
EDUCACIÓN

Sección a cargo de

María José González

El sentido numérico se refiere a la habilidad de usar números y operaciones de forma flexible y coherente. Los estudiantes con sentido numérico comprenden las relaciones entre los números, realizan cálculos mentales y usan los números con eficacia en situaciones del mundo real. En los últimos años se han llevado a cabo numerosas investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico, al ser esta una meta deseable en la formación aritmética de los estudiantes de cualquier edad. Este trabajo busca identificar perfiles de sentido numérico en los estudiantes de secundaria y analiza la evolución de dichos perfiles tras una etapa formativa.

Perfiles de sentido numérico en estudiantes de secundaria

por

Rut Almeida y Alicia Bruno

INTRODUCCIÓN

El término sentido numérico (en inglés *number sense*) aparece a finales de los 80 del siglo XX en documentos curriculares de diferentes países y en publicaciones de innovación e investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de los números ([9], [15], [19]).

Greeno [9] indicó que una persona posee *sentido numérico* cuando tiene un buen cálculo mental, estimaciones numéricas adecuadas y hace juicios e inferencias basándose en cantidades numéricas. Por su parte, Sowder [19] señala que el sentido numérico es una red conceptual bien organizada que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas numéricos de una forma creativa y flexible.

El sentido numérico se asocia con tener una buena intuición en el manejo de los números y con la idea de flexibilidad en la búsqueda de estrategias, en situaciones numéricas escolares o cotidianas; implica ir «más allá» de la aplicación de algoritmos estándares, pues debe conectar lo que «sabemos de los números», para llegar a

una solución que en muchas situaciones no tiene que ser exacta. En el cuadro 1 se muestra una actividad propuesta a estudiantes de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) (recogida en [2]). Se pide estimar el resultado de una multiplicación de un número entero por un número decimal próximo a 0,5. Para llegar a esta aproximación, a priori se pueden seguir diferentes estrategias, situadas en lo que se denomina sentido numérico: a) tomar un punto de referencia para uno o ambos factores y realizar una estimación del resultado (por ejemplo, 0,4987 se aproxima a 0,5); b) aplicar propiedades numéricas para facilitar la estimación, como «multiplicar por un número entre 0 y 1 implica obtener un número menor»; c) representar la multiplicación como el área de un rectángulo de lados 400 y 0,5, y observar que es la mitad del área de un rectángulo de lados 400 y 1.

Sin realizar el cálculo exacto, señala qué opción está más próxima al resultado de la operación $400 \times 0,4987$:

- a) 100 b) 200 c) 1600 d) 2000

Explica tu respuesta.

Cuadro 1: Tarea numérica propuesta a estudiantes de secundaria.

En las figuras 1, 2 y 3 se muestran respuestas de estudiantes del citado estudio. La figura 1 refleja la respuesta de un estudiante que siguió la estrategia a) de forma correcta, y relacionó las operaciones de multiplicar y dividir; el estudiante de la figura 2 aplicó una aproximación erróneamente; y, por último, la justificación del estudiante de la figura 3, se aleja del sentido numérico, pues aplicó un algoritmo y rechazó la respuesta aproximada.

Es 200 porque 0,4987 se aproxima a 0,5 por lo que
 $400 \times 0,5 = 400 : 2 \rightarrow 200$.

Figura 1: Respuesta correcta de estudiante de secundaria con sentido numérico.

- a) 100 b) 200 c) 1600 **d) 2000**

Explica tu respuesta.

Porque 4×400 ya daría 1600 y más los otros números
 daría más de 1600.

Figura 2: Respuesta incorrecta de estudiante de secundaria.

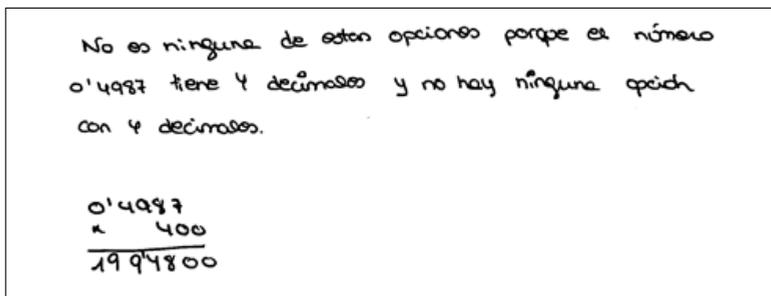


Figura 3: Respuesta incorrecta de estudiante de secundaria basada en reglas.

Las estrategias de sentido numérico se desarrollan gradualmente a lo largo de la escolaridad y es necesario hacerlas explícitas en la enseñanza, observando la más adecuada en cada caso. Esto significa que las tareas de cálculo mental, estimación, exploración de propiedades y regularidades de los números, así como la visualización gráfica de las operaciones y los números, deben formar parte de la actividad matemática habitual en el aula. Es por ello que, en los últimos años, diferentes publicaciones muestran actividades con estas orientaciones ([6], [7]).

En contrapartida, una enseñanza numérica que valora únicamente la práctica algorítmica lleva a un pobre desarrollo del sentido numérico. En determinadas tareas numéricas, hacer cálculos escritos exactos no representa la mejor forma de abordarlas.

Al igual que resulta abierta la descripción de una persona de la que se dice que tiene «un buen sentido común», ocurre lo mismo al delimitar lo que implica tener un adecuado sentido numérico. En una búsqueda por hacerlo operativo y útil, tanto en lo curricular como en la investigación, diferentes autores lo han categorizado a través de componentes o indicadores que abarcan los aspectos conceptuales, procedimentales y estratégicos que se describen en el cuadro 2 ([12], [15], [23]).

