La cuadratura gaussiana según Gauss

por

J. M. Sanz-Serna

Resumen. Este artículo es una traducción al castellano, resumida y con comentarios, de la memoria de 1815 en la que Gauss introdujo las reglas de cuadratura que llevan su nombre. El trabajo de Gauss en nada se parece al tratamiento de la cuadratura gaussiana que dan hoy los libros de texto. La memoria original es un ejercicio de virtuosismo matemático, basado en un uso magistral de las series, en que el problema se reformula como uno de aproximación funcional que se resuelve con la ayuda de fracciones continuas.

1. Introducción

Este artículo es una traducción al castellano, resumida y con comentarios, de la memoria de 1815 *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Método nuevo de hallar por aproximación los valores de las integrales) [2], en la que Gauss introdujo las reglas de cuadratura que hoy llevan su nombre.

Hasta hace algunos años, mis conocimientos sobre la cuadratura gaussiana se limitaban, más o menos, al material común en los libros de texto.[1] En 2015 preparé una conferencia en la que se comparaban el método de Montecarlo y la cuadratura gaussiana. El primero es un algoritmo simple, fácil de describir, cuya ejecución, consistente en repetir veces y veces algunos pasos muy sencillos, debe hacerse necesariamente en un ordenador. Por el contrario, la cuadratura gaussiana es un algoritmo cuya concepción requiere matemáticas nada triviales y, a cambio, puede ejecutarse en el cálculo manual por la sencillez de su implementación. Para mejor preparar tal conferencia leí los trabajos originales de Metropolis y sus coautores y de Gauss. Y es entonces cuando descubrí que la memoria de Gauss en nada se parece al tratamiento de la cuadratura gaussiana que dan los libros de texto, tratamiento que para la comodidad del lector he reproducido muy resumido en la Sección 1.1 y que, ahora me doy cuenta, se debe a Jacobi (1826) [5]. Al contrario, el trabajo original de Gauss es un ejercicio de virtuosismo matemático, un *tour de force* en que el problema se reformula como uno de aproximación funcional que se resuelve con la ayuda de fracciones continuas de modo similar al usado para aproximar números irracionales por racionales. En lenguaje moderno, Gauss usa la transformada de Cauchy, las aproximaciones de Padé, la función hipergeométrica y otros muchos elementos del análisis, en un desarrollo cuyo hilo conductor es un manejo maestro de las series. Incluso el teorema de los números primos se halla implícito en el trabajo. Al

[1] Creo que la estudié por primera vez en el clásico texto [4], del que hay una edición de Dover.

mismo tiempo, leer la memoria sirve para ver la evolución de las matemáticas en los dos siglos transcurridos: se aceptaba a comienzos del XIX que un sistema lineal con tantas ecuaciones como incógnitas tendrá solución única, se suponían todas las funciones analíticas, etc. Finalmente, Gauss se muestra como un gran analista numérico *avant la page* cuando incluye en la memoria tablas de los nodos y pesos de las fórmulas con 16 cifras decimales significativas, y cierra la misma con un ejemplo numérico detallado que *pone ante los ojos* la eficacia de *su* método al compararlo con resultados anteriores de otro autor, en este caso Bessel.

1.1. Cuadratura numérica: breve recordatorio

Antes de pasar adelante, voy a reproducir de modo sucinto la teoría de la cuadratura gaussiana tal y como se explica a los estudiantes.[2] Esto servirá tanto para presentar el problema con el que tratamos como para apreciar mejor las diferencias entre el tratamiento original y el hoy común.

En la cuadratura[3] numérica se trata de aproximar $\int_A^B f(x)\,dx$ por una *regla de cuadratura* $\sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$; los x_j se llaman nodos (o abscisas) de la regla y los w_j son los pesos (o coeficientes). Si la regla es exacta para las funciones $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $\dots$, $f(x) = x^\ell$ (equivalentemente, para cada polinomio de grado $\leq \ell$) se dice que su grado de precisión es $\geq \ell$. Por razones en las que no puedo entrar ahora,[4] es conveniente elegir los nodos y pesos para lograr que tal grado sea lo mayor posible.

Supongamos primero dados los $n + 1$ nodos, dos a dos distintos. Al imponer grado $\geq n$ se obtiene un sistema lineal de $n + 1$ ecuaciones para los $n + 1$ pesos y es fácil ver que el mismo tiene solución única. Por otro lado, los $n + 1$ valores $f(x_j)$ permiten construir un único polinomio F de grado $\leq n$ que interpola a la función f, esto es, $F(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$. Al calcular la integral $\int_A^B F(x)\,dx$ se llega a una expresión de la forma $\sum_{j=0}^n w_j f(x_j)$ con los w_j independientes de f; por tanto, tomar $\int_A^B F(x)\,dx$ como aproximación a $\int_A^B f(x)\,dx$ define una regla de cuadratura, que por su génesis se llama *interpolatoria*. El grado de esa regla es $\geq n$, pues si f es un polinomio de grado $\leq n$ el interpolante F coincide con la propia f, y por tanto $\int_A^B F(x)\,dx$ con la verdadera integral $\int_A^B f(x)\,dx$. En resumen: dados los nodos, hay una única regla de grado $\geq n$ y esa regla es la interpolatoria.

¿Qué ocurre si los nodos se pueden elegir libremente? Pongamos $\Omega(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j)$ y, dado un polinomio $f(x)$, efectuemos la división euclídea $f(x) = Q(x)\Omega(x) + R(x)$, donde el resto R es de grado $\leq n$. Al cuadrar el polinomio R con la regla interpolatoria basada en los x_j obtenemos el valor exacto $\int_A^B R(x)\,dx$ (pues el grado de la regla es mayor o igual que el de R); al cuadrar $Q\Omega$, la regla proporciona el valor 0 (ya que $Q\Omega$ se anula en cada nodo). Por consiguiente, al cuadrar f con la

[2] Véase, por ejemplo, el Capítulo 7 de [4].

