasificación que usa la FIDE[2] para ordenar a los jugadores en función de su calidad de juego. Por ejemplo, según datos[3] de diciembre de 2017, el elo del campeón del mundo (el noruego Magnus Carlsen) es 2837 y el elo del mejor jugador español (Francisco Vallejo) es 2707. Es interesante señalar que actualmente el elo de los mejores programas de ajedrez supera los 3400 puntos[4]. El sistema de clasificación elo debe su nombre al profesor estadounidense (de origen húngaro) Árpád Élő, quien trabajó para la federación de ajedrez de Estados Unidos[5].

En el apéndice I se puede ver una tabla aproximativa de clasificación de los jugadores según sus valores de elo. En este apéndice se citan los títulos de «gran maestro» y «maestro internacional», pero hay que decir que la FIDE otorga estos títulos, que son vitalicios, a los jugadores que consiguen unos requisitos específicos. El elo es, por tanto, orientativo de la fuerza de un jugador. Adelantamos dos hechos:

[1]Uno de los más notables ejemplos es Emanuel Lasker, campeón del mundo entre los años 1894 y 1921: hizo su tesis bajo la supervisión de Max Noether y probó un teorema sobre ideales de un anillo de polinomios, que fue generalizado por Emmy Noether. Esta generalización se conoce como teorema de Lasker-Noether.

[2]FIDE son las siglas en francés de la Federación Internacional de Ajedrez.

[3]El elo de cualquier jugador federado puede consultarse en `https://ratings.fide.com`.

[4]`http://www.computerchess.org.uk/ccrl/4040/rating_list_all.html`, una diferencia abismal con el elo del mejor jugador de ajedrez.

[5]Cuando se implantó el sistema elo en la FIDE (1971), su presidente era el neerlandés Max Euwe, quien además de haber sido campeón del mundo, fue doctor en Matemáticas.

cuanto mayor es el elo, el jugador, en teoría, es más fuerte; y el elo puede variar en función de los buenos o malos resultados que un jugador vaya obteniendo. Decimos *en teoría*, ya que es perfectamente posible que un jugador de menos elo gane a un jugador de mayor elo. Algo similar sucede cuando se lanza un dado: es posible sacar un «uno», pese a que la probabilidad de sacar un «uno» es menor que la probabilidad de no sacar un «uno». Aquí ya se va vislumbrando el papel de la teoría de la probabilidad.

2. Entra en juego la distribución normal

No olvidemos que el resultado de una partida es algo que *a priori* no puede determinarse, y, por tanto, se puede considerar como un experimento aleatorio. El concepto que va a determinar la fuerza relativa entre los jugadores A y B es la **puntuación esperada** del jugador A cuando juega frente a B. Matemáticamente hablando es la esperanza de la variable aleatoria dada por los puntos que obtiene el jugador A cuando juega con B. Esta variable aleatoria, que va a ser denotada en lo sucesivo por X_{AB}, es discreta y toma valores en $\{0, 1/2, 1\}$. Como es habitual en ajedrez, se verifica

Figura 1: Árpád Élő

$$X_{\mathrm{AB}} = \begin{cases} 1, & \text{si A gana a B,} \\ 1/2, & \text{si A y B empatan,} \\ 0, & \text{si A pierde frente a B.} \end{cases}$$

En la jerga del ajedrez, cuando una partida acaba en empate, se suele decir que acaba en tablas. Obviamente, hay muchas (demasiadas) variables aleatorias X_{AB}, siendo A y B jugadores cualesquiera: si n es el número de jugadores federados, entonces hay $n(n-1)/2$ emparejamientos posibles, luego hay $n(n-1)/2$ variables aleatorias de este tipo, la mayoría de las cuales nunca serán usadas[6], por lo que manejar directamente estas variables aleatorias no conduce a nada útil. Introduciremos otra variable aleatoria (ideada por Árpád Élő) relacionada con X_{AB}.

Antes de analizar esta otra variable aleatoria, quizás el lector se pregunte si se va a tener en cuenta el factor blancas o negras. El propio Árpád Élő señaló que, como en un torneo lo normal es que un jugador alterne blancas y negras, el color no afecta mucho en su sistema, y por lo tanto es más sencillo simplemente ignorar este factor.