Yang, Li y Lin [26] analizaron diferentes componentes del sentido numérico en alumnado de quinto grado de primaria en Taiwán cuando realizaban estimaciones numéricas. Concluyeron que la componente que llevó a más éxito fue «reconocer el tamaño relativo de los números», mientras que los resultados más bajos se dieron en «reconocer cuándo un resultado es razonable». Además, observaron que existe una relación significativa entre las altas calificaciones académicas en matemáticas del alumnado y un buen nivel de sentido numérico. Los investigadores que han evaluado el sentido numérico de alumnado de educación primaria y secundaria señalan que la mayoría de los estudiantes tienden a un uso de reglas y algoritmos en la resolución de problemas numéricos y presentan grandes dificultades para realizar estimaciones ([23], [21]).

Las habilidades en estimación y cálculo mental suelen acompañar los razonamientos de los estudiantes con buen sentido numérico ([12], [19]). En contrapartida, diferentes estudios señalan que hay estudiantes con buenos resultados en cálculo escrito que, sin embargo, muestran un bajo uso de componentes del sentido numérico ([12], [14], [17], [24], [21]). Es decir, las habilidades para efectuar algoritmos y reglas

1. Comprender el significado de los números

El sentido numérico implica comprender cómo está organizado el sistema de numeración decimal y las múltiples relaciones que se dan entre los números. Por ejemplo, según la actividad numérica se puede optar por trabajar bien con fracciones, bien con su expresión decimal.

2. Reconocer el tamaño relativo y absoluto de las magnitudes de los números

La habilidad para reconocer o estimar el tamaño absoluto de un número, cantidad o medida, o el tamaño relativo en relación a otro número, cantidad o medida, es una componente fundamental del sentido numérico. Una comprensión del sistema de numeración ayuda a organizar mentalmente, comparar y ordenar números. Un estudiante que entiende la magnitud de los números deberá reconocer fácilmente que 0,05 es mayor que 0,025, que entre 2,24 y 2,25 hay infinitos números o tener argumentos para comparar los números $\frac{7}{11}$ y $\frac{7}{8}$ sin recurrir a expresarlos con el mismo denominador.

3. Usar puntos de referencia

Se refiere a la habilidad para utilizar referentes numéricos mentales para resolver problemas o disponer de puntos de referencia para las mediciones de objetos comunes y de situaciones en el entorno. Los puntos de referencia son, generalmente, múltiplos de potencias de 10, números como 1, $\frac{1}{2}$, 50% o cualquier valor con el que una persona se sienta cómoda haciendo comparaciones o cálculos. Estos referentes pueden ser también personales, por ejemplo, una persona que tiene un referente cercano en su entorno sobre la distancia de 200 metros, puede usarla para estimar otra distancia.

4. Usar múltiples representaciones de los números y las operaciones

Significa ser capaz de utilizar diferentes formas de representación para resolver problemas numéricos de manera apropiada y flexible. Por ejemplo, representar una colección de números en la recta numérica, expresar una multiplicación de dos números como el área de un rectángulo para estimar el resultado o comparar dos fracciones haciendo una representación de las mismas como partes-todo.

5. Conocer y tener facilidad con las operaciones

Implica ser capaz de componer y descomponer los números para estimar el resultado de una operación, $28 \cdot 52 = (25 + 3) \cdot (50 + 2)$, y, posteriormente, estimar el resultado de $25 \cdot 50$. También se refiere a la comprensión del efecto relativo de las operaciones. Por ejemplo, una persona que comprende el efecto relativo de las operaciones no necesita realizar demasiados cálculos para estimar el resultado de $695 \cdot 0,98$, sino que intuye que el resultado será un poco menor que 695. Por último, también abarca relacionar las operaciones, como expresar la multiplicación como operación inversa a la división: $20 \cdot \frac{1}{2} = 20 : 2$.

6. Comprender la relación entre el contexto del problema y la operación necesaria

El contexto del problema da información clave para saber la operación adecuada y también para saber si es apropiada una solución exacta o aproximada.

7. Desarrollar estrategias apropiadas

Es muy importante desarrollar estrategias útiles en función del problema a resolver: en ocasiones basta con hacer buenas estimaciones o cálculo mental. El sentido numérico implica reconocer cuándo una estrategia no está siendo útil para resolver un problema y en su lugar debemos cambiar a otra forma de abordarlo.

8. Revisar los datos y reconocer cuándo un resultado es razonable

Es la habilidad para evaluar el resultado final y concluir si es razonable en el contexto del problema. Por ejemplo, en la operación $600 \cdot 0,245 \approx 600 \cdot 0,25 = 600 \cdot \frac{1}{4}$, un resultado razonable no debe alejarse de 150, sea cual sea el método o estrategia seguido para resolver la operación.

no se transfieren siempre a formas de resolución de problemas que requieren otros razonamientos. Por lo tanto, como se concluye en [19], la instrucción sobre estimación y cálculo mental está en la esencia del desarrollo del sentido numérico.

Coinciden las investigaciones en que el dominio de las ideas matemáticas relacionadas con el sentido numérico por parte de los futuros profesores es fundamental para que, en la práctica pedagógica, exista un verdadero cambio metodológico, pero también es necesaria una adecuada planificación y una actuación fructífera en el aula ([5]). En esta línea, Menino, Tavares, Quaresma y Rodrigues [13] defienden que el docente, además de dominar las habilidades asociadas al sentido numérico, debe llevar a cabo tareas que lo promuevan.