[3] Por razones históricas, en análisis numérico se sigue denominando *cuadratura* al cálculo de integrales definidas, reservándose el término *integración* para la solución de ecuaciones diferenciales.

[4] Véase la discusión en las Secciones 5.3 y 5.4.2 de [7].

regla se llega a $\int_A^B R(x)\,dx$ y esto coincidirá con el verdadero valor

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B (Q(x)\Omega(x) + R(x))\,dx$$

si y solamente si

$$\int_A^B Q(x)\Omega(x)\,dx = 0,$$

es decir, si Q y Ω son mutuamente *ortogonales* respecto del producto escalar de funciones $\langle g_1, g_2\rangle = \int_A^B g_1(x)g_2(x)\,dx$.[5] Si f tiene grado $\leq 2n+1$, el cociente Q tiene grado $\leq n$. Resultados sencillos de álgebra lineal muestran que hay un único polinomio $\widehat{\Omega}$ mónico (es decir, con coeficiente director unidad) de grado $n+1$ ortogonal a todos los polinomios de grado $\leq n$;[6] además, se prueba que los $n+1$ ceros de tal polinomio son dos a dos distintos y reales (de hecho pertenecen a (A, B)). Tomando pues los ceros de $\widehat{\Omega}$ como nodos se obtiene la única regla de cuadratura que alcanza grado $\geq 2n+1$.[7] Ésta es la regla gaussiana.

1.2. Contenido del presente artículo

Como ya dije al principio, este artículo es una traducción al castellano, comentada, de la memoria de Gauss. Los comentarios persiguen fundamentalmente facilitar la comprensión al lector. En ningún momento ha sido mi objetivo hacer una aportación a la historia de las matemáticas, trabajo que excede mis competencias. Por tanto, ni pondré la cuadratura gaussiana en el contexto matemático del inicio del siglo XIX, ni seguiré su evolución posterior.

El texto de las cinco secciones siguientes, salvo por tres pequeñas excepciones que señalaré, sintetiza la memoria de Gauss con fidelidad, manteniendo su notación y terminología. Me he apartado del original en tres puntos: (i) he numerado las ecuaciones para poder referirme a ellas, (ii) he añadido puntos o comas al final de las ecuaciones tal y como es usual en los textos matemáticos contemporáneos y (iii) he recuadrado algunas de las fórmulas y puesto en *cursiva* ciertas palabras.

---

[5] Ver Capítulo 5 de [4].

[6] Si el intervalo $[A, B]$ coincide con $[-1, 1]$, es fácil ver, integrando por partes reiteradamente, que $\widehat{\Omega}$ es $(1/c_{n+1})P_{n+1}$ donde

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^2-1)^{n+1}$$

es el polinomio de Legendre y c_{n+1} su coeficiente director (los P_n satisfacen la normalización de valer 1 en $x = 1$). La expresión de los polinomios de Legendre como combinación de monomios x^j se obtiene sin dificultad mediante la recurrencia de tres términos

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

que da P_{n+1} conocidos P_n y P_{n-1} [1].

El caso de $[A, B]$ general se lleva al de $[-1, 1]$ cambiando linealmente de variable.

[7] De hecho, el grado no puede ser superior a $2n+1$: $\widehat{\Omega}$ no puede ser ortogonal a todos los polinomios de grado $\geq n+1$ pues, en particular, no es ortogonal a sí mismo.

En Gauss ninguna ecuación lleva número o recuadro. Mis propios comentarios y las explicaciones adicionales que no figuran en la memoria original van identificados como **Comentarios** intercalados en el texto y escritos con letras de menor tamaño, o, si son más breves, entre corchetes [ ] o en notas a pie de página. En estas explicaciones he usado libremente la notación y nomenclatura actuales.

2. Construcción de reglas interpolatorias

La memoria consta de 40 páginas y 23 artículos. Comenzaremos nuestro estudio con los artículos §7–§12 (páginas 11–21), donde Gauss construye la regla de cuadratura [interpolatoria] con nodos arbitrarios [ver (8), más abajo]. Los artículos §1–§6 (páginas 3–11) son paralelos a los §7–§12 pero referidos al caso particular de reglas con nodos equiespaciados, que Gauss nota ya habían sido desarrolladas por *el sumo* Newton y Cotes [ver p. ej. [4]].

Gauss formula así el problema: *determinar $\int y\,dx$ entre límites dados cuando se conocen varios valores de y.*

Comentario. Dos observaciones: (i) no se disponía aún de la notación $\int_a^b$ para la integral definida (o, como dice Gauss, para la integral tomada *inter limites datos*), (ii) tampoco se contaba con la notación $y = f(x)$ para representar las funciones, debiéndose acudir siempre a la perífrasis "la variable y es función de la variable x". Tratándose de valores concretos ("determinados" les llama Gauss), había que usar "y_0 es el valor determinado que toma y cuando $x = x_0$" en vez de nuestro $y_0 = f(x_0)$. □

Si la integral *debe ser sumada* desde $x = g$ hasta $x = g + \Delta$, Gauss comienza por introducir la variable auxiliar $t = \frac{x-g}{\Delta}$ en términos de la cual el valor buscado es $\Delta \int y\,dt$, con la nueva integral tomada desde $t = 0$ a $t = 1$. Denota por A, A', A'', A''', $\ldots$, $A^{(n)}$ los $n+1$ valores dados, y por a, a', a'', a''', $\ldots$, $a^{(n)}$ los correspondientes valores de t.