La idea de Árpád Élő fue asignar un único número a cada jugador, el **elo**, que estimase su fuerza. Debemos aclarar que la *fuerza de un jugador* es un concepto más bien difuso que no se va a definir ni precisar de forma matemática. Solo usaremos

[6]El número de licencias de ajedrez en el año 2016, solo en España, fue de 26 558 (fuente: `http://www.csd.gob.es/csd/estaticos/asoc-fed/LicenciasyClubes-2016.pdf`).

este término de forma intuitiva y, por supuesto, no va a influir en ningún momento en los cálculos que se mostrarán más adelante. Tengamos en cuenta que, a menudo, la fuerza teórica de un jugador y el rendimiento de este jugador en una partida concreta no coinciden. Se supone que el rendimiento de un buen jugador es alto (y el de un mal jugador es bajo), pero puede suceder que su rendimiento sea mayor o menor que lo esperado por la razón que sea. Como no sabemos *a priori* cómo va a jugar un ajedrecista en una partida concreta, podríamos intentar modelar el rendimiento de un jugador en una partida concreta mediante otra variable aleatoria distinta a la ya comentada X_{AB}.

Árpád Élő consideró que el **rendimiento** de un jugador en una partida concreta es una variable aleatoria normal cuya media es el elo de este jugador. Hay que decir que antes de la elaboración del sistema de puntuación elo, la federación norteamericana de ajedrez ya disponía de unas tablas midiendo la fuerza de los jugadores norteamericanos (el sistema Harkness, el precursor del sistema de puntuación elo). Para ajustarse lo más posible al sistema previo, Árpád Élő tomó el valor 200 como la desviación típica de la variable aleatoria que modela el rendimiento[7]. El *origen de coordenadas* del rendimiento es arbitrario y Árpád Élő tomó la escala que aún se usa actualmente por la FIDE (véase el apéndice I) para ajustarse igualmente al sistema Harkness. En el apéndice II se puede ver la axiomática del sistema de clasificación elo, aunque, por razones ilustrativas, hemos preferido, a medida que se van necesitando los conceptos, definiciones y propiedades, irlos introduciendo de forma razonada.

Resumiendo, si r_{A} denota el rendimiento en una partida concreta del jugador A cuyo elo es μ_{A} (un número conocido), entonces r_{A} es una variable aleatoria normal de media μ_{A} y desviación típica 200.

Veamos en este párrafo la relación entre las variables aleatorias r_{A}, r_{B} y X_{AB}. ¿Cuándo el jugador A gana a B? Cuando, en la partida, el rendimiento de A es mayor que el de B, es decir, cuando $r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}$. De forma similar podemos decir que si $r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}$, entonces A y B hacen tablas; y si $r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}$, entonces B le gana a A. Luego

$$X_{\mathrm{AB}} = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}, \\ 1/2, & \text{si } r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}, \\ 0, & \text{si } r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}. \end{cases} \tag{1}$$

Estudiemos ahora la puntuación esperada de A cuando juega contra B, es decir, la esperanza de la variable aleatoria X_{AB}. Denotaremos esta esperanza por E_{AB}. Debido a (1), se tiene que

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{AB}} &= 1 \cdot \mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}) + 0 \cdot \mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} < r_{\mathrm{B}}) \\ &= \mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}) + \frac{1}{2}\,\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}). \end{aligned}$$

[7]Árpád Élő asumió que esta desviación típica es la misma para todos los jugadores (aunque en la realidad esto no es así, ya que hay jugadores más regulares que otros). Esta suposición simplifica mucho los cálculos.

Vamos a calcular $\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}})$ y $\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}})$, y para ello estudiaremos la variable aleatoria $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}$. Supongamos que los rendimientos de los jugadores A y B no dependen unos de los otros (en términos probabilísticos, las variables aleatorias r_{A} y r_{B} son independientes). Con esta suposición (ya hecha por el profesor Élő) la diferencia de rendimientos es otra variable normal, y, además, si $\mathrm{E}(\cdot)$ y $\mathrm{Var}(\cdot)$ denotan la esperanza y la varianza, respectivamente

$$\mathrm{E}(r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}) = \mathrm{E}(r_{\mathrm{A}}) - \mathrm{E}(r_{\mathrm{B}}) = \mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}$$

y

$$\mathrm{Var}(r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}) = \mathrm{Var}(r_{\mathrm{A}}) + \mathrm{Var}(r_{\mathrm{B}}) = 200^2 + 200^2 = 2 \cdot 200^2.$$