Sin embargo, las investigaciones realizadas señalan escasas habilidades de sentido numérico de profesorado en activo y en formación, lo que pone en consideración la necesidad de abordar este tema en su formación universitaria como futuros docentes ([1], [4], [10], [20], [21], [27]).

La mayoría de los trabajos de investigación de sentido numérico realizados con estudiantes de primaria y secundaria están basados en resultados de pruebas escritas, algunas veces sin justificación por parte del alumnado de cómo llegaron a las respuestas. Pensamos que puede ocurrir que los estudiantes conozcan varias formas de resolver las tareas, pero lo que manifiestan como primera respuesta en la prueba son los procedimientos basados en reglas. Probablemente se debe a que se sienten cómodos con estos procedimientos ([18]) o porque piensan que es la respuesta que se espera en un contexto escolar, es decir, forma parte de ese «contrato didáctico» ([8]) que se establece entre profesorado y alumnado. Por esta razón, nos planteamos profundizar en las respuestas de los estudiantes, observando si su respuesta inicial es única o si conocen otras estrategias. A partir de ahí, analizamos si existen perfiles de estudiantes en función de sus tendencias en la resolución de problemas o tareas numéricas.

1. OBJETIVOS

En este trabajo profundizamos en las respuestas de los estudiantes a tareas numéricas susceptibles de resolverse con diferentes estrategias, observando si hay rasgos comunes entre las respuestas de los estudiantes. Además, analizamos si estas respuestas cambian una vez que han seguido una secuencia instruccional en la que se abordan componentes del sentido numérico. Así, los objetivos del estudio se concretan en los siguientes:

1. Establecer perfiles de alumnado de secundaria en función de sus respuestas a tareas que pueden abordarse con componentes del sentido numérico.
2. Analizar cambios en los perfiles de los estudiantes después de seguir una secuencia de enseñanza numérica en la que se trabajan componentes del sentido numérico y se enfatiza la búsqueda de diferentes estrategias de resolución.

2. METODOLOGÍA

Los objetivos anteriores se abordaron a través de una metodología cualitativa que permite profundizar en las respuestas de los estudiantes. La investigación se siguió con dos grupos de 2.º de ESO (13 o 14 años), de 25 y 22 estudiantes, respectivamente, en un centro educativo público de Educación Secundaria Obligatoria de Tenerife (España), de entorno semiurbano. Las fases del estudio se describen a continuación.

- *Prueba inicial.* Se realizó una prueba escrita a los 47 estudiantes, al inicio del estudio, con tareas numéricas que podían ser resueltas haciendo uso de componentes del sentido numérico ([2]).
- *Entrevista inicial.* La prueba escrita permitió seleccionar a 11 estudiantes (E1, E2, . . . , E11), en función del tipo de estrategias utilizadas y/o del uso de sentido numérico mostrado. Dichos estudiantes fueron entrevistados de manera individual, permitiéndoles explicar sus procesos y pensamientos al resolver las tareas numéricas. Esto llevó a establecer perfiles según sus respuestas ([3]).
- *Desarrollo de una secuencia de aprendizaje.* Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje en los dos grupos, en la que se desarrollaron actividades numéricas fomentando las componentes descritas.
- *Entrevistas finales.* Al finalizar la secuencia de aprendizaje se entrevistó a los mismos 11 estudiantes de la entrevista inicial, con el objetivo de determinar en qué grado la intervención había producido cambios en sus respuestas o en sus justificaciones y en los perfiles establecidos en la entrevista inicial.

Dado que las componentes del sentido numérico son amplias, el estudio se focalizó en tareas que podían resolverse con tres de ellas: «usar puntos de referencia», «usar representaciones de los números y las operaciones» y «reconocer cuándo el resultado obtenido es razonable». En cualquier caso, debido a la alta conexión entre las componentes, podrían aparecer otras no contempladas a priori. Dado el nivel educativo del estudio, se centró en tareas sobre fracciones y decimales, ya que se correspondían con los contenidos curriculares que debían seguir los estudiantes en el momento de la investigación.

2.1. ENTREVISTAS INICIAL Y FINAL

La realización de las entrevistas (inicial y final) permitió indagar en un posible uso de componentes del sentido numérico que no se manifestaba en las respuestas de la prueba inicial. El objetivo fue analizar todas las estrategias que eran capaces de poner en juego y, a partir de ellas, establecer perfiles de estudiantes ([2], [3]). Las entrevistas inicial y final constaron de 5 y 6 tareas numéricas, respectivamente, adaptadas de trabajos previos ([16], [24]) y fueron grabadas en vídeo, con una duración de entre 25 y 45 minutos, dependiendo de la variedad de estrategias que realizaba cada estudiante.

En ambas entrevistas se siguió el mismo esquema de trabajo con todos los estudiantes. En primer lugar, se les presentaron las tareas en hojas independientes. Una

vez que acabaron todas las tareas, se volvió de nuevo desde la primera, estableciendo un diálogo con el estudiante, pidiéndole una explicación de sus razonamientos, los cuales se clasificaron como:

SN: Razonamiento basado en componentes del sentido numérico.

BR: Razonamiento basado en reglas o algoritmos.

RI: Razonamiento incorrecto.

NR: No responde a la tarea.

A continuación, se le solicitó que buscara otra forma de llegar a la respuesta. Y en el caso de que no existiese un primer razonamiento (NR), se le animó a hacer un dibujo o una representación que le ayudara. Este proceso se repitió en cada tarea hasta que el estudiante manifestaba no conocer más opciones de resolución. De forma esquemática, se repetía el diagrama de la figura 4 hasta que no hubiese más respuestas por parte del entrevistado.