El primer paso para Gauss es construir Y, *la función algebraica de orden*[8] *n:*

$$\begin{aligned}
&A\,\frac{(t-a')(t-a'')(t-a''')\cdots(t-a^{(n)})}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\cdots(a-a^{(n)})} \\
&+A'\,\frac{(t-a)(t-a'')(t-a''')\cdots(t-a^{(n)})}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')\cdots(a'-a^{(n)})} \\
&+A''\,\frac{(t-a)(t-a')(t-a''')\cdots(t-a^{(n)})}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')\cdots(a''-a^{(n)})} \\
&+\text{etc.} \\
&+A^{(n)}\,\frac{(t-a)(t-a')(t-a'')\cdots(t-a^{(n-1)})}{(a^{(n)}-a)(a^{(n)}-a')(a^{(n)}-a'')\cdots(a^{(n)}-a^{(n-1)})}.
\end{aligned} \tag{1}$$

[8] Hoy diríamos "polinomio de grado". Evidentemente, se trata del polinomio de interpolación escrito en la forma llamada de Lagrange [4, 7].

Es manifiesto que los valores de esta función, si t se hace igual a a, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$, coinciden con los correspondientes valores de y, de donde deduce que Y es idéntica a y cada vez que y sea una función algebraica entera [polinomio] cuyo orden [grado] no exceda de n.

Comentario. En el artículo §2, Gauss, al hacer el desarrollo paralelo a éste en el caso de nodos equiespaciados, había ya notado que, si dos polinomios de grado $\leq n$ coinciden para $n+1$ valores de su variable, coinciden idénticamente: su diferencia es idénticamente nula por ser un polinomio de grado $\leq n$ con $n+1$ ceros. El hecho de que un polinomio de grado $\leq n$ queda determinado por sus valores en $n+1$ abscisas distintas se usará alguna vez más en lo que sigue. □

Para hallar $\int Y\,dt$ considera sucesivamente las distintas partes de Y. Designa el producto

$$(t-a)(t-a')(t-a'')(t-a''')\cdots(t-a^{(n)}) \tag{2}$$

por T, y por desarrollo del producto hace

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \text{etc.} + \alpha^{(n)}. \tag{3}$$

El [polinomio en el] numerador de la fracción que aparece multiplicada por A en el primer término de Y [en (1)] será $\frac{T}{t-a}$; los numeradores de las partes siguientes serán $\frac{T}{t-a'}$, $\frac{T}{t-a''}$, $\frac{T}{t-a'''}$, etc. En verdad, los denominadores no son otra cosa que los valores determinados de los numeradores si, respectivamente, se pone $t=a$, $t=a'$, $t=a''$, $t=a'''$, etc. Denota estos denominadores por M, M', M'', M''', respectivamente, para que sea

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A'T}{M'(t-a')} + \frac{A''T}{M''(t-a'')} + \text{etc.} + \frac{A^{(n)}T}{M^{(n)}(t-a^{(n)})}.$$

Como se hace $T=0$ para $t=a$, se tiene

$$\begin{aligned} T = {} & t^{n+1} - a^{n+1} + \alpha(t^n - a^n) + \alpha'(t^{n-1} - a^{n-1}) + \alpha''(t^{n-2} - a^{n-2}) \\ & + \text{etc.} + \alpha^{(n-1)}(t-a). \end{aligned}$$

Dividiendo por $t-a$ será[9]

$$\begin{aligned} \frac{T}{t-a} = t^n + at^{n-1} &+ aat^{n-2} + a^3t^{n-3} + \text{etc.} + a^n \\ + \alpha t^{n-1} &+ \alpha a t^{n-2} + \alpha aat^{n-3} + \text{etc.} + \alpha a^{n-1} \\ &+ \alpha' t^{n-2} + \alpha' a t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha' a^{n-2} \\ &\qquad + \alpha'' t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha'' a^{n-3} \\ &\qquad\qquad + \text{etc. etc.} \\ &\qquad\qquad\quad + \alpha^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

[9]Recordemos que ya se ha notado que $T/(t-a)$ es el polinomio de grado n de coeficiente director unidad con ceros en $t=a'$, $t=a''$, ..., $t=a^{(n)}$. En la fórmula que sigue, Gauss expresa este polinomio, no en términos de sus ceros, sino en términos de los coeficientes α, ..., $\alpha^{(n-1)}$ de T en (3).

El valor de esta función para $t = a$ resulta

$$= (n+1)a^n + n\alpha a^{n-1} + (n-1)\alpha' a^{n-2} + (n-2)\alpha'' a^{n-3} + \text{etc.} + \alpha^{(n-1)}.$$

De aquí Gauss concluye que M *es el valor de* $\frac{dT}{dt}$ *para* $t = a$, y de la misma manera M', M'', M''', etc. serán los valores de $\frac{dT}{dt}$ para $t = a'$, $t = a''$, $t = a'''$, etc.

Comentario. A esta misma conclusión puede llegarse de manera más fácil de varias formas, por ejemplo derivando con respecto a t en (2) y evaluando en $t = a$ o, más elegantemente, observando que el valor del polinomio $T/(t-a)$ en $t = a$ ha de concidir con el límite al acercarse t a a y este límite es, por definición, el valor de la derivada de T en $t = a$, ya que T se anula en $t = a$. Gauss se daba perfecta cuenta de estar matando moscas a cañonazos, porque nota que la conclusión a la que acaba de llegar *consta de otras maneras*. Si recurre a (4) es porque a continuación va a usar esta misma fórmula para hallar la integral de $T/(t-a)$. □

Halla el valor de la integral $\int \frac{T\,dt}{t-a}$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$ [integrando en (4)],

