Sobre la conjetura de salto espectral de Kannan, Lovász y Simonovits

por

David Alonso-Gutiérrez y Jesús Bastero*

Resumen. En este artículo presentamos la conjetura KLS sobre el valor de la constante en la desigualdad de Poincaré desde el punto de vista analítico-funcional, así como su relación con otras importantes conjeturas dentro del análisis geométrico asintótico, y damos una idea de la demostración de Eldan, Lee y Vempala que proporciona la mejor estimación conocida hoy en día del valor de dicha constante.

1. Introducción

La conjetura sobre la que versan estas líneas, denominada conjetura KLS por las iniciales de Kannan, Lovász y Simonovits, es uno de los problemas abiertos más importantes dentro del análisis geométrico asintótico, que es la parte del análisis matemático que estudia problemas de alta dimensión y el comportamiento de diferentes parámetros y propiedades cuando la dimensión tiende a infinito. Esta conjetura tiene la particularidad de que en su origen, formulación y estudio aparecen involucradas diversas partes de las matemáticas como son el análisis funcional, la geometría convexa y diferencial, la probabilidad, el cálculo diferencial estocástico y la ciencia de la computación teórica. De hecho, es en esta última teoría donde tiene sus raíces.

En la teoría de algoritmos es importante muestrear eficientemente conjuntos y distribuciones en alta dimensión. Es decir, generar un vector aleatorio que tenga una distribución uniforme sobre un cuerpo convexo en dimensión n y calcular la complejidad de los algoritmos que lo proporcionan.

La presentación que haremos aquí de la conjetura la enfocaremos desde una perspectiva analítico-geométrica. En contraposición, y como lectura complementaria, recomendamos al lector interesado consultar el instructivo artículo [26], donde los autores, Lee y Vempala, presentan este mismo problema desde el punto de vista de la teoría de la complejidad computacional que, desde luego, está más cercano a sus orígenes.

En efecto, en su trabajo [20], Kannan, Lovász y Simonovits estudian la complejidad de un algoritmo probabilista diseñado para el cálculo del volumen de un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$. En algún momento necesitan estimar la relación existente

*Los dos autores están parcialmente apoyados por los proyectos MTM2016-77710-P (Ministerio de Economía y Competitividad) y E26_17R (Gobierno de Aragón).

entre la superficie que aparece cuando un cuerpo convexo se divide en dos partes y el volumen de esas partes. Cuanto mejor se estime esa relación más se puede afinar la estimación de la complejidad del algoritmo (ver la sección 4 y, mejor aún, el mencionado artículo [26]).

El problema que se presenta es de naturaleza isoperimétrica, dado que estudia la relación entre superficies y los volúmenes *rodeados*, y es un hecho clásico y bien conocido que las desigualdades isoperimétricas tienen una interpretación analítico-funcional (ver [6]). Este es, pues, nuestro modo de ver la conjetura y así la presentamos.

La desigualdad isoperimétrica clásica en $\mathbb{R}^n$ dice que, para cada boreliano acotado $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\frac{|A^+|}{|A|^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{|S^{n-1}|}{|B_2^n|^{\frac{n-1}{n}}},$$

donde $|A|$ es el volumen o medida de Lebesgue n-dimensional de A en $\mathbb{R}^n$, $|A^+|$ es el contenido exterior de Minkowski definido por

$$|A^+| := \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{|A^\varepsilon| - |A|}{\varepsilon},$$

siendo $A^\varepsilon = \{a + x; a \in A, |x| < \varepsilon\}$ la ε-dilatación de A, B_2^n es la bola euclídea unidad, S^{n-1} la superficie esférica de radio 1, y $|S^{n-1}|$ su medida de Hausdorff (es bien conocido que $|A^+|$ coincide con la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional de la frontera para los borelianos acotados con frontera regular). Esta desigualdad tiene un equivalente analítico-funcional, la desigualdad de Sobolev en el extremo. En efecto, probar que

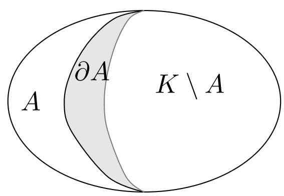
$$|A^+| \geq C|A|^{\frac{n-1}{n}},$$

con una constante C, para todo boreliano acotado, es equivalente a demostar que

$$\| \, |\nabla f| \, \|_1 \geq C \|f\|_{\frac{n}{n-1}}$$

con la misma constante, para cualquier función $C^{(1)}$ de soporte compacto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, donde $\|f\|_{\frac{n}{n-1}}$ representa la norma p de la función f para $p = n/(n-1)$; véase, por ejemplo, [16].