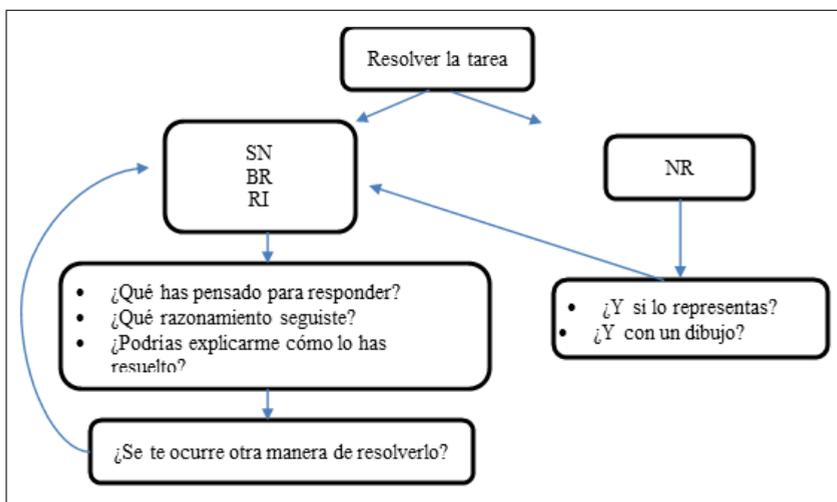


Figura 4: Proceso seguido en las entrevistas inicial y final para cada tarea numérica.

Es necesario tener en cuenta que, aunque los razonamientos sean clasificados como SN y BR, no tienen por qué ser siempre correctos. No así RI que, por su propia categorización, es incorrecto.

2.2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA SECUENCIA DE APRENDIZAJE

Se diseñó e implementó una secuencia de aprendizaje sobre los números decimales y fracciones que promovía el uso del sentido numérico. La intervención tuvo lugar durante once sesiones de 50 minutos en la hora habitual de Matemáticas en los dos grupos. Siguiendo las propuestas de [16], la metodología de aula se basó tanto en trabajo individual, como en grupo reducido o en debates con el grupo completo. En

todos los casos se promovió la discusión de las diferentes estrategias en la resolución de las tareas, lo que permitió compartir conocimiento numérico y tomar consciencia de que hay formas diferentes de obtener una respuesta correcta.

La secuencia de aprendizaje tuvo cuatro fases con diferentes objetivos: la primera fase se centró en familiarizar al alumnado con las distintas formas de trabajo que se abordarían a lo largo de toda la intervención de aula (individual, en parejas, grupos reducidos y puesta en común en debates colectivos) a través de tareas que permitieron introducir la componente de sentido numérico referente a evaluar la razonabilidad de las respuestas; en la segunda fase se trató el uso de puntos de referencia para distintos tipos de tareas, comparar racionales, estimar magnitudes y estimar operaciones; la tercera perseguía fomentar el uso de representaciones gráficas para comparar números racionales y estimar operaciones; por último, la cuarta fase fue planteada para la puesta en práctica de todos los recursos trabajados en las fases anteriores, con un problema contextualizado que requería de las distintas componentes del sentido numérico.

3. RESULTADOS

A continuación se muestra cómo se establecieron los perfiles a partir de las entrevistas y los cambios que se produjeron en dichos perfiles después de seguir la secuencia de aprendizaje.

3.1. PERFILES DE SENTIDO NUMÉRICO DE ALUMNADO DE SECUNDARIA

En primer lugar, es necesario indicar que el perfil lo entendemos como una inclinación o tendencia a seguir un tipo de estrategia en la mayoría de sus respuestas o explicaciones, por lo que no significa que el estudiante responda con una única estrategia en todas las tareas propuestas. Se establecieron los cuatro perfiles de estudiantes que se describen a continuación.

Perfil 1: Tendencia al uso de estrategias de sentido numérico

El estudiante que se sitúa en este perfil tiende a hacer uso de estrategias de sentido numérico como primera respuesta, y en ocasiones conoce otras estrategias alternativas a la inicial. Demuestra una actitud flexible para aceptar o buscar otras estrategias. Aunque en alguna ocasión intenta hacer uso de reglas, es capaz de evitarlas cuando conoce una estrategia de sentido numérico.

Como se muestra en la figura 5, el estudiante E2 ordena números decimales y fracciones de forma correcta en una actividad que se le planteó en la entrevista final. Su explicación indica que hace uso de puntos de referencia que le permiten comparar las magnitudes expuestas. En concreto indica: «*Si el 2 fuera un 3, sería 0,333 [señalando la fracción $\frac{2}{9}$]. Estaría justo [señala 0,3], pero como es menos, lo puse así. El 0,3 porque es menor que 0,5. El 7 llega casi a la unidad y el 4 se pasa [señalando $\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{3}$]*».

1) Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{7}{8}, 0,3, \frac{4}{3}, 0,55, \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{9} < 0,3 < 0,55 < \frac{7}{8} < \frac{4}{3}$$

Figura 5: Primera respuesta correcta de E2, con uso de puntos de referencia (SN) para ordenar números.

Una vez expuesto el razonamiento anterior, se le pidió que buscara otro razonamiento. La figura 6, muestra su segunda respuesta a la misma actividad. Se observa que siguió una estrategia gráfica de forma correcta.