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{aa}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} &+ \text{etc.} + a^n \\
+ \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha aa}{n-2} &+ \text{etc.} + \alpha a^{n-1} \\
+ \frac{\alpha'}{n-1} + \frac{\alpha' a}{n-2} &+ \text{etc.} + \alpha' a^{n-2} \\
+ \frac{\alpha''}{n-2} &+ \text{etc.} + \alpha'' a^{n-3} \\
&+ \text{etc. etc.} \\
&\qquad + \alpha^{(n-1)},
\end{aligned}$$

expresión cuyos términos dispone en el orden siguiente:

$$\begin{aligned}
&a^n + \alpha a^{n-1} + \alpha' a^{n-2} + \alpha'' a^{n-3} + \text{etc.} + \alpha^{(n-1)} \\
&+ \frac{1}{2}(a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha' a^{n-3} + \text{etc.} + \alpha^{(n-2)}) \\
&+ \frac{1}{3}(a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha' a^{n-4} + \text{etc.} + \alpha^{(n-3)}) \\
&+ \frac{1}{4}(a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \text{etc.} + \alpha^{(n-4)}) \\
&+ \text{etc.} \\
&+ \frac{1}{n-1}(aa + \alpha a + \alpha') \\
&+ \frac{1}{n}(a + \alpha) \\
&+ \frac{1}{(n+1)}.
\end{aligned}$$

Llegado a este punto, Gauss afirma que es *manifiesto*[10] [¿?] que a la misma cantidad se llega si en el producto de T por la serie infinita

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}, \tag{5}$$

descartadas las potencias negativas de t (o, dicho más brevemente, en la parte del producto que es función entera [polinómica] de t), se reemplaza t por a. Hace

$$\boxed{T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}\right) = T' + T''} \tag{6}$$

donde T' es la función entera [polinomio] contenida en este producto y T'' la otra parte.[11] De este modo será el valor de la integral $\int \frac{T\,dt}{t-a}$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$ igual al valor de la función T' para $t = a$. Denota los valores determinados de la función

$$\frac{T'}{\frac{dT}{dt}} \tag{7}$$

para $t = a$, $t = a'$, $t = a''$, $t = a'''$, etc. hasta $t = a^{(n)}$, respectivamente, por R, R', R'', R''', etc. hasta $R^{(n)}$, y la integral $\int Y\,dt$ de $t = 0$ a $t = 1$ será

$$\boxed{RA + R'A' + R''A'' + \text{etc.} + R^{(n)}A^{(n)},} \tag{8}$$

lo que multiplicado por Δ exhibirá el valor verdadero o aproximado de $\int y\,dx$ de $x = g$ a $x = g + \Delta$.

Ahora que ha obtenido la regla de cuadratura buscada [(8)], Gauss replica todo el desarrollo, trabajando con la variable auxiliar $u = 2t - 1$ en vez de t. [Con la nueva variable auxiliar el intervalo de integración es simétrico: de $u = -1$ a $u = 1$.] La función

$$U = (u - b)(u - b')(u - b'') \cdots (u - b^{(n)})$$

reemplaza a la función T en (2) y la serie[12]

$$\varphi = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \text{etc.} \tag{9}$$

juega el papel antes desempeñado por (5). En vez de (6), ahora descompone $U\varphi$ como $U' + U''$. Como aplicación encuentra los pesos de las fórmulas de Newton-Cotes [nodos equiespaciados] trabajando tanto con t como con u.

[10]La serie (5) que se introduce como *deus ex machina* podría alternativamente haberse presentado de modo natural, como veremos más adelante. Es el desarrollo de Laurent de la función $\int_0^1 d\tau/(t - \tau) = \log(t/(t-1))$ analítica en el dominio resultante de quitar del plano complejo el intervalo $[0,1]$ de la recta real, es decir el intervalo en el que estamos integrando Y.

[11]He puesto un recuadro a las fórmulas más importantes. El grado de T', que *no es la derivada de* T, es n ya que T es de grado $n + 1$.

[12]Desarrollo de Laurent de $(1/2)\log((u+1)/(u-1)) = (1/2)\int_{-1}^1 dv/(u - v)$, función analítica en el complemento del intervalo real $[-1,1]$.

Seguidamente (§11) resuelve un problema algebraico. Dadas tres funciones enteras [polinomios] Z, ζ, ζ' con coeficientes racionales[13] de una misma indeterminada z, se desea encontrar una función entera [polinomio] que coincida con Z/ζ cuando para z se toma una cualquiera de las raíces de la ecuación $\zeta' = 0$. El §12 da en detalle un ejemplo numérico del cálculo [de tal polinomio].

Comentario. Por supuesto, a la vista de (7), este problema algebraico es relevante en nuestro contexto en el caso de que T tenga coeficientes racionales —y entonces lo mismo les ocurre a T' y a dT/dt— pues las abscisas a, a', ... son las raíces de la ecuación polinómica $T = 0$. En lenguaje moderno sabemos que el cuerpo $\mathbb{Q}(\xi)$ resultante de adjuntar un irracional ξ al cuerpo racional, que está dado por las expresiones racionales en ξ, coincide, en el caso de que ξ sea algebraico, con el conjunto de polinomios $\mathbb{Q}[\xi]$. □

3. El error

Los números §13 a §14 (páginas 22–24) se dedican al análisis del error en la fórmula (8). Se pone

$$Ra^m + R'a'^m + \text{etc.} + R^{(n)}a^{(n)m} = \frac{1}{m+1} - k^{(m)} \tag{10}$$

donde $k^{(m)}$ es la diferencia entre la integral $\int t^m\,dt$ desde $t = 0$ a $t = 1$ y el valor aproximado. Si se define

$$\Theta = kt^{-1} + k't^{-2} + k''t^{-3} + k'''t^{-4} + \text{etc.}$$

o, mejor (porque k, k', hasta $k^{(n)}$ deben anularse[14]),

$$\Theta = k^{(n+1)}t^{-(n+2)} + k^{(n+2)}t^{-(n+3)} + k^{(n+3)}t^{-(n+4)} + \text{etc.},$$

se tendrá entonces, desarrollada cada fracción en serie,

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}} = t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \text{etc.} - \Theta. \tag{11}$$

Comentario. Se ha desarrollado $1/(t-a) = t^{-1} + at^{-2} + \cdots$, etc. Vemos ahora claro el significado de la serie (5), que Gauss nos presentó de modo tan artificioso en el desarrollo que condujo a (8): el coeficiente de t^{-m-1}, $m = 0, 1, \ldots$, en esta serie es el valor $1/(m+1)$ de la integral $\int_0^1 t^m\,dt$, es decir, el *momento* de orden m de la medida dt en el intervalo $[0, 1]$. De modo análogo, el momento de orden m de la medida (combinación de masas puntuales o deltas de Dirac) $R\delta_a + R'\delta_{a'} + \cdots$ asociada con la cuadratura (8) es el primer miembro de (10), y $k^{(m)}$ el momento de orden m de la medida (con signo) asociada con el error. Imponer exactitud para 1, t, ..., es, claro, demandar que la cuadratura reproduzca

[13]Nótese que, en ζ', la prima no indica derivada. Gauss siempre usa la notación de Leibniz (cociente de diferenciales) y no la de Newton (puntos o primas).

