# Las medallas Fields

Sección a cargo de

**Adolfo Quirós Gracián**

El texto que sigue es una versión ampliada del artículo *Ahlfors, el jardinero que vino del Norte* que apareció en el volumen especial *Las Matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* que la revista *Números* de la Sociedad Canaria *Isaac Newton* de Profesores de Matemáticas publicó con motivo del Año Mundial de las Matemáticas y cuya edición estuvo a cargo de Antonio Martinón; la editorial Nivola publicó una edición adicional.

Este hermoso libro, de original planteamiento, estaba concebido como una mirada a la Matemática del siglo XX fijando sucesivamente la atención sobre un hito de su historia por año. Y el artículo al que nos referimos correspondía al año 1936, en el que se otorgaron las primeras Medallas Fields, pero se centra, sobre todo, en la figura de Ahlfors.

El texto original se ha ampliado incluyendo descripciones más detalladas de algunas de las principales contribuciones matemáticas de Lars Ahlfors.

Agradecemos tanto a la Sociedad *Isaac Newton* como a la Editorial Nivola el permiso para la reproducción.

## Ahlfors: La primera Medalla Fields

por

**José L. Fernández**

En el Congreso Internacional de Matemáticos de Oslo, de 1936, el Rey de Noruega, Haakon VII, entrega las dos primeras Medallas Fields. Los galardonados son Jesse Douglas y Lars Valerian Ahlfors. El norteamericano Douglas no está presente, y en su nombre recoge el premio Norbert Wiener, colega suyo en el Massachusetts Institute of Technology.

Tiempos turbulentos; los vientos del fascismo y el totalitarismo ya azotan Europa. La asistencia al Congreso es escasa.

Douglas recibe la Medalla por su trabajo en el problema de Plateau, que pide verificar la existencia de superficies mínimas con una frontera determinada.

Constantin Carathéodory describe, como presidente del Comité de Selección, el trabajo de los dos premiados[1].

Ahlfors, el primer matemático que recibe la Medalla Fields, nuestro más prestigioso galardón, es, sin duda, la figura central de la variable compleja del siglo XX, a la que aportó contribuciones germinales en casi todas sus áreas, creando y desarrollando muchas de ellas. Hay quien define, y casi no exagera, el análisis complejo del siglo XX como las Matemáticas que tienen que ver con los trabajos de Ahlfors.

LARS VALERIAN AHLFORS

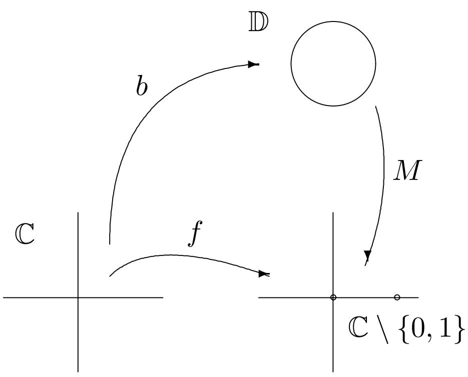
Lars Ahlfors nació en 1907 en Helsinki, en el seno de una familia de cultura y lengua suecas. A Helsinki se la conocía entonces por su nombre sueco de Helsingfors (y así fue hasta la independencia de Finlandia tras la Primera Guerra Mundial) y era la capital del Gran Ducado de Finlandia del imperio zarista. La minoría sueca de Finlandia vivía fundamentalmente en la costa y dominaba, en gran medida, las estructuras económicas de Finlandia.

Ahlfors se doctoró en Helsinki en 1930, fue profesor en Helsinki y en Zurich, y en 1946 tras la Guerra Mundial, se estableció definitivamente en la Universidad de Harvard, en la que había trabajado de 1935 a 1938.

En Matemáticas, la tradición, los modelos, las escuelas son muy importantes; los matemáticos atesoran con celo y devoción sus genealogías de maestro a discípulo.

Ahlfors es, quizás, el principal exponente de la gran escuela nórdica de Teoría de Funciones. Lindelöf, finlandés como Ahlfors, y al que se considera con justicia el padre de la matemática finlandesa, importó esa tradición desde Suecia, y en ella se formó Rolf Nevanlinna, quien, a su vez, fue el maestro de Ahlfors.