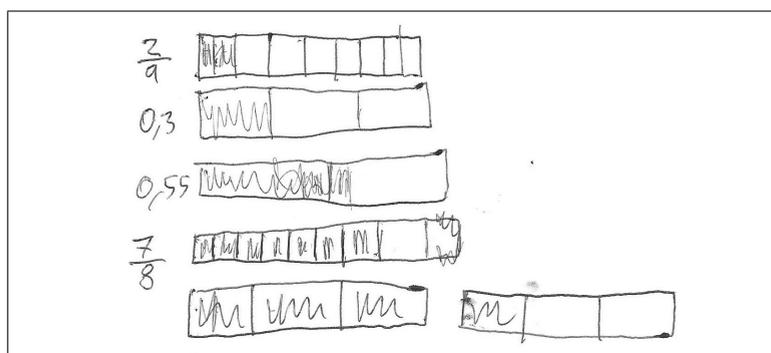


Figura 6: Segunda respuesta correcta de E2, con representaciones gráficas (SN) para ordenar números.

Perfil 2: Tendencia a uso de reglas y algoritmos. Conoce estrategias de sentido numérico

Se caracteriza por que el estudiante usa reglas y algoritmos como primera opción, en general, de forma correcta, pero demuestra conocer y ser capaz de utilizar estrategias correctas de sentido numérico cuando se le solicita una segunda respuesta. El estudiante muestra apego a las reglas o los algoritmos, argumentando que para justificar sus razonamientos necesitaba escribir algún tipo de cálculo.

Se muestran a continuación las respuestas de la entrevista final del estudiante E4 para ordenar números decimales y fracciones. En su primera respuesta (figura 7) ordena los números una vez ha expresado las fracciones como decimales, haciendo el algoritmo de la división. En su segunda respuesta (figura 8), al pedirle otra forma de hacerlo, optó por representar los números como «partido». En ambos casos llegó a la respuesta correcta.

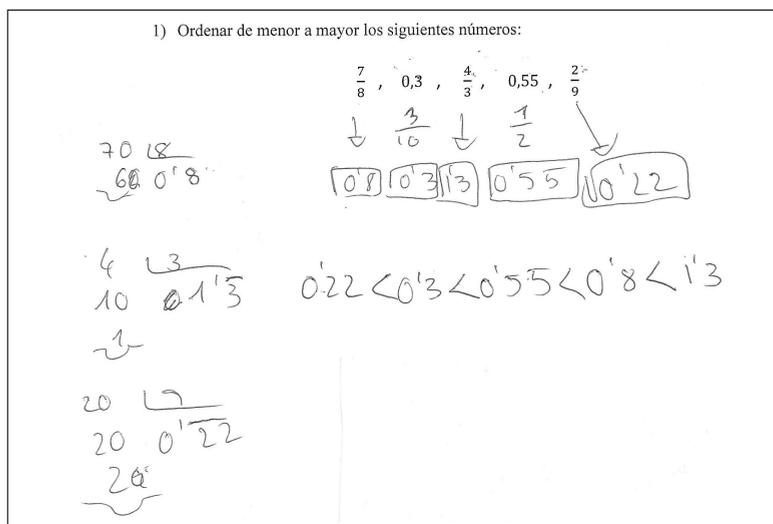


Figura 7: Primera respuesta correcta de E4 con algoritmos (BR) para ordenar números.

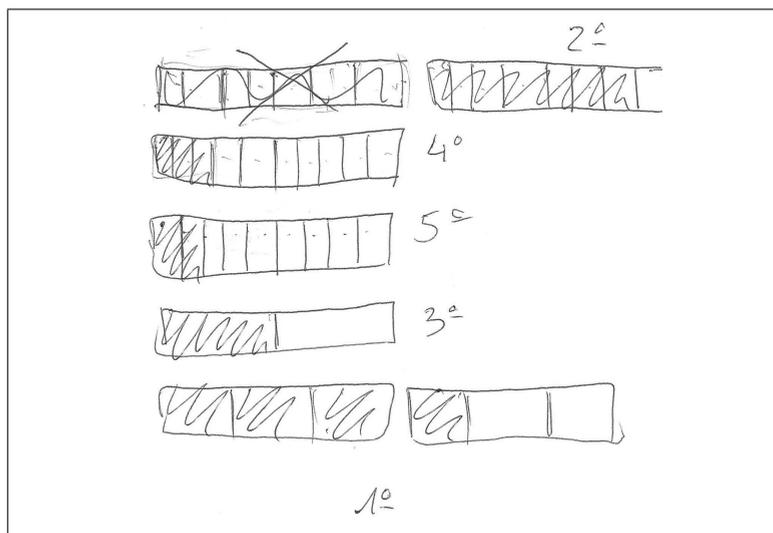


Figura 8: Segunda respuesta correcta de E4 con representaciones gráficas (SN) para ordenar números.

Perfil 3: Tendencia a uso de reglas y algoritmos. No conoce estrategias de sentido numérico

Este perfil se caracteriza por que el estudiante contesta principalmente haciendo uso de reglas y algoritmos, pero al solicitarle un método alternativo demuestra una falta de sentido numérico en sus intentos. En este perfil, a dife-

rencia del anterior, las respuestas correctas basadas en reglas son menores. Al mismo tiempo, cuando el estudiante intenta hacer uso del sentido numérico, muestra dificultades conceptuales que le llevan a elegir respuestas incorrectas y razonamientos erróneos, manifestando inseguridad en las justificaciones.

Un ejemplo de respuesta de este perfil es la del estudiante E7 en la entrevista inicial. E7 ordena las fracciones de forma correcta en su primer intento, aplicando el mínimo común múltiplo (figura 9). Al pedirle otra forma de justificar el orden representa las fracciones como partes de un todo, pero cambiando la forma gráfica de la unidad para cada fracción, lo que le lleva a una justificación errónea (figura 10).