[14]Aquí la memoria tiene una incoherencia menor: en la definición de Θ precedente se debería haber incluido un término k_0t^0 correspondiente al error al cuadrar t^0 y luego haber notado que el coeficiente k_0 es nulo por la misma razón que lo son k, k', ..., $k^{(n)}$.

sin error los momentos de orden 0, 1, … Representado las sucesiones de momentos por las series en potencias de $1/t$ que los tienen como coeficientes (serie que coincide esencialmente con lo que se llama *transformada Z* o también *función generatriz)*, se pasa de (10) a (11).

Dada una medida μ en la recta real, a la función $M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(\tau)/(t-\tau)$ se le llama a veces la *transformada de Cauchy* de μ (también se usan las denominaciones función de Markov, transformada de Borel, transformada de Stieljes, etc.). Desarrollando el integrando en potencias de $1/t$, se ve fácilmente que los coeficientes del desarrollo formal en potencias de $1/t$ de la transformada son los momentos de la medida. Además, si la medida tiene soporte compacto, la transformada es de hecho una función analítica en el entorno de $t = \infty$. Si el integrando f es representable mediante una integral de contorno $f(\tau) = (1/(2\pi i)) \oint_\gamma dt/(\tau - t)$ en el plano complejo, entonces, cambiando el orden de integración en las variables t y τ, se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, d\mu(\tau) = -(1/(2\pi i)) \oint_\gamma M(t) f(t)\, dt$. Esto permite acotar el error de cuadratura para integrandos analíticos en términos de cotas de la diferencia, evaluada en el contorno de integración γ, entre las transformadas de Cauchy de la verdadera medida y de la regla de cuadratura. En nuestro caso permite acotar el error de cuadratura en términos de Θ. □

Multiplicando por T será [vista la igualdad (6)]

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}\right) = T' + T'' - T\Theta.$$

Gauss nota que la parte primera [primer miembro] de esta ecuación es una función entera [polinomio] de t de orden [grado] n, cuyos valores determinados para $t = a$, $t = a'$, $t = a''$, etc. respectivamente son[15] MR, $M'R'$, $M''R''$, etc., que son los mismos que los de la función T'.[16] Necesariamente esa parte primera debe ser idéntica a T', y de ahí $T'' = T\Theta$.

Comentario. Se tienen por tanto las relaciones fundamentales (que no figuran en Gauss)

$$\boxed{\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}} = \frac{T'}{T},} \qquad \boxed{\Theta = \frac{T''}{T}.} \tag{$\star$}$$

Las abscisas determinan T en (2) y, a su vez, T conduce a T' y T'' a través de (6). El desarrollo de T''/T proporciona los coeficientes de error como Gauss notará acto seguido. La función racional T'/T permite recuperar la regla: tiene polos simples en las abscisas y los correspondientes residuos son los pesos. En (7) reconocemos la bien conocida fórmula para calcular el residuo de un cociente en un polo simple.

Por otro lado, consideremos una regla de cuadratura de la forma (8) con nodos a, a', …, y pesos R, R', … por el momento arbitrarios. Es evidente que la regla será exacta para t^m, $m = 0, 1, \ldots, n$, si y solo si los $n+1$ primeros coeficientes del desarrollo de $R/(t-a) + R'/(t-a') + \cdots$ en potencias de $1/t$ coinciden con los de (5), o equivalentemente, tras multiplicar por T, el polinomio

$$T\left(R/(t-a) + R'/(t-a') + \cdots\right)$$

[15] Recordemos que ya se observó que M es el valor del polinomio $T/(t-a)$ en $t = a$, y análogamente para a', etc.

[16] Ya que R y M son los valores de $T'/(dT/dt)$ y dT/dt en a, y análogamente para las demás abscisas.

coincide con el polinomio T' definido en (6). Por tanto, la primera fórmula en ($\star$) caracteriza los pesos de la regla interpolatoria con nodos en los ceros de T. $\square$

Resulta entonces que los coeficientes $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$, etc. *pueden obtenerse del desarrollo de la fracción* $\frac{T''}{T}$. Encontrados éstos, la corrección de nuestro valor aproximado de la integral $\int y\,dt$ será

$$k^{(n+1)}K^{(n+1)} + k^{(n+2)}K^{(n+2)} + \text{etc.}$$

si la serie en la que se desarrolla y es

$$y = K + K't + K''tt + K'''t^3 + \text{etc.}$$

Comentario. Gauss acaba de usar, sin cuestionarse su validez, dos cosas: (i) que y puede desarrollarse en serie (de Taylor) en potencias de t y, más aún, que el desarrollo converge en todo el intervalo $0 \leq t \leq 1$, (ii) que la serie se puede integrar término a término. $\square$

4. La idea principal

Los números §15 a §16 (páginas 24–26) contienen la idea principal de la memoria. Cualesquiera que sean los nodos a, a', $\ldots$, Gauss ha obtenido una fórmula (8) que es exacta para cada polinomio de grado $\leq n$. Sin embargo, había discutido en detalle en el §6 cómo, para n par, la regla de Cotes basada en $n+1$ abscisas equiespaciadas también integra exactamente, por simetría, la función t^{n+1}.[17] Gauss se plantea entonces cómo elegir los nodos para que los coeficientes de error $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$, $\ldots$ (es decir, los coeficientes de t^{-n-1}, t^{-n-2}, $\ldots$ en Θ) se anulen sucesivamente.