[1]En los dos siguientes Congresos Internacionales de Matemáticos de 1950 y de 1954, el presidente del Comité Fields tuvo a su cargo la descripción de los méritos de los *dos* galardonados. Hermann Weyl, en 1954, ya advirtió de la dificultad de la tarea de abarcar la presentación de los avances últimos de varios campos de las matemáticas, y pronosticaba con acierto que ya desde el siguiente Congreso habría que repartirla entre distintos miembros del Comité Fields.




Teorema de Picard. $M$ es (una) función modular, $f$ es entera y $b$, entera y acotada, ha de ser constante.

La Teoría de Funciones, el análisis de las funciones de variable compleja y de las superficies de Riemann, es un área clásica de las Matemáticas. Uno de sus resultados más deslumbrantes por la sencillez y contundencia de su enunciado es el teorema de Picard. Una función entera es una función de variable compleja con valores complejos, definida y holomorfa en todo el plano. El teorema de Picard afirma que: *Toda función entera no constante toma todos los valores complejos salvo a lo sumo un valor excepcional.* La prueba es ahora muy sencilla. Tiene tres ingredientes. Hay una función holomorfa, $M$, definida en el disco unidad (que denotaremos por $\mathbb{D}$) y que toma todos los valores salvo el 0 y 1. Esta función $M$, una función *modular*, es, de hecho, un cubrimiento. Supongamos que tenemos una $f$ holomorfa en todo $\mathbb{C}$ y cuya imagen no contiene a esos dos puntos, 0 y 1. La topología nos dice que una tal $f$ se puede factorizar a través de $M$, es decir, $f = M \circ b$. Esta aplicación $b$ es holomorfa en todo el plano complejo y acotada, y el teorema de Liouville (una sencilla acotación de coeficientes de Taylor) nos dice que es constante.

Desde Picard, se quería entender su teorema sin apelar a los llamados métodos trascendentes, es decir, sin apelar a la función modular $M$. Lindelöf contribuyó decisivamente a ese programa, de hecho, el teorema de Phragmén-Lindelöf fue obtenido como herramienta para esos estudios.

Nevanlinna aporta un cambio radical cuando, en los años veinte, crea la teoría que ahora lleva su nombre, incorporando métodos de Teoría del Potencial y de Geometría Diferencial, que permiten obtener cotas explícitas del número medio de veces con que las funciones toman los distintos valores, en términos de ciertas tasas de crecimiento.

Ahlfors, al comienzo de los años treinta, lleva esas técnicas y esa conjunción de métodos mucho más lejos y logra dar formas de estimar el número de veces (y no el número medio de veces) con que se toman los valores, como número de hojas de cubrimientos ramificados y en términos del área que va cubriendo la función. Es la Teoría de Cubrimientos de Ahlfors; el motivo principal por el que se le concedió la Medalla Fields. La Teoría de Ahlfors constituye la culminación de sesenta años de investigaciones que habían comenzado con Liouville y Picard.

TEORÍA DE CUBRIMIENTOS. Las funciones meromorfas han de repartir compensadamente las zonas donde toman distintos valores. La Teoría de Distribución de Valores, o Teoría de Nevanlinna tiene como objetivo cuantificar esa distribución compensada de valores.

Nevanlinna obtuvo resultados sobre el número medio de veces con que una función meromorfa $f$ alcanza determinados valores en términos del crecimiento de la característica de Nevanlinna, $T(f,r)$, que viene dada por

$$T(f,r) = \int_0^r \frac{S(f,t)}{t} dt$$

donde

$$S(f,t) = \iint_{\mathbb{D}(0,t)} \left( \frac{|f'(z)|}{(1+|f(z)|^2)} \right)^2 dA$$

Obsérvese que $S$ mide cuanta área cubre la imagen por $f$ del disco $\mathbb{D}(0,t)$, teniendo en cuenta la multiplicidad. Mientas que $T$ es, consiguientemente, el número medio de cubrimiento.