En nuestro caso, el problema isoperimétrico que nos planteamos es el siguiente. Supongamos que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo, es decir, un conjunto compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío, de volumen o medida de Lebesgue $|K| = 1$. Dividamos K en dos partes disjuntas $K = A \cup (K \setminus A)$ con $A \subseteq K$ boreliano.



Llamemos, como antes,

$$|A^+| = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{|(A + \varepsilon B_2^n) \cap K| - |A|}{\varepsilon}.$$

Notemos que, en general, $|A^+|$ y $|(K \setminus A)^+|$ podrían no coincidir. Sin embargo, en situaciones *suaves*, $|A^+|$ representa la medida de la frontera de A dentro de K.

La pregunta que nos hacemos es: ¿cuál es la mejor constante ψ_K que verifica

$$|A^+| \geq \psi_K \operatorname{mín}\{|A|, |K \setminus A|\} \tag{1}$$

para cualquier $A \subseteq K$ boreliano? Llamaremos *constante de Cheeger* de K a ψ_K, pues fue Cheeger quien introdujo esta desigualdad para desigualdades isoperimétricas en variedades riemannianas.

Como sucede con la situación clásica antes presentada, también hay una formulación analítico-funcional equivalente en este caso. Se conoce como la desigualdad de Poincaré del cuerpo convexo K.

2. La desigualdad de Poincaré y la conjetura KLS

Sea K un cuerpo convexo; la desigualdad de Poincaré dice que existe una constante $C_K > 0$, dependiente de K, tal que, para cualquier función de cuadrado integrable y localmente Lipschitz f que cumpla $\int_K f(x)\,dx = 0$, se verifica

$$\int_K f(x)^2\,dx \leq C_K \int_K |\nabla f(x)|^2\,dx$$

(recordemos que una función localmente Lipschitz es diferenciable en casi todo punto, por el teorema clásico de Rademacher).

En dimensión $n = 1$ este resultado se conoce como desigualdad de Wirtinger y es consecuencia directa de la identidad de Parseval. En efecto, si suponemos que la función es suficientemente regular y cumple la condición anterior, cambiando de variable para que $K = [0, 2\pi]$ y desarrollando en serie de Fourier tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 &= \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 = \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,dx.\end{aligned}$$

En dimensiones superiores, utilizando que menos el laplaciano, $-\Delta$, en K tiene asociada una sucesión de autovalores $\lambda_{n,K}$ con sus correspondientes autofunciones, puede darse una demostración muy similar a la anterior, obteniéndose entonces que

$$\lambda_{1,K} \int_K f(x)^2\,dx \leq \int_K |\nabla f(x)|^2\,dx. \tag{2}$$

La constante C_K que aparece en la desigualdad de Poincaré es, pues, exactamente igual al inverso del primer autovalor no nulo de $-\Delta$ en ese dominio, y es la mejor constante posible.

Existe una relación muy estrecha y bien conocida entre la constante ψ_K que aparece en la desigualdad (1) y la $\lambda_{1,K}$ de (2). Para ello adoptamos un punto de vista y notación probabilista. Denotaremos

$$\mathbb{E}f = \frac{1}{|K|}\int_K f(x)\,dx$$

y así la desigualdad de Poincaré se puede escribir como

$$\mathbb{E}(f - \mathbb{E}f)^2 \leq C_K \mathbb{E}|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2 \cap \text{loc. Lips.}$$

o, equivalentemente,

$$\operatorname{Var} f \leq C_K \mathbb{E}|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2 \cap \text{loc. Lips.} \tag{3}$$

(usamos Var para denotar la varianza). La relación entre las desigualdades (1) y la (2) o (3) viene dada por un teorema bien conocido y debido a muchos autores: por ejemplo, Rothaus, Cheeger, Maz'ja, Ledoux, E. Milman (ver [27], [24], [28] y las referencias ahí incluidas):

Teorema 2.1. *Sea μ una probabilidad de Borel en $\mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) Para cualquier subconjunto boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(A) \geq \psi_\mu \operatorname{mín}\{\mu(A), \mu(A^c)\}.$$

b) Para cualquier función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable y localmente Lipschitz,

$$C_{1,\mu}\mathbb{E}_\mu\,|f - \mathbb{E}_\mu f| \leq \mathbb{E}_\mu|\nabla f|.$$

Además, $C_{1,\mu} \leq \psi_\mu \leq 2C_{1,\mu}$.