Comentario. Es decir, hay que lograr que $\Theta = T''/T$ (o equivalentemente T'') tenga en el infinito $t = \infty$ un cero de orden tan alto como sea posible. (Quizá conviene recordar del cometario que sigue a la fórmula (11) que los valores de Θ en un contorno de integración suficientemente grande determinan el error de cuadratura cuando el integrando es analítico.) Para lograr un cero de orden alto, dados los nodos y por tanto T, Gauss tratará de anular sucesivamente los coeficientes de $1/t$, $1/t^2$, etc. en T'' definido en (6). Como dispone de $n+1$ nodos afirma que podrá anular $n+1$ coeficientes, lo que hará la regla exacta para polinomios de grado $\leq 2n+1$. Da por sentado que imponer $n+1$ condiciones a los $n+1$ coeficientes indeterminados de T en (3) los determina de manera única, sin hacer cuestión de la solubilidad del correspondiente sistema lineal de ecuaciones. Tampoco contempla la posibilidad de que, hallado T, careciera de n raíces reales dos a dos distintas. $\square$

Para encontrar la regla de grado más alto posible todo el negocio se reduce, para nuestro autor, a encontrar, para el valor dado de n, la función de la forma (3) que hace que en el producto [ver (6)]

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}\right)$$

[17] Un caso bien conocido lo proporciona la regla de Simpson (tres nodos) que, aun basándose en interpolación por una parábola cuadrática, cuadra sin error t^3 (y por tanto todos los polinomios cúbicos).

desarrollado en potencias [enteras] de t, los coeficientes de t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, …, $t^{-(n+1)}$ se anulen.

Comentario. De

$$T(t)\int_0^1 \frac{d\tau}{t-\tau} = \int_0^1 \frac{T(t)-T(\tau)}{t-\tau}\,d\tau + \int_0^1 \frac{T(\tau)\,d\tau}{\tau-\tau}$$

y (6) tendremos

$$T'(t) = \int_0^1 \frac{T(t)-T(\tau)}{t-\tau}\,d\tau, \qquad T''(t) = \int_0^1 \frac{T(\tau)\,d\tau}{t-\tau}. \tag{$\star\star$}$$

Desarrollando,

$$T'' = t^{-1}\int_0^1 T(\tau)\,d\tau + t^{-2}\int_0^1 \tau T(\tau)\,d\tau + \cdots$$

con lo que la aniquilación de los coeficientes de T'' no es otra cosa que la ortogonalidad de $T(\tau)$ a 1, τ, … □

Alternativamente, si más place, se puede encontrar la función de la forma $U = u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n-1} + \beta'' u^{n-2} + \text{etc.}$, que hace que su producto por $u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}$ [ver (9)] esté libre de las potencias u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, u^{-4}, …, $u^{-(n+1)}$. El modo posterior, nota Gauss, es [por simetría] ligeramente más sencillo porque, como se percibe fácilmente, los coeficientes de la función U que satisface la condición deben anularse alternativamente, y poniendo $\beta = 0$, $\beta'' = 0$, $\beta^{\text{iv}} = 0$, etc. se disminuye el trabajo.

En el ejemplo más sencillo, $n = 0$, únicamente el coeficiente de t^{-1} en el producto $(t+\alpha)(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \text{etc.})$ debe anularse. Y como aquél sea $\frac{1}{2} + \alpha$, tenemos $\alpha = -\frac{1}{2}$ o $T = t - \frac{1}{2}$.[18] Tras este primer caso, Gauss lleva a cabo los cálculos para las reglas con $n = 1$ y $n = 2$, usando tanto la variable auxiliar t como la u. Sin embargo *este modo, que conduce a cálculos cada vez mas molestos, no se lleva más adelante, sino que se avanza hacia la fuente genuina de la solución.*

5. Determinación de los nodos: un camino mejor

En los números §17 a §21 (páginas 26–36) se proporciona una manera alternativa de hallar T (o U) que no precisa de la resolución de sistemas lineales. Este modo alternativo usa fracciones continuas y Gauss ofrece un breve recordatorio de las mismas.[19]

[18] Es la *regla del punto medio*, basada en interpolación por una constante, que cuadra sin error cada polinomio de primer grado.

[19] Para los lectores que no estén familiarizados con las fracciones continuas, [3] es una referencia muy aconsejable. La relación entre las fracciones continuas y los polinomios ortogonales que se pondrá de manifiesto a continuación se estudia en el Capítulo III de [1].

Comentario. Es bien conocido cómo las fracciones continuas se emplean para resolver problemas de aproximación diofántica: aproximar números irracionales por racionales o también racionales por racionales más sencillos. He aquí un ejemplo. Escribiendo $\pi = 3{,}141592\ldots = 3 + 0{,}141592\ldots = 3 + 1/(1/0{,}141592\ldots)$, $1/0{,}141592\ldots = 7{,}062513\ldots$, se obtiene la muy conocida aproximación $\pi \approx 3 + 1/7 = 22/7$. El proceso puede reiterarse con $0{,}062513\ldots = 1/(1/0{,}062513\ldots) = 1/15{,}996594\ldots$, $\pi \approx 3 + (1/(7 + 1/15))$, etc. para generar una fracción continua cuyo valor es π. Cuando se conoce el desarrollo de un número en fracción continua, las fracciones reducidas proporcionan aproximaciones racionales que son óptimas en un sentido que no precisaré.