Ahlfors fue un paso más allá, y fue capaz de estimar el número de veces con que se alcanzan valores en función directamente de $S$. Uno de sus principales resultados, para funciones meromorfas trascendentes, es el siguiente.

Si $D_1, D_2, \ldots, D_q$ son discos disjuntos, una componente de $f^{-1}(D_j) \cap \mathbb{D}(0,r)$ se dice *isla* si es relativamente compacto en $\mathbb{D}(0,r)$ (en caso contrario, se dice *península*). Si denotamos por $n(r, D_j)$ al número de islas sobre $D_j$, entonces

$$\sum_{j=1}^{q} n(r, D_j) \geq (q-2)S(r) + o(S(r))$$

para casi todos los $r$'s.

Como consecuencia se obtiene, por ejemplo, un precioso resultado, el teorema de las Cinco Islas de Ahlfors:

*Si $D_1, D_2, \cdots, D_5$ son discos disjuntos, existe un dominio simplemente conexo y acotado que $f$ aplica de manera homeomorfa sobre unos de los $D_j$.*

Unos años antes, Ahlfors había demostrado también la Conjetura de Denjoy. Esta conjetura, que ahora es el teorema de Ahlfors-Carleman, afirma que el número máximo de valores asintóticos de una función entera está determinado por la rapidez de crecimiento de esa función, o más precisamente, el número de valores asintóticos de una función entera es a lo sumo dos veces el orden de la función. Carleman, matemático sueco, había sido capaz, unos años antes, de demostrar el resultado pero con un factor de 5 en lugar de 2, que es el mejor posible. Para probar este teorema, Ahlfors demostró el llamado Teorema de Distorsión, una extensión prodigiosa del teorema de Phragmén-Lindelöf, que se ha convertido en una herramienta estándar en el estudio geométrico de las funciones.

Teorema de Distorsión de Ahlfors. En su trabajo sobre la Conjetura de Denjoy sobre valores asintóticos de funciones enteras, Ahlfors descubrió un extraordinario teorema de Teoría de Potencial. El teorema de Distorsión de Ahlfors afirma lo siguiente:

*Sea $\Omega$ un dominio simplemente conexo, $0 \in \Omega$, y para cada $r$ sea $\Omega_r$ la componente de $\Omega \cap \mathbb{D}(0,r)$ que contiene a $0$. Sea $\omega(r)$ el valor en $0$ de la función armónica en $\Omega_r$ que vale $1$ en la parte del borde de $\Omega_r$ que yace en $|z| = r$, y que vale $0$ en el resto de su borde, entonces*

$$\omega(r) \leq A \exp\left(-\pi \int_1^{r/2} \frac{dt}{\theta(t)}\right)$$

*donde $\theta(t)$ es la longitud de la intersección de $\Omega_r$ con $|z| = t$ (salvo que todo este círculo esté contenido en $\Omega_r$ en que ponemos $\omega(t) = \infty$).*

El Teorema de Distorsión es la técnica fundamental de estimación de tamaño de funciones holomorfas o de funciones armónicas en el plano complejo cuando se dispone de información puramente geométrica.

También se interesó en aquellos años por la existencia de funciones de Green en superficies de Riemann, el llamado problema de tipo, para lo que dio un criterio geométrico, la condición de Ahlfors. Un criterio que ha sido el germen de muchos resultados en la teoría del potencial en variedades. Para resolver estas cuestiones Ahlfors creó técnicas nuevas de amplio espectro que se siguen usando hoy en día en todas las investigaciones en que, de manera profunda, se necesita entender geométricamente la holomorfía, como, por ejemplo, en ese campo tan actual que es la Dinámica compleja que en años recientes ha cosechado dos Medallas Fields, las de J.-C. Yoccoz y de C. McMullen.

Las Medallas Fields no eran entonces lo que son ahora. Las de 1936 eran las primeras.