Luego la desviación típica de $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}$ es $200\sqrt{2}$. Como la variable aleatoria $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}$ es una variable continua de varianza no nula, $\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} = r_{\mathrm{B}}) = 0$. Ahora, ya que $r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}$ es una variable aleatoria normal,

$$\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}) = \mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} > 0) = \mathrm{pr}\left(\frac{r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}} > -\frac{\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}}{200\sqrt{2}}\right).$$

Si denotamos por Φ la función de distribución de la normal estándar, entonces

$$\mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} > r_{\mathrm{B}}) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}}{200\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}}{200\sqrt{2}}\right).$$

Luego la puntuación esperada por A cuando juega contra B viene dada por

$$E_{\mathrm{AB}} = \Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}}{200\sqrt{2}}\right). \tag{2}$$

En el cuadro 1 vemos una tabla con los conceptos introducidos hasta ahora y sus notaciones.

Rendimiento del jugador A	r_{A}	Variable aleatoria
Elo del jugador A	μ_{A}	$\mathrm{E}(r_{\mathrm{A}})$, constante conocida
Puntuación del jugador A contra B	X_{AB}	Variable aleatoria dada en (1)
Punt. esperada del jugador A contra B	E_{AB}	$\mathrm{E}(X_{\mathrm{AB}})$, se calcula con (2)

Cuadro 1: Notación usada y significado del **rendimiento en una partida concreta**, **elo**, **puntuación** y **puntuación esperada**.

Veamos un ejemplo sencillo usando Octave. El comando de Octave `normcdf(x)` calcula el valor en `x` de la función de distribución de una variable normal estándar. La puntuación esperada por el jugador A de elo $\mu_{\mathrm{A}} = 1834$ cuando juega contra el jugador B cuyo elo es $\mu_{\mathrm{B}} = 2179$ se puede calcular fácilmente usando (2) con los comandos

```
muA = 1834; muB = 2179; sigma = 200*sqrt(2);
normcdf((muA-muB)/sigma)
```

obteniendo 0.11128. En la figura 2 se puede ver la gráfica que relaciona la diferencia de elos entre dos jugadores y la puntuación esperada.

Si la puntuación de una partida es 1, 0.5 o bien 0, ¿qué quiere decir que la puntuación esperada sea 0.11? Esta pregunta se la hacen algunos estudiantes cuando ven que la esperanza de una variable aleatoria binomial de parámetros $n = 1$ y $p \in]0, 1[$ (cuando $n = 1$, la distribución binomial se suele llamar dicotómica o de Bernoulli) es p, que no es ni 1 ni 0, pese a que esta variable solo toma los valores 0 o 1. Si la puntuación esperada de A contra B es 0.11, entonces si A y B juegan, digamos 100 partidas, pensamos que A conseguirá alrededor de 11 puntos (y B, obviamente, cerca de 89).

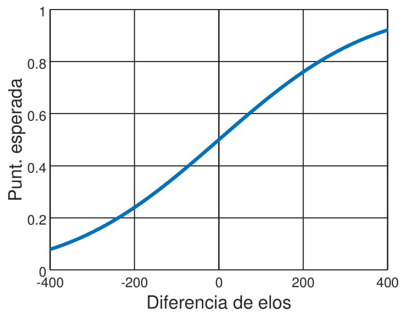

Figura 2: Relación entre la diferencia de elos y la puntuación esperada.

Se deduce de (2) que, con la axiomatización propuesta (véase el apéndice II), la puntuación esperada solo depende de la diferencia de elos. Por ejemplo, si los elos de los jugadores A, B, C y D son, respectivamente, $\mu_{\mathrm{A}} = 2332$, $\mu_{\mathrm{B}} = 2179$, $\mu_{\mathrm{C}} = 1834$ y $\mu_{\mathrm{D}} = 1681$, como $\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}} = \mu_{\mathrm{C}} - \mu_{\mathrm{D}}$, entonces la puntuación esperada de A frente a B es la misma que la puntuación esperada de C frente a D.

Además, si $\mu_{\mathrm{A}} > \mu_{\mathrm{B}}$, entonces de (2) se deduce $E_{\mathrm{AB}} > 0.5$, lo que es intuitivo, puesto que, en teoría, si $\mu_{\mathrm{A}} > \mu_{\mathrm{B}}$ entonces A es mejor jugador que B. De forma análoga se cumple que $\mu_{\mathrm{A}} = \mu_{\mathrm{B}}$ si y solo si $E_{\mathrm{AB}} = 0.5$ (lo que equivale a decir que los jugadores tienen la misma fuerza si y solo si la puntuación esperada de los dos jugadores es 0.5).