De modo similar, tratando con funciones en vez de con números reales, las fracciones continuas pueden utilizarse para aproximar una función dada por funciones racionales. Gauss ha reformulado la cuestión que le ocupa como un problema de aproximación funcional: aproximar $t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \cdots$ por una función racional T'/T en el sentido de que Θ, la diferencia de ambas, tenga un cero de orden lo mayor posible en $t = \infty$; los ceros de T (polos de la fracción) son los nodos buscados. Cuando se trabaja con la variable u hay que aproximar (9) por una función racional U'/U. Es este problema de aproximación funcional el que va a ser resuelto con ayuda de fracciones continuas. $\square$

Propuesta la fracción continua

$$\varphi = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w'' + \cfrac{v'''}{w''' + \text{etc.}}}}}$$

sean formadas dos series de cantidades V, V', etc., W, W', etc., por medio de las fórmulas

$$\begin{aligned} V &= 0, & W &= 1,\\ V' &= v, & W' &= wW,\\ V'' &= w'V' + v'V, & W'' &= w'W' + v'W,\\ V''' &= w''V'' + v''V' & W''' &= w''W'' + v''W',\\ V^{\text{iv}} &= w'''V''' + v'''V'', & W^{\text{iv}} &= w'''W''' + v'''W'', \end{aligned} \tag{12}$$

etc., y será

$$\begin{aligned} \frac{V}{W} &= 0,\\ \frac{V'}{W'} &= \frac{v}{w},\\ \frac{V''}{W''} &= \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w'}},\\ \frac{V'''}{W'''} &= \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w''}}} \end{aligned}$$

y así sucesivamente.

De la serie

$$\frac{v}{WW'} - \frac{vv'}{W'W''} + \frac{vv'v''}{W''W'''} - \frac{vv'v''v'''}{W'''W^{\mathrm{iv}}} + \text{etc.},$$

el término primero es $= \frac{V'}{W'}$,
la suma de los dos términos primeros es $= \frac{V''}{W''}$,
la suma de los tres términos primeros es $= \frac{V'''}{W'''}$,
la suma de los cuatro términos primeros es $= \frac{V^{\mathrm{iv}}}{W^{\mathrm{iv}}}$
y así sucesivamente, de manera que la serie representa la fracción continua φ. Del mismo modo se puede representar [mediante una serie] la diferencia entre φ y cada una de las fracciones aproximantes $\frac{V'}{W'}$, $\frac{V''}{W''}$, $\frac{V'''}{W'''}$, etc.

Para la función φ en (9) que Gauss desea aproximar, la fórmula 33 de su memoria de 1812 sobre la serie hoy llamada hipergeométrica[20] *Disquisitionum generalium circa seriem infinitam* $1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+$etc. suministra el siguiente desarrollo en fracción continua:

$$\cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}}{u - \cfrac{\frac{3\cdot 3}{5\cdot 7}}{u - \cfrac{\frac{4\cdot 4}{7\cdot 9}}{u - \text{etc.}}}}}},$$

de donde se tendrá

$$v = 1,\ v' = -\frac{1}{3},\ v'' = -\frac{4}{15},\ v''' = -\frac{9}{35},\ v^{iv} = -\frac{16}{63}, \text{ etc.},$$

$$w = w' = w'' = w''' = w^{\mathrm{iv}} \text{ etc.} = u.$$

De aquí surgen los valores siguientes:

$$\begin{aligned} V &= 0, & W &= 1,\\ V' &= 1, & W' &= u,\\ V'' &= u, & W'' &= uu - \frac{1}{3},\\ V''' &= uu - \frac{4}{15}, & W''' &= u^3 - \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

etc.

Comentario. Me paro en V''', W''' para abreviar. La memoria contiene las expresiones hasta V^{vii}, W^{vii}, sin duda porque luego Gauss las necesita en el ejemplo numérico.

Los especialistas en polinomios ortogonales reconocerán que estos W, W', … son los polinomios ortogonales mónicos respecto de la medida du en el intervalo $[-1,1]$ (esto es, los polinomios de Legendre reescalados para hacerlos mónicos). La recurrencia (12), que

[20]Para la función hipergeométrica puede verse el Capítulo XIV de [8].

permite el cálculo de los denominadores de las fracciones reducidas, coincide con la relación de recurrencia de tres términos de los polinomios ortogonales. Los V', V'', etc. son los correspondientes *polinomios numeradores* o *polinomios asociados* [1]. □

Un poco de atención aclara que V, V', V'', V''', etc., W, W', W'', W''', etc., son funciones enteras [polinomios] de la indeterminada u. El término altísimo de $V^{(m)}$ se hará u^{m-1} y término altísimo de $W^{(m)}$ se hará u^m. Si $\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ es convertida en serie descendente [por el procedimiento descrito más arriba], su primer término será

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdots m \cdot m \, u^{-(2m+1)}}{3 \cdot 3 \cdots (2m-1)(2m-1)}.$$

Comentario. Consideremos $\varphi - \frac{P}{Q}$ con P arbitrario de grado $m-1$ y Q arbitrario de grado m. Hay $2m+1$ coeficientes intedeterminados en P y Q, pero sólo m son esenciales porque se puede multiplicar P y Q por cualquier constante no nula. Parece entonces razonable poder elegir P y Q para anular los $2m$ coeficientes de $u^{-1}, \ldots, u^{-2m}$ en esa diferencia. Los polinomios $V^{(m)}$ y $W^{(m)}$ obtenidos de la fracción continua logran tal anulación. En lenguaje moderno, $\frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ es el aproximante de Padé $(m-1, m)$ de φ (en $t = \infty$). Ver [6] sobre las relaciones entre la aproximación de Padé y las fracciones continuas. □

El producto $\varphi W^{(m)}$ estará compuesto de la función entera [polinomio] $V^{(m)}$ y de una serie infinita, cuyo primer término es

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdots m \cdot m \, u^{-(m+1)}}{3 \cdot 3 \cdots (2m-1)(2m-1)}.$$

Así se ha encontrado la función U de orden [grado] $n+1$ que satisface la condición establecida anteriormente de que el producto φU esté libre de las potencias u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, …, $u^{-(n+1)}$. No será otra que $W^{(n+1)}$, y al mismo tiempo se manifiesta que U' será igual a $V^{(n+1)}$.[21] *Por tanto, para [los nodos] b, b', b'', …,$b^{(n)}$ tomaremos las raíces de la ecuación $W^{(n+1)} = 0$ y calcularemos los valores de los coeficientes [o pesos] de la manera mostrada arriba, y nuestra fórmula disfrutará de un orden ascendente a $2n+1$.*

Para concluir esta parte, Gauss da expresiones en forma cerrada para los $W^{(n)}$,[22] discute su expresión en términos de la función hipergeométrica y repite todo el desarrollo usando la variable auxiliar t en lugar de la u.