Eran momentos de una gran tensión política. La Unión Matemática Internacional casi había desaparecido como consecuencia de los enfrentamientos entre las representaciones de distintos países. Fields, al dotar en su testamento un fondo para la financiación de las Medallas, quería ayudar a conferirle al cultivo de las matemáticas un ánimo lo más internacional posible, lejos de intereses nacionales. Pero, el ambiente para esto era aún menos propicio que cuando el congreso de Toronto, que Fields había organizado y que tanta amargura le había causado.

Los temas matemáticos por los que se otorgaron las Medallas, problema de Plateau y superficies de Riemann, eran ambos muy queridos de Carathéodory; el propio Carathéodory le había recomendado en 1935 a la Universidad de Harvard que contratara a Ahlfors. En el momento de la concesión, Douglas y Ahlfors trabajaban en los Estados Unidos, de hecho en instituciones vecinas, MIT y Harvard, lejos de la confrontación matemática entre Alemania y Francia.

El propio Ahlfors recuerda con modestia:

> El prestigio [de la Medalla Fields] quizás no era todavía el que ha llegado a alcanzar, pero en cualquier caso me sentí muy honrado. [...] El premio contribuyó, en gran medida, a incrementar la confianza que sentía en mi trabajo.

Pero desde luego, las contribuciones de Ahlfors a sus 29 años y su carrera científica posterior justifican plenamente la Medalla que se le concedió, incluso con los criterios, el rigor y el prestigio que con el tiempo las Medallas han adquirirdo.

La carrera científica de Ahlfors es ejemplar, todo un modelo. Publicó relativamente pocos artículos pero cada uno de ellos es significativo. Sus intereses fueron evolucionando gradualmente, y en cada paso abrió un campo nuevo de la variable compleja, en ocasiones con un sólo artículo. Un gusto y una selección de intereses insuperables. Decía al respecto: *"I like to go fishing where the fish are, rather than trying exclusively for the big one"*, o que una de las marcas de gran matemático es saber elegir bien los problemas y las cuestiones que se adecúan a su capacidad e intereses, un consejo nada trivial. Sentía una verdadera pasión por las Matemáticas, en la que se exigía una perfección artesana de obra bien hecha, que logró transmitir a sus alumnos y colegas a lo largo de una carrera que abarca sesenta años; con ochenta años publicó artículos de sumo interés sobre transformaciones de Möbius y sobre deformaciones cuasiconformes multidimensionales. Hermann Weyl, siempre tan literario, se refiere a Ahlfors en la introducción de su libro sobre curvas meromorfas y equidistribución, como *ese gran jardinero que vino del norte y que plantó el viñedo que ahora cultivo.*

Distancias invariantes en variedades complejas (lema de Ahlfors-Schwarz), capacidad analítica o de Ahlfors, equidistribución y curvas meromorfas, longitud extremal e invariantes conformes, aplicaciones cuasiconformes (el teorema de Riemann con métricas variables), grupos Kleinianos (conjetura de Ahlfors, teorema de Finitud), son sólo algunas palabras claves que jalonan su extraordinaria producción científica. Por el conjunto de toda su carrera Ahlfors recibió el Wolf Prize en 1981.

El lema de Ahlfors-Schwarz. El lema de Schwarz significa geométricamente que las aplicaciones holomorfas de $\mathbb{D}$ en sí mismo son Lipschitz con cota 1, es decir, contracciones, cuando a $\mathbb{D}$ se le dota de la métrica hiperbólica.

Ahlfors, en su intento de determinar la constante de Bloch (es decir, la mejor cota $B$ tal que si $f$ es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $|f'(0)| = 1$, entonces $f$ cubre un disco de radio $B$ inyectivamente), se propuso entender el verdadero contenido geométrico del lema de Schwarz y obtuvo:

*Si $W$ es una superficie de Riemann dotada de una métrica $g$ compatible con la estructura conforme de curvatura $\leq 1$ en todas partes, entonces toda aplicación holomorfa de $\mathbb{D}$ en $W$ es una contracción de la métrica de Poincaré en la métrica $g$.*

*O, si se quiere, si en $\mathbb{D}$ tenemos dos métricas $g_1$ y $g_2$ la segunda completa, y sí sus respectivas curvaturas $K_1, K_2$ verifican:*

$$\sup K_1 \leq \inf K_2 < 0$$

*entonces las longitudes de curvas medidas con $g_1$ son menores o iguales que medidas con $g_2$.*

En otros términos, la métrica de Poincaré, que a través de un cubrimiento universal se puede proyectar sobre (casi) toda superficie de Riemann, desempeña un papel maximal. Métricas adecuadas $g$ permiten obtener cotas de interés. Mario Bonk ha determinado recientemente, siguiendo los planteamientos de Ahlfors, el valor exacto de la constante de Bloch.