Como la función de distribución de una variable normal estándar cumple $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se deduce que

$$E_{\mathrm{AB}} + E_{\mathrm{BA}} = 1,$$

lo que es coherente con el hecho de que la suma de las puntuaciones obtenidas por dos jugadores que se enfrentan en una partida siempre es 1, independientemente del resultado de la partida.

De (2) se deduce también que, a medida que $\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}$ aumenta, entonces E_{AB} crece asintóticamente a 1, lo que equivale a decir que, a medida que un jugador es más fuerte que otro, la puntuación esperada aumenta hasta el tope superior 1 (y, análogamente, si $\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}$ disminuye progresivamente, entonces E_{AB} tiende asintóticamente a 0).

La normativa de la FIDE respecto al sistema de clasificación puede consultarse en [1]. Como curiosidad, en este reglamento se puede leer (artículo 12.1) que

$$F_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{1 + 10^{\frac{\mu_{\mathrm{B}} - \mu_{\mathrm{A}}}{400}}} \tag{3}$$

es una buena aproximación a E_{AB}. Es más curioso aún que la *Wikipedia* (en el artículo *Sistema de puntuación Elo*, revisado del 20 de marzo de 2018) afirme que (3) sea la fórmula exacta, en contradicción con la normativa de la FIDE. En el cuadro 2 se puede apreciar la bondad de la aproximación $E_{\mathrm{AB}} \simeq F_{\mathrm{AB}}$, donde E_{AB} es la puntuación esperada dada en (2) y F_{AB} es la aproximación dada en (3).

$\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}}$	0	50	100	150	200	250	300	350	400
E_{AB}	0.5	0.570	0.638	0.702	0.760	0.812	0.856	0.882	0.921
F_{AB}	0.5	0.571	0.640	0.703	0.760	0.808	0.849	0.882	0.909

Cuadro 2: La expresión F_{AB} es una buena aproximación de E_{AB}.

2.1. Una extensión no contemplada por la FIDE

Una consecuencia algo extraña de los cálculos hechos hasta ahora, es que de (1) se deduce que $\mathrm{pr}(X_{\mathrm{AB}} = 1/2) = 0$, es decir, que la probabilidad de que dos jugadores hagan tablas es ¡0! Lo cual es, desde luego, nada coherente con la realidad. Esto induce a modificar la variable aleatoria X_{AB} definida en (1) permitiendo que si los rendimientos en una partida concreta son similares, entonces la partida acaba en tablas. De una forma matemática, definimos otra variable aleatoria del modo siguiente:

$$Y_{\mathrm{AB}} = \begin{cases} 1, & \text{si } r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} > \varepsilon, \\ 1/2, & \text{si } |r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{si } r_{\mathrm{B}} - r_{\mathrm{A}} > \varepsilon, \end{cases}$$

para un valor fijo de $\varepsilon > 0$. Calculemos la esperanza de Y_{AB} y veamos su diferencia con E_{AB}. Como

$$\mathrm{E}(Y_{\mathrm{AB}}) = \mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1/2),$$

calculemos las dos probabilidades involucradas en la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1) &= \mathrm{pr}(r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} > \varepsilon) = \mathrm{pr}\left(\frac{r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}} > \frac{\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}} - \varepsilon}{200\sqrt{2}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1/2) &= \mathrm{pr}(-\varepsilon < r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} < \varepsilon) \\ &= \mathrm{pr}\left(\frac{-\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}} < \frac{r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}} - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}} < \frac{\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\varepsilon - (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}})}{200\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Si denotamos $\alpha = (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}} - \varepsilon)/200\sqrt{2}$ y $\beta = (\mu_{\mathrm{A}} - \mu_{\mathrm{B}} + \varepsilon)/200\sqrt{2}$, entonces $\mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1) = \Phi(\alpha)$ y $\mathrm{pr}(Y_{\mathrm{AB}} = 1/2) = 1 - \Phi(\alpha) - (1 - \Phi(\beta)) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$, por lo que

$$\mathrm{E}(Y_{\mathrm{AB}}) = \Phi(\alpha) + \frac{1}{2}\left(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(\alpha) + \Phi(\beta)\right). \tag{4}$$