Si suponemos una condición extra sobre la probabilidad μ, el ser log-cóncava (ver a continuación su definición), entonces las dos afirmaciones anteriores son equivalentes a la desigualdad de Poincaré, es decir, que μ verifica

$$\lambda_{1,\mu} \operatorname{Var}_\mu f \leq \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2_\mu \cap \text{loc. Lips.}$$

Las constantes también son equivalentes: $\psi_\mu \sim \sqrt{\lambda_{1,\mu}}$ salvo constantes absolutas, independientes no solo de μ sino incluso de la dimensión.

Una probabilidad μ en $\mathbb{R}^n$ es *log-cóncava* si es de la forma $d\mu(x) = e^{-V(x)}\,dx$, donde $V : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ es una función convexa. Ejemplos de este tipo de probabilidades son:

- la exponencial, $d\mu(x) = Ze^{-|x-b|}\,dx$, $b \in \mathbb{R}^n$;
- las gaussianas, $d\mu(x) = Ze^{-\langle B(x-b), x-b\rangle}\,dx$, $b \in \mathbb{R}^n$ y B matriz simétrica definida positiva;

- las distribuciones uniformes sobre cuerpos convexos, $d\mu(x) = |K|^{-1}\chi_K(x)\,dx$, K un cuerpo convexo.

Estas últimas son, de hecho, las más importantes en el sentido de que cualquier otra probabilidad log-cóncava es límite de marginales de uniformes sobre cuerpos convexos de dimensión superior.

Nota. La tercera afirmación que aparece en el teorema precedente es incluso más fuerte. De hecho, E. Milman (ver [28]) demostró que las tres afirmaciones del teorema anterior son también equivalentes a

$$C_{1,\infty,\mu}\mathbb{E}_\mu|f - \mathbb{E}_\mu f| \le \| \, |\nabla f| \, \|_\infty$$

para todas las funciones integrables localmente Lipschitz, con $C_{1,\mu} \sim C_{1,\infty,\mu}$ salvo constantes absolutas (ver [28]). Este hecho es cierto no solo para probabilidades log-cóncavas, sino en variedades riemannianas con curvatura de Ricci acotada inferiormente.

A partir de ahora consideraremos solo probabilidades μ log-cóncavas en $\mathbb{R}^n$. El objetivo es estimar su constante de Cheeger o, equivalentemente, la mejor constante de la desigualdad de Poincaré que cumplen. Comenzamos renormalizando μ. En primer lugar, mediante una traslación podemos suponer que su baricentro es el origen de coordenadas. A continuación vamos a renormalizar de acuerdo con su matriz de covarianzas. Recordemos que la matriz de covarianzas de una probabilidad es

$$\mathrm{Cov}(\mu) = \mathbb{E}_\mu(x-b)\otimes(x-b) = \left(\mathbb{E}_\mu x_i x_j - \mathbb{E}_\mu x_i \mathbb{E}_\mu x_j\right)_{i,j},$$

que es una matriz simétrica definida positiva y por tanto diagonalizable (b es el baricentro de μ: $b = \mathbb{E}_\mu x$). No es difícil probar que mediante un cambio de variable lineal se puede conseguir que la matriz de covarianzas de la nueva probabilidad sea la matriz identidad en $\mathbb{R}^n$.

Llamaremos, pues, probabilidades isotrópicas a las que cumplen estas dos condiciones:

- $\mathbb{E}_\mu x = 0$,
- $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$.

Por el comentario anterior, toda probabilidad log-cóncava puede transformarse en isotrópica mediante un cambio de variable afín, y además esta transformación es única salvo transformaciones ortogonales.

La conjetura KLS puede enunciarse así:

Conjetura 1 (Kannan, Lovász y Simonovits [20]). *Existen constantes absolutas $C_1, C_2 > 0$ tales que, para cualquier probabilidad log-cóncava e isotrópica μ en $\mathbb{R}^n$,*

$$C_1 \,\mathrm{Var}_\mu f \le \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2 \cap \text{loc. Lips.}$$

o, equivalentemente,

$$\mu^+(A) \ge C_2 \min\{\mu(A), \mu(A^c)\} \qquad \forall \text{ boreliano } A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si no consideramos la normalización, la conjetura para cualquier probabilidad log-cóncava sería

$$\frac{C_1}{\|\operatorname{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}}\operatorname{Var}_\mu f \leq \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2 \cap \text{loc. Lips.}$$

o, equivalentemente,

$$\mu^+(A) \geq \frac{C_2}{\|\operatorname{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}^{1/2}} \min\{\mu(A), \mu(A^c)\} \qquad \forall \textit{ boreliano } A \subseteq \mathbb{R}^n$$

(la expresión $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ representa la norma de la matriz como operador lineal continuo en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$).