Los métodos de Ahlfors han tenido una extraordinaria influencia tanto en la teoría de Nevanlinna de dimensión superior como en la teoría de variedades complejas al servir de modelo para la métrica de Kobayashi. En sus *Collected Papers* Ahlfors comenta que dudó en publicar sus resultados y que no lo hubiera hecho de no ser por las varias aplicaciones que había conseguido. Confiesa además que no supo calibrar en su día la profundidad y utilidad de su extensión del lema de Schwarz.

Ahlfors publicó en 1953 un clásico, su texto *Complex Analysis*, que para muchos sigue siendo, tras cincuenta años, la mejor introducción a la variable compleja por su claridad de exposición, por su riqueza de contenido y por el entusiasmo por las Matemáticas que proyecta.

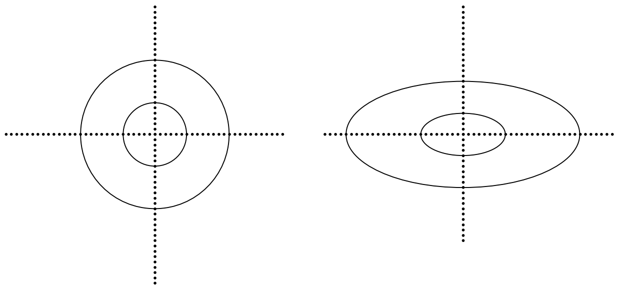
Ahlfors también publicó tres monografías de investigación de distinto carácter. *Riemann Surfaces*, con L. Sario, que quiso ser, y lo fue, una descripción enciclopédica del conocimiento sobre superficies de Riemann a principios de los años sesenta, pero sobre la que el propio Ahlfors manifestó años después ciertas reservas: un propósito excesivo no bien calibrado que consumió demasiado tiempo. El libro *Quasiconformal Mappings*, que recoge, redactadas por Clifford Earle, las notas de un curso de doctorado, es una verdadera joya de la literatura matemática, escrita con una claridad, elegancia y profundidad que aún lo mantienen como una referencia esencial. En *Quasiconformal Mappings*

Ahlfors estableció las bases de la teoría aportándole un impulso definitivo a su desarrollo. En *Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory*, Ahlfors explica su forma de entender la Teoría de Funciones, un punto de vista geométrico basado en Teoría del Potencial, que se trasluce al resaltar que estos invariantes conformes son la métrica de Poincaré, la longitud extremal o la medida armónica.

---

APLICACIONES CUASICONFORMES. Ahlfors sentó los fundamentos de la teoría de las aplicaciones cuasiconformes en el plano y fue uno de los principales impulsores de su extensión a $\mathbb{R}^n$. Las aplicaciones cuasiconformes son una herramienta de la Teoría de Funciones, de la Dinámica Compleja y de la Topología de Variedades.

Una aplicación cuasiconforme es *esencialmente* un homeomorfismo cuya diferencial en cada punto transforma círculos en el plano tangente en elipses con excentricidad acotada en todo punto:



Si la cota de excentricidad es $K$ decimos que $f$ es $K$-cuasiconforme. Las aplicaciones cuasiconformes de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, o entre variedades riemannianas, se definen análogamente.