$\mu_{\text{A}} - \mu_{\text{B}}$	0	50	100	150	200	250	300
E_{AB}	0.5	0.5702	0.6382	0.7021	0.7603	0.8116	0.8556
$\text{E}(Y_{\text{AB}})$ con $\varepsilon = 10$	0.5	0.5701	0.6380	0.7019	0.7601	0.8115	0.8554
$\text{E}(Y_{\text{AB}})$ con $\varepsilon = 20$	0.5	0.5700	0.6378	0.7016	0.7597	0.8110	0.8550

Cuadro 3: Valores de la esperanza de X_{AB} y de Y_{AB} para dos valores de ε.

Podemos ver fácilmente que, cuando $\varepsilon = 0$, entonces (4) se reduce a (2). De hecho, si $\gamma = (\alpha+\beta)/2 = (\mu_{\text{A}} - \mu_{\text{B}})/200\sqrt{2}$ y si $f(\xi)$ es la función de densidad de la variable aleatoria normal estándar, entonces

$$\begin{aligned}\text{E}(Y_{\text{AB}}) &= \frac{1}{2}\left(\Phi(\gamma) - \int_{\alpha}^{\gamma} f(\xi)\,d\xi + \Phi(\gamma) + \int_{\gamma}^{\beta} f(\xi)\,d\xi\right)\\ &= \Phi(\gamma) + \frac{1}{2}\left(-\int_{\alpha}^{\gamma} f(\xi)\,d\xi + \int_{\gamma}^{\beta} f(\xi)\,d\xi\right),\end{aligned}$$

y tras usar el teorema de valor medio para derivadas e integrales, se puede acotar fácilmente $|\,\text{E}(Y_{\text{AB}}) - \Phi(\gamma)|$ en términos de ε. En el cuadro 3 se puede apreciar que las esperanzas de las variables aleatorias X_{AB} y Y_{AB} (para dos valores razonables de ε) son realmente parecidas.

Como conclusión podemos afirmar que, aunque sea más natural tomar la variable aleatoria Y_{AB} para asegurarse de que la probabilidad de que una partida acabe en tablas no sea nula[8], la elección de X_{AB} simplifica los cálculos y no supone mucha diferencia.

Hasta ahora, hemos definido y usado el elo de un jugador. Pero una pregunta que todavía no hemos respondido es cómo se calcula el elo de un jugador. También se ha de tener en cuenta que la fuerza de un jugador cambia a lo largo de su vida: la calidad de juego puede mejorar o empeorar, es decir, el elo de un jugador debe poder modificarse. Sobre estas preguntas versará la sección siguiente.

3. El parámetro K

¿Cómo se calcula la puntuación esperada en un torneo? Veamos un ejemplo sencillo: el jugador A tiene 1800 de elo y se ha enfrentado a los jugadores X, Y y Z. Los resultados se muestran en el cuadro 4.

La puntuación esperada en el torneo es la suma de las tres puntuaciones esperadas cuando juega contra X, Y y Z:

$$\text{Puntuación total esperada} = E_{\text{AX}} + E_{\text{AY}} + E_{\text{AZ}} = 0.42 + 0.54 + 0.24 = 1.2.$$

Vemos que para hallar la puntuación esperada, no es necesario conocer la puntuación obtenida. Un jugador puede obtener una puntuación distinta de la esperada.

[8]Se tiene, con la notación del párrafo anterior, que $\text{pr}(Y_{\text{AB}} = 1/2) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) \neq 0$, siempre que $\varepsilon \neq 0$.

Rivales	Elo de los rivales	Punt. esperada	Resultado	Ptos. obtenidos
X	$\mu_{\mathrm{X}} = 1860$	$E_{\mathrm{AX}} = 0.42$	Victoria	1
Y	$\mu_{\mathrm{Y}} = 1770$	$E_{\mathrm{AY}} = 0.54$	Tablas	0.5
Z	$\mu_{\mathrm{Z}} = 2000$	$E_{\mathrm{AZ}} = 0.24$	Derrota	0
Totales		1.2		1.5

Cuadro 4: Actuación del jugador A en un torneo.

Como podemos observar en este ejemplo, el jugador A ha obtenido una puntuación mayor (1.5) que la esperada (1.2); por tanto parece que su elo debería aumentar.