Si la conjetura fuera cierta, además de las consecuencias que se se derivan desde el punto de vista de la complejidad computacional, que se explican en la sección 4, y las otras conjeturas relacionadas con ella, véase la sección 3, hay un hecho que se deduce desde el punto de vista geométrico: de todas las maneras posibles que hay de dividir un cuerpo convexo en dos partes con el mismo volumen, la que menos sección presenta, salvo constantes absolutas, es cortar por hiperplanos.

Kannan, Lovász y Simonovits, ver [20], demostraron que si μ es una probabilidad log-cóncava en $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu^+(A) \geq \frac{C}{\mathbb{E}_\mu|x|} \min\{\mu(A), \mu(A^c)\},$$

para todo boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$. También demostraron que si μ es la probabilidad uniforme sobre un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mu^+(A) \geq \frac{C}{\mathbb{E}_\mu \theta_K(x)} \min\{\mu(A), \mu(A^c)\},$$

para todo boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, donde $\theta_K(x)$ es la longitud del mayor intervalo centrado en x contenido en K.

El mejor resultado general conocido hasta ahora fue demostrado por Lee y Vempala, adaptando el método introducido por Eldan. Se trata del siguiente resultado:

TEOREMA 2.2 (Eldan [13], Lee y Vempala [25]). *Sea μ una probabilidad isotrópica y log-cóncava en $\mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\frac{C_1}{\sqrt{n}}\operatorname{Var}_\mu f \leq \mathbb{E}_\mu|\nabla f|^2 \qquad \forall f \in L^2 \cap \text{loc. Lips.}$$

y, equivalentemente,

$$\mu^+(A) \geq \frac{C_2}{n^{1/4}} \min\{\mu(A), \mu(A^c)\} \qquad \forall \textit{ boreliano } A \subset \mathbb{R}^n,$$

siendo C_1 y C_2 constantes absolutas.

3. Otras conjeturas relacionadas

A continuación presentaremos otras dos conjeturas que aparecieron independientemente y que se ha probado que están íntimamente relacionadas con la conjetura KLS: la conjetura del hiperplano (*slicing problem*) y la de la varianza (*thin shell conjecture*). De hecho, la conjetura de la varianza es un caso particular de la conjetura KLS.

3.1. La conjetura del hiperplano

La conjetura del hiperplano fue formulada por Bourgain en 1986 cuando probó el teorema de acotación en norma p de la función maximal de Hardy-Littlewood sobre cuerpos convexos ([8]). Allí apareció la llamada constante de isotropía L_K de un cuerpo convexo K. Demostró que siempre $L_K > C_1 > 0$ para todo K y en toda dimensión, siendo C_1 una constante absoluta. Bourgain planteó que también debía ser cierta la acotación inversa $L_K < C_2$ para todo K y toda dimensión, con una constante absoluta C_2. Así formulada, esta conjetura apareció en [30]. Puede reformularse de una manera más sencilla, pero equivalente:

Conjetura 2 (Conjetura del hiperplano, Bourgain, 1986). *Existe una constante universal $C > 0$ tal que, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ de volumen $|K| = 1$, se puede encontrar un hiperplano $(n-1)$-dimensional H que verifica*

$$|K \cap H|_{n-1} \geq C,$$

es decir, las secciones $(n-1)$-dimensionales no pueden ser todas a la vez uniformemente pequeñas.

Bourgain dio la primera estimación conocida:

Teorema 3.1 (Bourgain [9]). *Existe una constante universal $C > 0$ tal que, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ de volumen $|K| = 1$, se puede encontrar un hiperplano H que verifica*

$$|K \cap H|_{n-1} \geq \frac{C}{n^{1/4} \log n},$$

con $C > 0$ constante absoluta.