6. Uso de las reglas

Los dos últimos artículos §22–§23 (páginas 36–40) se dedican al uso de las reglas.

Para $n = 0, \ldots, 6$ (uno a siete nodos),[23] Gauss lista:

[21] Una conocida relación entre los polinomios ortogonales y los polinomios asociados/numeradores permite entonces escribir $U'(u) = \int_0^1 (U(u) - U(v))\, dv/(u-v)$, ver fórmula (4.6) en [1]. La relación que se corresponde con ésta cuando se trabaja con t–T en lugar de u–U se dedujo en la fórmula $(\star\star)$ dentro de un comentario anterior.

[22] Esto es, para los polinómios de Legendre mónicos.

[23] Para seis y siete nodos, la determinación de los nodos requiere resolver ecuaciones de grado seis o siete, pero por la simetría $u \mapsto -u$ ambas se reducen a ecuaciones cúbicas.

1. Los polinomios U, U', T, T'.
2. Las abscisas a, a', ... con 16 cifras decimales significativas.
3. Los pesos R, R', ... con 16 cifras decimales significativas. (Para $n \geq 3$ también los correspondientes logaritmos decimales con 10 cifras significativas.)
4. El polinomio con coeficientes racionales que evaluado en los nodos da los pesos.
5. El término dominante del desarrollo en serie del error.

Comentario. Por supuesto, los logaritmos de los pesos se usaban para efectuar los productos de éstos por los valores conocidos de y que figuran en la regla (8).

Más precisamente, la memoria da los valores del logaritmo decimal de $10^9 R$, $10^9 R'$, etc. El artificio de multiplicar cada número por 10^9 presumiblemente serviría para evitar usar logaritmos negativos. (Los logaritmos negativos dificultan el cálculo: para multiplicar un número con logaritmo positivo por un segundo con logaritmo negativo hay que efectuar una *resta* y no una suma. En el bachillerato de mi adolescencia las restas se evitaban hallando complementos, por ejemplo $\log_{10} 0{,}2 = -0{,}698970\ldots$ se expresaba como $\log_{10}(1/10) + \log_{10} 2 = -1 + 0{,}301030\ldots$, cosa que escribíamos $\bar{1}{,}301030\ldots$) □

Finalmente *ponemos ante los ojos la eficacia de nuestro método calculando los valores de la integral* $\int \frac{dx}{\log x}$ desde $x = 100000$ hasta $x = 200000$ por medio de las reglas con uno a siete nodos [subrayo las cifras que no se modifican al incrementar n]:

$$\underline{8}390{,}394608$$
$$\underline{840}5{,}954599$$
$$\underline{8406{,}2}36775$$
$$\underline{8406{,}242}970$$
$$\underline{8406{,}2431}17$$
$$\underline{8406{,}243121}$$
$$\underline{8406{,}2431211}$$

Gauss nos informa de que Bessel había obtenido, no dice cómo, el valor 8406,24312.

Comentario. Mostré una versión preliminar de este trabajo al prof. L. N. Trefethen y comprobó con su software CHEBFUN los cálculos de Gauss. Gauss lista los productos ΔRA, $\Delta R'A'$, etc. con siete cifras decimales tras la coma. Para la regla de siete nodos, Trefethen encontró que los valores de esos productos proporcionados por Gauss son típicamente erróneos en una unidad en la cifra menos significativa (esto es, hay error de una diezmillonésima aproximadamente).

Como vemos de los subrayados, los errores disminuyen exponencialmente al incrementar el número de nodos. Es fácil probar que esto ocurre para cualquier integrando analítico. El intervalo de integración es sumamente largo, pero, a cambio, el integrando apenas varía ($(d/dx)\log x = 1/x \leq 10^{-5}$), lo que explica la bondad de los resultados incluso con muy pocos nodos.

Por último, no es aventurado suponer que esta integral era de interés para Gauss en relación con su conjetura de que $1/\log x$ es la densidad de los números primos (actual teorema de los números primos). Por curiosidad: hay 8392 primos en el intervalo considerado. □

Agradecimientos. Antonio García y Nick Trefethen comentaron versiones preliminares del texto. Jorge Arvesú y Paco Marcellán me informaron sobre la transformada de Cauchy y los polinomios asociados respectivamente. Gracias a todos.

Referencias

[1] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.

[2] C. F. Gauss, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*, Gottingae, H. Dietrich, 1815.

[3] E. Hairer y G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer, New York, 1996.

[4] E. Isaacson y H. B. Keller, *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons, New York, 1966.

[5] C. G. J. Jacobi, Über Gauss' neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1** (1826), 301–308.

[6] W. B. Jones y W. J. Thron, *Continued Fractions: Theory and Applications*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980.

[7] J. M. Sanz-Serna, *Diez Lecciones de Cálculo Numérico*, segunda edición revisada y ampliada, Universidad de Valladolid, Valladolid, 2010.

[8] E. T. Whittaker y G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

J. M. Sanz-Serna, Departamento de Matemáticas, Universidad Carlos III de Madrid, Avenida de la Universidad 30, E-28911 Leganés (Madrid)

Correo electrónico: `jmsanzserna@gmail.com`

Página web: `http://www.sanzserna.org`