2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{4}{3}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 5} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 4} \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 3 \\ \hline 120 \\ 120 \\ \hline 4015 \\ \hline 0 \times 7 \\ \hline 105 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 105 \\ \hline 120 \end{array} \quad \begin{array}{r} 160 \\ \hline 120 \end{array}$$

↓

$$\begin{array}{r} 120 \overline{) 3} \\ 09 \quad 40 \\ \times 4 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\frac{48}{120} < \frac{105}{120} < \frac{160}{120}$$

Figura 9: Primera respuesta correcta de E7 con algoritmos (BR) para ordenar números.

Perfil 4: Dificultades con el contenido matemático. No conoce estrategias de sentido numérico

Este perfil se caracteriza por poner de manifiesto errores tanto en las reglas de cálculo como en las estrategias de sentido numérico. El estudiante de este perfil, en su primera estrategia, no tiene una tendencia clara a usar reglas y algoritmos, pero tampoco a seguir estrategias de sentido numérico. Lo que caracteriza sus respuestas es una falta de dominio de los conceptos matemáticos

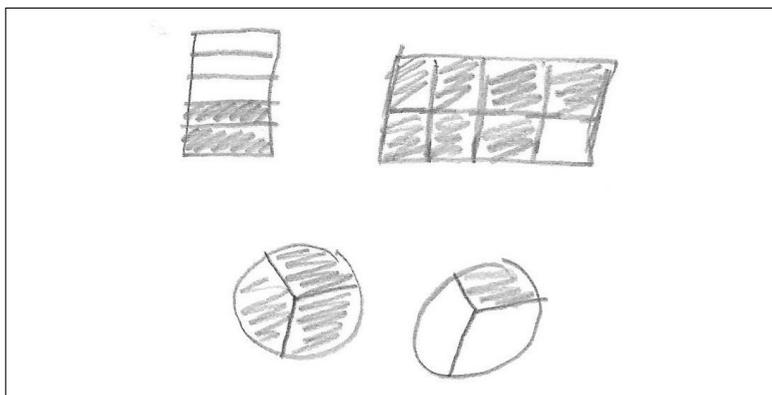


Figura 10: Segunda respuesta incorrecta de E7 con representaciones gráficas (SN) para ordenar números.

requeridos en las tareas (concepto de fracción, comparación de fracciones, etc.). Esto le lleva a seguir razonamientos muy variados y, en general, incorrectos. Cuando se le sugiere seguir otros métodos, tampoco los encuentra. En muchas ocasiones, las dificultades conceptuales que presenta, junto con los intentos para buscar otras estrategias, le lleva a razonamientos difícilmente clasificables. Un ejemplo es el estudiante E10, cuya respuesta, perteneciente a la entrevista inicial, muestra un razonamiento incorrecto (RI) (figura 11). De forma oral, el estudiante indicó en su primera respuesta: «3 es más pequeño que 4, entonces es más pequeño. 5 es mayor que 2, pero como aquí [señalando la fracción $\frac{4}{3}$] son más pequeños entre sí, pues yo los coloqué así, mirando el número de abajo y no por el de arriba». Es decir, consideró que la magnitud de una fracción viene determinada exclusivamente por el denominador y no interpreta que dicho valor indica la partición. Ordena las fracciones siguiendo un razonamiento extendido de los números naturales: $3 < 5 < 8$. Además, su segunda respuesta fue una representación gráfica incorrecta para las fracciones en el caso de $\frac{4}{3}$ y $\frac{2}{5}$ (figura 12).

2. Ordenar de menor a mayor los siguientes números:

$$\frac{2}{5}, \frac{7}{8}, \frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}, \frac{2}{5}, \frac{7}{8}$$

Figura 11: Primera respuesta incorrecta de E10 con razonamiento (RI).

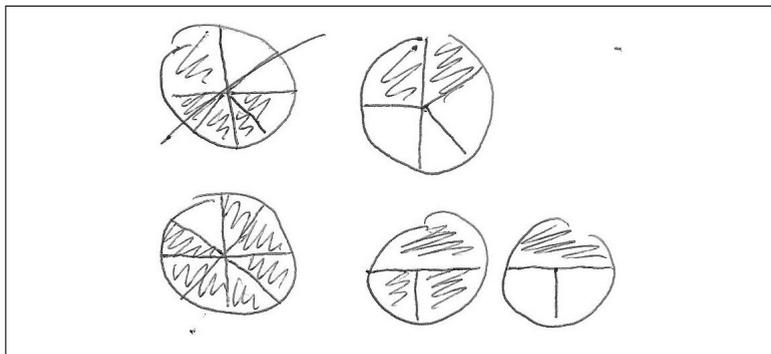


Figura 12: Segunda respuesta incorrecta de E10 con representación gráfica (SN) para ordenar números.

3.2. PERFILES DE LOS ESTUDIANTES EN LA ENTREVISTA INICIAL Y FINAL

Como ya se indicó, la selección de los 11 estudiantes entrevistados se realizó en función del éxito y del uso de estrategias de sentido numérico, en una prueba escrita inicial, intentando abarcar todos los niveles del aula. Estas respuestas escritas, en ocasiones resultan insuficientes para conocer el pensamiento numérico de los estudiantes, y fueron las entrevistas las que nos permitieron identificar los perfiles anteriormente descritos.