La mejor estimación hasta el momento fue obtenida por Klartag y ahora, como consecuencia del teorema 2.2, se tiene una demostración alternativa:

Teorema 3.2 (Klartag [21], Eldan, Lee y Vempala [13], [25]). *Existe una constante universal $C > 0$ tal que, para todo cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ de volumen $|K| = 1$, se puede encontrar un hiperplano H que verifica*

$$|K \cap H|_{n-1} \geq \frac{C}{n^{1/4}}.$$

3.2. La conjetura de la varianza

Esta nueva conjetura está centrada en cómo se distribuye la masa en los cuerpos convexos de gran dimensión. En particular, ¿cómo se distribuye la variable aleatoria $|x|$ con respecto a la probabilidad uniforme sobre un cuerpo convexo?

En 2003 Antilla, Ball y Perissinaki (ver [3]) conjeturaron que en las probabilidades log-cóncavas e isotrópicas la masa estaba concentrada en una estrecha concha (*thin shell*) más de lo que la trivial estimación $\operatorname{Var}_\mu |x| \leq \mathbb{E}_\mu |x|^2$ sugería. Bobkov y Koldobsky formularon la siguiente conjetura (ver [7]):

Conjetura 3. *Existe una constante absoluta $C > 0$ tal que, para toda probabilidad log-cóncava e isotrópica μ en $\mathbb{R}^n$, se tiene*

$$\mathbb{E}_\mu \left| |x| - \sqrt{n} \right|^2 \leq C. \tag{4}$$

En particular este hecho implica que

$$\mu \left\{ \left| \frac{|x|}{\sqrt{n}} - 1 \right| > t \right\} \leq 2e^{-C' \sqrt{t n^{1/2}}} \qquad \forall t > 0,$$

lo que indica que hay una gran concentración de masa en una estrecha corona o *concha* esférica.

El mejor resultado obtenido hasta la fecha se deduce del teorema 2.2:

Teorema 3.3. *Para probabilidades log-cóncavas isotrópicas,*

$$\mathbb{E}_\mu \left| |x| - \sqrt{n} \right|^2 \leq C\sqrt{n},$$

con $C > 0$ constante absoluta. Si la probabilidad es solo log-cóncava,

$$\mathbb{E}_\mu \left| |x| - \left(\mathbb{E}_\mu |x|^2 \right)^{1/2} \right|^2 \leq C\sqrt{n} \left\| \operatorname{Cov}(\mu) \right\|_{\mathrm{op}}.$$

Este resultado mejora estimaciones anteriores de varios autores: Klartag, Fleury, Guédon y E. Milman (ver [22], [23], [17], [19]).

La conjetura de la varianza es más débil que la KLS, dado que no es difícil ver que (4) es equivalente a

$$C_1 \operatorname{Var}_\mu |x|^2 \leq n,$$

que es el caso de la función $f(x) = |x|^2$. Por otro lado, la conjetura de la varianza es más fuerte que la conjetura del hiperplano de manera global. Esto significa que si conseguimos una estimación para todas las probabilidades log-concavas isotrópicas, la misma estimación es cierta para la conjetura del hiperplano para todas ellas.

Además hay una manera directa, aunque no sencilla (ver [4]), de probar que, para una μ fijada, la estimación que se obtiene en la conjetura KLS implica otra estimación para la conjetura del hiperplano, que es de carácter exponencial. Para consultar referencias y más información sobre estas conjeturas puede verse, por ejemplo, [10], [1], [2]. Estos hechos vienen reflejados en la figura 1.

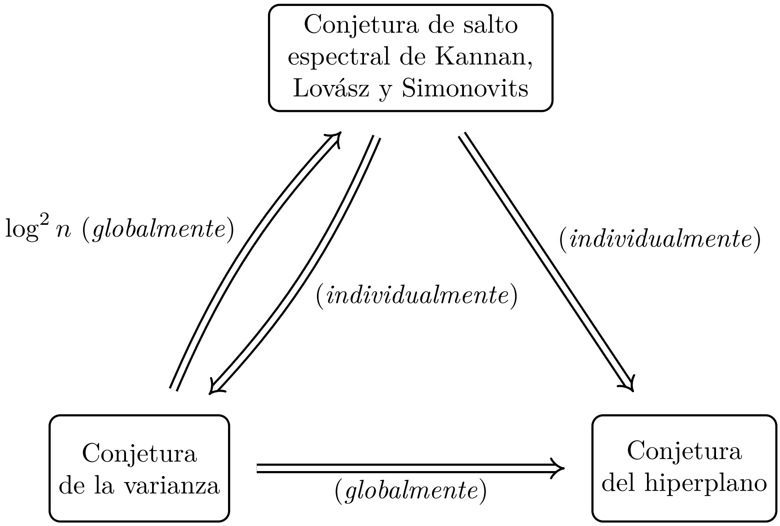


Figura 1: Implicaciones entre las conjeturas.