Ahlfors y Beurling caracterizaron el comportamiento frontera de las aplicaciones cuasiconformes:

*Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ es homeomorfismo cuasiconforme, entonces $f$ es homeomorfismo continuo en el borde, $\mathbb{R}$, que cumple*

$$\frac{1}{H} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{f(x) - f(x-h)} \leq H \tag{1}$$

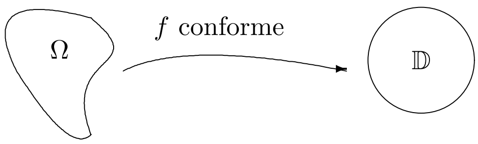
*para un cierto $H$, y todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $h > 0$.*

Y, recíprocamente, todo homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en sí mismo que cumple la condición (1) se extiende a un aplicación cuasiconforme del semiplano en sí mismo. Podemos tomar esta condición como la definición de cuasiconformalidad en $\mathbb{R}$.

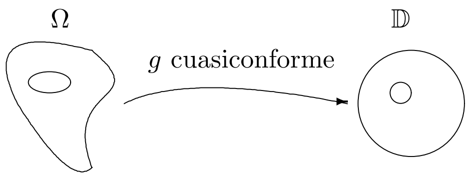
Las aplicaciones cuasiconformes se extienden de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^{n+1}$. Ahlfors lo demostró para $n = 2$, Carleson para $n = 3$ y, finalmente, Tukia y Väisälä en el caso general. El caso $n = 2$ fue un paso esencial en la demostración del Teorema de Rigidez de Mostow.

Las aplicaciones cuasiconformes aparecieron, de hecho, en la obra del matemático alemán Teichmüller, al estudiar espacios de moduli de superficies de Riemann. Ahlfors y Bers, al proseguir estos estudios, descubrieron un teorema fundamental: el Teorema de la aplicación de Riemann de métrica variable o el teorema de Riemann medible.

El Teorema de Riemann clásico dice que para todo dominio simplemente conexo $\Omega$ (salvo el propio plano) en el plano complejo $\mathbb{C}$ existe un aplicación conforme que lo lleva en el disco unidad.




La aplicación conforme lleva círculos del plano tangente en círculos. Si ahora en $\Omega$ damos un campo de elipses, es decir, en cada (o en casi todo) punto damos, de forma medible, una dirección y una excentricidad (acotada) entonces hay también un homeomorfismo $g$ que lleva esas elipses en círculos y $\Omega$ en $\mathbb{D}$:




Este teorema permite con frecuencia centrarse en obtener una respuesta cuasiconforme con la seguridad de que luego, con un cambio cuasiconforme de variables, podremos transformarla en conforme.

El teorema medible de Riemann fue esencial en la demostración de Sullivan de la conjetura de Fatou sobre la no existencia de dominios errantes en la iteración de funciones racionales.

Grupos kleinianos. El teorema de finitud. Ahlfors se interesó por los grupos kleinianos en los años 50 y 60. Su principal contribución es un teorema fundamental de estructura que se conoce como Teorema de Finitud de Ahlfors que establece que si $G$ es un grupo kleiniano finitamente generado que actúa una región $\Omega$ del plano complejo, entonces el cociente $\Omega/G$ se puede compactificar añadiendo un número finitos de puntos. El caso de grupos fuchsianos es un resultado muy clásico y mucho más sencillo, de hecho, si $G$ es un grupo fuchsiano (finitamente generado) que actúa, digamos, en el semiplano superior $U$, el cociente $U/G$ es una superficie de Riemann compacta de la que se han quitado un número finito de puntos y un número finito de dominios de Jordan todos disjuntos.

En sus investigaciones sobre este tema, Ahlfors se topó con una cuestión que se le resistió y no pudo resolver, a saber, si el conjunto límite de todo grupo kleiniano finitamente generado tiene área cero. El problema sigue abierto y en activo estudio.