En el cuadro 3 se muestra la clasificación de los estudiantes según los perfiles que se les asignaron en la entrevista inicial y final. Estos perfiles no son puros, en el sentido de que puede haber dos estudiantes a los que se ha asignado el mismo perfil, pero uno de ellos tiene las características del perfil más acusadas que el otro. Pero han sido agrupados por compartir características comunes significativas del perfil, siendo las diferencias entre ellos menores.

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11
Inicial	P1	P1	P2	P2	P2	P3	P3	P3	P3	P4	P4
Final	P1	P1	P1	P1	P2	P1	P2	P2	P4	P4	P4

Cuadro 3: Perfiles de los estudiantes en las entrevistas inicial y final.

Después de la intervención de aula en la que se trabajaron actividades de las tres componentes ya señaladas, las entrevistas finales muestran cambios en los perfiles de algunos estudiantes. Se pudo observar que estos cambios siguieron, en la mayoría de los casos, una evolución positiva.

Los estudiantes que se encontraban clasificados en el perfil 1 en la entrevista inicial (E1 y E2), continuaron haciendo uso de estrategias de sentido numérico en la entrevista final, demostrando mucha flexibilidad en la búsqueda de estrategias de este tipo. Los estudiantes E3 y E4 mostraron un perfil 1 en la entrevista final, cuando anteriormente estaban en el perfil 2, al igual que el estudiante E6, que inicialmente estaba en el perfil 3. En los tres casos, mostraron tendencia a usar estrategias

de sentido numérico (tomar puntos de referencia y representaciones gráficas) y en ningún momento de la entrevista final recurrieron a reglas memorizadas o cálculos escritos, mostrando una gran flexibilidad en el uso de estrategias.

Por otra parte, el estudiante E5, que en la entrevista inicial se encontraba en el perfil 2, permaneció en este perfil, pues siguió dando primeras respuestas basadas en reglas a pesar de conocer estrategias de sentido numérico (mostradas en segunda opción).

Los estudiantes E7 y E8, que en la entrevista inicial se situaron en un perfil 3, mejoraron en la entrevista final al demostrar hacer uso de estrategias de sentido numérico sin abandonar, en algunos casos como primera opción, aquellas en las que predominan los algoritmos.

Los estudiantes E10 y E11 permanecieron en el perfil 4, caracterizado por una carencia de conocimientos numéricos y, por tanto, de una ausencia de estrategias clasificables. En la entrevista final intentaron, en la mayoría de las tareas, hacer uso de las representaciones gráficas para responder a las cuestiones, pero los errores conceptuales no superados durante la intervención de aula no les permitieron moverse hacia otra forma de razonar las tareas. Las mismas dificultades sucedieron en el caso E9, cuya evolución es negativa en los términos de esta investigación. Este resultado refuerza la afirmación de que el sentido numérico es una habilidad que se desarrolla a largo plazo y que está íntimamente vinculada a los conocimientos conceptuales de los números y al significado de las operaciones ([11]). El uso del sentido numérico hace necesario el manejo de ideas conceptuales (significado y propiedades) que pueden requerir un desarrollo prolongado en la escolaridad.

Los resultados de este estudio están en sintonía con otros estudios, como [17], que concluyeron que los estudiantes con mejores capacidades en matemáticas eran más propensos a separarse de los métodos basados en reglas, pero estas rupturas se producían solo cuando se les daba la oportunidad a través de preguntas como: «¿puedes hacerlo de otra manera?».

4. CONCLUSIONES

Establecer perfiles de estudiantes basándonos en las componentes del sentido numérico que emplean tiene una repercusión directa en el aprendizaje, pues ayuda a actuar en el aula teniendo en cuenta las características de cada estudiante. Así, se les puede reconducir hacia la construcción de un perfil acorde con un adecuado uso del sentido numérico. La enseñanza debe permitir que los estudiantes que tienden a usar reglas y algoritmos puedan poner en juego otras estrategias alternativas.

En esta investigación hemos observado que hay estudiantes que dominan conceptos numéricos y saben hacer un uso flexible de los mismos, pero no lo demuestran en una prueba escrita, o en una primera respuesta oral, porque consideran que el profesor no dará por válido un razonamiento que carezca de un cálculo escrito exacto. En cierta forma, actúan en función de lo que creen que el profesorado espera de ellos, por lo que el «contrato didáctico» establecido se convierte en un obstáculo ([8]). Tras la implementación de la secuencia de aula, en la entrevista final algunos estudiantes tendieron a hacer un mayor uso de estrategias de sentido numérico, en lugar de

seguir reglas y algoritmos. En cierta forma, cambiaron dicho «contrato didáctico», posicionándose hacia uno que da validez a las respuestas de sentido numérico.

Fomentar el sentido numérico persigue que los estudiantes sean capaces de conocer estrategias diferentes, elegir la más adecuada en cada caso y valorar la razonabilidad de la respuesta. A pesar de los esfuerzos curriculares por incluir el sentido numérico en el aprendizaje de los números, en la actualidad se sigue dedicando un porcentaje muy alto de las sesiones de aula a la práctica de algoritmos, minimizando la estimación o la búsqueda de relaciones entre conceptos numéricos. Un aprendizaje cooperativo y de debate crea un ambiente que propicia la búsqueda de métodos variados y la valoración de su adecuación a cada caso concreto. Además, la enseñanza basada en el uso de componentes del sentido numérico produce un aprendizaje más significativo, aunque su desarrollo sea a largo plazo ([22], [25], [21]).