4. Motivación: algoritmo de cálculo de volúmenes

El origen de la conjetura KLS se halla en el problema de la construcción de un algoritmo eficiente (es decir, con bajo coste computacional) para calcular el volumen de un cuerpo convexo en dimensión n.

Más concretamente, se trata de diseñar un algoritmo que reciba como entrada un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in K$ y un parámetro $\varepsilon > 0$ que indique el error permitido, y devuelva como salida un número V tal que

$$(1-\varepsilon)|K| \leq V \leq (1+\varepsilon)|K|.$$

El cuerpo convexo se le proporciona al algoritmo como entrada en forma de oráculo de la pertenencia (*membership oracle*), es decir, como otro algoritmo que recibe como entrada un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y devuelve como salida

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

La complejidad del algoritmo mide el número de operaciones aritméticas y llamadas al oráculo que se hagan.

Es bien conocido que cualquier algoritmo determinista tiene una complejidad exponencial, ver [15] y [5]. Sin embargo, en 1989, Dyer, Frieze y Kannan (ver [12]) construyeron un algoritmo aleatorizado con complejidad polinomial:

Teorema 4.1. *Existe un algoritmo que recibe como entrada un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in K$, un parámetro de error $\varepsilon > 0$ y un parámetro de* *probabilidad* $0 < \delta < 1$, *y devuelve como salida un número aleatorio* V *tal que*

$$(1-\varepsilon)|K| \leq V \leq (1+\varepsilon)|K|$$

con probabilidad mayor que $1-\delta$. *Además, este algoritmo tiene complejidad polinomial en* n, $\frac{1}{\varepsilon}$, *y* $\log \frac{1}{\delta}$.

La construcción de este algoritmo estaba basada en la construcción de un algoritmo de muestreo (*sampling algorithm*). Es decir, un algoritmo que reciba como entrada un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in K$ y un parámetro de error ε, y devuelva como salida un punto aleatorio $x \in \mathbb{R}^n$ distribuido con una probabilidad ν tal que

$$d_{TV}\left(\nu, \frac{\chi_K(x)}{|K|}\,dx\right) := \sup_{A \subseteq K} \left|\nu(A) - \frac{|A|}{|K|}\right| \leq \varepsilon$$

(d_{TV} representa la distancia en variación total de las dos medidas).

La forma de construir un algoritmo de muestreo es mediante un camino aleatorio (*random walk*) de la siguiente manera: partiendo del punto x_0 recibido como entrada, se toma un punto aleatorio x_1 distribuido mediante una distribución de probabilidad elegida dependiente de x_0. A continuación, mediante una llamada al oráculo de pertenencia, se comprueba si x_1 pertenece o no pertenece a K. Si $x_1 \in K$ se mantiene su valor. Si no, se toma $x_1 = x_0$. Repitiendo el proceso, construyendo x_2 a partir de x_1, y x_{n+1} a partir de x_n, se construye una sucesión de vectores aleatorios en la que la distribución de cada vector x_{n+1} depende únicamente del vector aleatorio anterior. Bajo ciertas condiciones la distribución de x_n converge en variación total a la distribución de probabilidad uniforme sobre K. Cuanto más rápida sea esta convergencia menor será la complejidad computacional del algoritmo de muestreo.

Una posible manera de contruir este camino aleatorio sería tomando el punto x_{n+1} a partir de x_n uniformemente distribuido en una bola de centro x_0 y radio ρ (*ball walk*). En el trabajo [12] los autores construyen un camino aleatorio sobre una red de cubos para probar que la distribución del punto x_t converge a la distribución uniforme sobre K en tiempo polinomial. Se necesita probar que, para un cuerpo convexo con frontera suave construido dentro del cuerpo K inicial, la probabilidad uniforme sobre su superficie satisface una desigualdad isoperimétrica de tipo Cheeger. Los autores conjeturaron que cualquier cuerpo convexo satisface este tipo de desigualdad con constante un polinomio fijo en n y en el diámetro de K. Si dicha conjetura fuese cierta se podría simplificar su prueba y demostrar una velocidad de convergencia mayor que la que obtuvieron. No obstante, con este tipo de caminos aleatorios no se puede mejorar la estimación de la complejidad computacional de orden $O(n^8)$.