Ahlfors se casó con Erna, austríaca de nacimiento, *"una chica vienesa"*, en los años 30. Los Ahlfors eran anfitriones encantadores, afectuosos y animados, excelentes conversadores, interesados por todo. En sus fiestas, la característica reserva, el protocolo o la jerarquía se desvanecían y el ambiente se animaba enseguida, a lo que solía ayudar la excelente colección de maltas y vodkas de la que hacían gala y de la que disfrutaban con proverbial resistencia. Fred Gehring, en un artículo en memoria de Ahlfors, recuerda a este respecto un congreso en Oberwolfach en que las conferencias de Ahlfors, Olli Lehto y el propio Gehring estaban programadas para una sesión matinal. La tarde anterior se había pasado entre buena tertulia y buen vino y, ya bien entrada la noche, Lehto y Gehring, prudentemente, deciden retirarse para intentar dormir un poco antes de sus conferencias de la mañana siguiente. Ahlfors les recriminó, instándoles a que aprovecharan para relajarse y beber en buena compañía, como él pretendía seguir haciendo. A la mañana siguiente la conferencia de Ahlfors fue un éxito, y tras ella le preguntaron si creía que trasnochar mejoraba sus conferencias, a lo que respondió, *"no estoy seguro, pero hace que me suenen mejor"*.

ROLF NEVANLINNA

Los discípulos de doctorado de Ahlfors recuerdan cuan exigente era en lo que concernía a su formación; no le interesaba ni lo artificial ni lo lateral. Al mismo tiempo era muy generoso con ellos. Atendía con respeto a lo que su discípulo tuviera que decirle, y si había substancia, y sólo entonces, aportaba ideas, sugerencias, nuevos enfoques y su, siempre valioso, personal punto de vista.

No publicó ningún artículo conjuntamente con ninguno de sus discípulos de doctorado. No lo consideraba apropiado. Gustaba recordar cuanto le habían ayudado Nevanlinna y Pólya a resolver la Conjetura de Denjoy, y como éstos rechazaron su oferta de publicar los resultados conjuntamente.

> Tuve la suerte increíble de encontrar un nuevo enfoque, basado en aplicaciones conformes, que, con considerable ayuda de Nevanlinna y de Pólya, me permitió obtener la demostración. Con generosidad sin par me prohibieron que mencionara [en el artículo] el papel que habían desempeñado.

Cuenta Ahlfors que la idea crucial se le ocurrió en un viaje en tren, y que fue entonces, cuando sintió que podía llegar a ser un matemático, lo que da una muestra de su nivel de exigencia personal.

Arne BEURLING

Ahlfors respetaba singularmente a sus maestros, Lindelöf y Nevanlinna, y apreciaba, con admiración, a amigos como Arne Beurling y André Weil. Este último cuenta, en un capítulo muy interesante de su *Souvenirs d'apprentisage*, el tiempo que pasó en Finlandia, y como Ahlfors y Nevanlinna lograron sacarle de la cárcel justo antes de que fuera juzgado como espía en plena Guerra Mundial. La ayuda de Beurling fue esencial para lograr su salida de Finlandia camino de Suiza poco antes del final de la guerra.

Ahlfors preparó para la edición de Birkhauser de sus *Collected Papers* una jugosísima nota autobiográfica, en la que despliega toda una filosofía de la vida, así como notas complementarias para casi todos sus artículos de investigación, en los que va desgranando las claves que le llevaron a estudiar ciertas cuestiones, los intentos fallidos y los caminos errados o la sorpresa ante el interés inesperado suscitado por ciertos trabajos y, al contrario, por la indiferencia con que se recibieron algunos otros que consideraba más relevantes. Recomendamos encarecidamente la lectura de esa breve autobiografía y de las notas complementarias.

Lars Ahlfors falleció en 1996.

Algunas lecturas recomendadas donde el lector interesado puede indagar más sobre el estado actual de las matemáticas de Ahlfors, más allá de la escueta descripción contenida en estas líneas.

O. Lehto; On the life and work of Lars Ahlfors, *The Mathematical Intellingercer, 20 (4) (1999), 4–8.*

*The mathematics of Lars Valerian Ahlfors,* Notices of the AMS, 45 (2) 1988, 233–242.

Creating an American mathematical tradition: the extended Ahlfors Bers family, *A century of Mathematical meetings*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 265-280.

L. V. AHLFORS; *Collected Papers,* Birkhäuser, Boston, 1982.

José L. Fernández
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
28049 Madrid
correo electrónico: `joseluis.fernandez@uam.es`