Este trabajo presenta limitaciones en los contenidos analizados y en la generalización de los resultados, por lo que se hace necesario seguir indagando en nuevas cuestiones asociadas al sentido numérico. Entre otros aspectos, se hace necesario diseñar material apropiado para un proceso de enseñanza-aprendizaje flexible y que contenga cuestiones que permitan una resolución abierta. Muchas veces, los libros de texto basan sus tareas en la búsqueda de respuestas numéricas exactas, en las que el uso de un algoritmo de cálculo se hace imprescindible, y no es posible emplear métodos de estimación ni representaciones gráficas aproximadas. Por otra parte, las nuevas tecnologías son una herramienta útil para el desarrollo del sentido numérico si se dispone de material planteado para ello, por lo que en términos de innovación encontramos también la necesidad de que se siga trabajando en este ámbito.

El sentido numérico es un pilar fundamental en el currículo educativo que no está desarrollado suficientemente. La comunidad educativa tiene un amplio camino que recorrer para alcanzar los objetivos que se plantean desde los documentos oficiales en términos de habilidades y competencias asociadas al sentido numérico.

AGRADECIMIENTO. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación «Resolución de problemas y competencia matemática en la educación primaria y secundaria y en la formación de profesores», EDU2017-84276-R.

REFERENCIAS

- [1] H. ALAJMI Y R. REYS, Examining eighth grade Kuwaiti students' recognition and interpretation of reasonable answers, *International Journal of Science and Mathematics Education* **8** (2010), 117–139.
- [2] R. ALMEIDA Y A. BRUNO, Uso de puntos de referencia y de representaciones gráficas para resolver tareas numéricas en secundaria, *PNA* **10**(3) (2016), 191–217.
- [3] R. ALMEIDA Y A. BRUNO, Establishing profiles on the use of number sense, *REDIMAT* **6**(1) (2017), 56–84.

- [4] R. ALMEIDA, A. BRUNO Y J. PERDOMO-DÍAZ, Strategies of number sense in pre-service mathematics teachers, *International Journal of Science and Mathematics Education* **14**(5) (2016), 959–978.
- [5] O. N. ALSAWAIE, Number sense-based strategies used by high-achieving sixth grade students who experienced reform textbooks, *International Journal of Science and Mathematics Education* **10**(5) (2012), 1071–1097.
- [6] J. ANGHILERI, *Teaching Number Sense*, second edition, Continuum, Londres, 2006.
- [7] J. ANGHILERI, *Developing number sense. Progression in the middle years*, Continuum, Londres, 2008.
- [8] G. BROUSSEAU, *La théorie des situations didactiques*, La pensée sauvage, Grenoble, 1998.
- [9] J. G. GREENO, Number sense as situated knowing in a conceptual domain, *Journal for Research in Mathematics Education* **22**(3) (1991), 170–218.
- [10] E. KAMINSKI, Promoting mathematical understanding: Number sense in action, *Mathematics Education Research Journal* **14**(2) (2002), 133–149.
- [11] Z. MARKOVITS Y J. SOWDER, Developing number sense: an intervention study in grade 7, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**(1) (1994), 4–29.
- [12] A. MCINTOSH, B. J. REYS Y R. E. REYS, A proposed framework for examining basic number sense, *For the learning of mathematics* **12**(3) (1992), 2–8.
- [13] H. MENINO, D. TAVARES, A. QUARESMA Y M. RODRIGUES, El sentido del número en los futuros profesores de primer ciclo, dos estudios de caso, *Actas XV Simposio de la SEIEM* (Ciudad Real, 2011, M. Marín et al., eds.), 439–449, SEIEM, Ciudad Real, 2011.
- [14] M. MOHAMED Y J. JOHNNY, Investigating number sense among students, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* **8** (2010), 317–324.
- [15] NCTM, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1989.
- [16] B. J. REYS Y R. BARGER, *Developing number sense in the middle grades*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1991.
- [17] B. J. REYS Y D.C. YANG, Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan, *Journal for Research in Mathematics Education* **29**(2) (1998), 225–237.
- [18] S. SENGUL Y H. GULBAGCI, An investigation of 5th grade Turkish students' performance in number sense on the topic of decimal numbers, *Procedia - Social and Behavioral Sciences* **46** (2012), 2289–2293.
- [19] J. SOWDER, Estimation and number sense, *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (D. Grouws, ed.), 371–389, MacMillan Publishing Company, New York, 1992.
- [20] Y. TSAO, Exploring the connections among number sense, mental computation performance, and the written computation performance of elementary preservice school teachers, *Journal of College Teaching and Learning* **1**(12) (2004), 71–90.

- [21] P. K. VELOO, *The development of number sense and mental computation proficiencies: An intervention study with secondary one students in Brunei Darussalam*, Ph. D. Thesis, University of Otago, Dunedin (Nueva Zelanda), 2010.
- [22] D. C. YANG, Teaching and learning number sense - an intervention study of fifth grade students in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education* **1**(1) (2003), 115–134.
- [23] D. C. YANG, Number sense strategies used by 6th grade students in Taiwan, *Educational Studies* **31**(3) (2005), 317–333.
- [24] D. C. YANG Y F. Y. HUANG, Relations among computational performance, pictorial representation, symbolic representation and number sense of sixth-grade students in Taiwan, *Educational Studies* **30**(4) (2004), 373–389.
- [25] D. C. YANG, C. J. HSU Y M. C. HUANG, A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education* **2**(3) (2004), 407–430.
- [26] D. C. YANG, M. N. LI Y C. I. LIN, A study of the performance of 5th graders in number sense and its relationship to achievement in mathematics, *International Journal of Science and Mathematics Education* **6**(4) (2008), 789–807.
- [27] D. C. YANG, R. REYS Y B. J. REYS, Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan, *International Journal of Science and Mathematics Education* **7**(2) (2009), 383–403.