Es decir, el sistema de clasificación elo debe ser dinámico, ya que un jugador cambia de fuerza de manera continua. Y es aquí donde entra un factor también propuesto por Árpád Élő.

Si un jugador con elo μ espera conseguir E puntos, pero consigue S puntos, entonces el nuevo elo viene dado por la fórmula

$$\text{Nuevo elo} = \mu + K(S - E). \tag{5}$$

Este número K es un parámetro cuyo valor es fijado de una manera más o menos arbitraria por la FIDE. Este factor K, en teoría, permite dar una mayor estabilidad al cálculo cuando el sistema va teniendo mayor información sobre el individuo que es evaluado. Evidentemente, un mayor valor de K implica mayores cambios. Veamos un ejemplo con dos valores de K distintos. Supongamos que un jugador tiene 1800 puntos elo, ha jugado un torneo en donde espera sacar 4 puntos y ha conseguido 5 puntos, ¿cuál es su nuevo elo?:

$$\begin{aligned} K = 20 &\;\rightarrow\; \text{Nuevo elo} = 1800 + 20 \cdot (5 - 4) = 1820; \\ K = 40 &\;\rightarrow\; \text{Nuevo elo} = 1800 + 40 \cdot (5 - 4) = 1840. \end{aligned}$$

Un inconveniente de usar un valor alto de K es que la estimación del elo es demasiado sensible a los resultados recientes. Una desventaja de usar un valor pequeño de K es que el sistema responde lentamente a los cambios de la fuerza de un jugador. Es de destacar que el factor K no determina la fuerza de un jugador, solo pretende estimar la rapidez con la cual la fuerza estimada converge a la fuerza real.

Los valores concretos de K para cada categoría de jugador según la normativa de la FIDE pueden encontrarse en [1]. De una manera muy resumida: los jugadores con menos partidas computadas tienen mayor valor de K. La razón de esto es que si se posee poca información sobre un jugador, entonces su fuerza estimada puede ser imprecisa y necesita una mayor corrección.

Se ha de destacar que, de acuerdo a la normativa de la FIDE, el valor de $|\mu_A - \mu_B|$ en (2) está acotado por 400 (véase [1], «*a difference in rating of more than 400 points shall be counted for rating purposes as though it were a difference of 400 points*», y que la actualización del elo de acuerdo a lo visto en esta sección se hace después de ciertos períodos («*for a given tournament, or Rating period*»), no después de cada partida.

Agradecimientos. Los autores desean dar las gracias a los dos *referees* anónimos que han revisado el artículo por sus comentarios.

Apéndice I. Estimación de las categorías según el elo

Elo	Grupo	Elo	Grupo
1000–1399	Principiante	2000–2299	Candidato a maestro
1400–1599	Aficionado	2300–2399	Maestro nacional
1600–1799	Jugador medio de club	2400–2499	Maestro internacional
1800–1999	Jugador fuerte de club	2500–	Gran maestro

Apéndice II. Axiomática

Axioma I. Para cada tiempo fijo, todo jugador A tiene un único valor (conocido) de **elo** μ_{A}.

Axioma II. Para cada tiempo fijo, el **rendimiento** de un jugador A en cada partida concreta es una variable aleatoria r_{A} normal de media μ_{A} y desviación típica 200.

Axioma III. Si $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, entonces r_{A} y r_{B} son variables independientes.

Axioma IV. Para cada tiempo fijo y para cada par de jugadores A y B, la variable aleatoria X_{AB} se define mediante (1). Llamamos E_{AB} a la esperanza de X_{AB}.

Axioma V. El elo de un jugador A cambia después de ciertos periodos (según la FIDE, «*for a given tournament, or Rating period*») al valor $\mu_{\mathrm{A}} + K(S - E)$, donde μ_{A} es el elo antiguo del jugador, S es la suma de las puntuaciones del jugador A en el periodo considerado, y $E = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathrm{AB}_i}$, donde $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$ son los jugadores con los que se ha enfrentado el jugador A en el periodo considerado.

Nota: El valor de K del axioma V es propuesto por la FIDE de acuerdo a [1].

Referencias

[1] World Chess Federation, FIDE Rating Regulations effective from 1 July 2017, `http://www.fide.com/component/handbook/?id=197&view=article`.

J. Benítez y A. Roca, Dpto. de Matemática Aplicada, Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universitat Politècnica de València

Correo electrónico: jbenitez@mat.upv.es, aroca@mat.upv.es