Kannan, Lovász y Simonovits mejoraron estas estimaciones construyendo otro tipo de caminos aleatorios y conjeturaron una cota inferior para la constante de Cheeger $C_2/\|\operatorname{Cov}(\mu)\|_{\mathrm{op}}^{1/2}$, donde μ es la probabilidad uniforme en K. Si la conjetura KLS fuese cierta, se obtendría una complejidad computacional para el algoritmo de muestreo de orden $O(n^2)$. La mejor estimación hasta el momento de la complejidad computacional del algoritmo de muestreo es de orden $O(n^c)$ para una constante c entre 2 y 3.

Merece la pena señalar que, si la conjetura KLS fuese cierta, la complejidad de orden $O(n^2)$ en el algoritmo de muestreo permitiría construir un algoritmo de cálculo de volumen de complejidad $O^*(n^3)$, donde O^* suprime la factores logarítmicos. En [11], Cousins y Vempala construyeron un algoritmo de cálculo de volumen con esta complejidad, evitando así el problema de validar la veracidad de la conjetura KLS. No obstante, la construcción de algoritmos de muestreo eficientes sigue siendo una cuestión importante en ciencias de la computación teórica, ya que otros problemas se reducen al muestreo.

5. Una idea de la demostración del resultado de Eldan, Lee y Vempala, teorema 2.2

Terminamos esta presentación de la conjetura KLS dando una idea de la demostración de Lee y Vempala, que se basa en el método de localización de Eldan. Fue este autor, Eldan, quien presentó este método, que le permitió demostrar que, salvo factores logarítmicos, la mejor acotación universal para la conjetura de la varianza es equivalente a la mejor acotación para la conjetura KLS, ver [13]. Lee y Vempala, utilizando la localización de Eldan con un pequeño cambio en el sistema diferencial estocástico y dando una acotación a los momentos de orden tres, consiguieron demostrar el teorema.

La idea de Eldan que pasaremos a comentar se basa en dos resultados previos. El primero de ellos es que, para dar una estimación de la constante de isoperimetría, el papel relevante lo juegan los conjuntos de medida 1/2. Concretamente, si controlamos inferiormente las dilataciones de estos conjuntos, podemos estimar la constante de Cheeger de la medida.

Teorema 5.1 (E. Milman [29]). *Sea μ una probabilidad isotrópica y log-cóncava en $\mathbb{R}^n$. Supongamos que hay dos constantes $\Theta, C > 0$ para las que la desigualdad*

$$\mu(E^\Theta \setminus E) \geq C$$

se cumple para cualquier subconjunto boreliano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mu(E) = \frac{1}{2}$, donde E^Θ es la Θ-dilatación de E, es decir, $E^\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, E) \leq \Theta\}$. Entonces,

$$\mu^+(A) \geq \frac{C}{\Theta} \operatorname{mín}\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

para todo boreliano $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

El segundo es un resultado clásico de concentración para probabilidades *más log-cóncavas* que la gaussiana. Lo que dice es que, para este tipo de densidades, los conjuntos de medida, por ejemplo, entre 0.1 y 0.9, tienen dilataciones que casi llenan el espacio, por lo que podremos aplicar el resultado anterior. Antecedentes de este resultado pueden verse en trabajos de Hörmander, Prékopa y Leindler, Gromov y V. D. Milman, Ledoux (ver [18], [24] y sus citas). La versión exacta como aparece a continuación está en [13], [10], [1].

Teorema 5.2. *Sea una función convexa $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Supongamos que la probabilidad μ tiene densidad $d\mu(x) = e^{-\phi(x)-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}\,dx$, para un $t > 0$. Entonces, si $A \subset \mathbb{R}^n$ cumple*

$$\frac{1}{10} \leq \mu(A) \leq \frac{9}{10}$$

obtenemos

$$\mu\left(A^{Dt^{-1/2}}\right) \geq \frac{95}{100},$$

donde $A^{Dt^{-1/2}}$ es la $Dt^{-1/2}$-dilatación de A y $D > 0$ es una constante absoluta.

Cuando tenemos una probabilidad isotrópica y log-cóncava general no podemos asegurar que tenga ese tipo de densidad. La idea de Eldan es modificar nuestra probabilidad un poco y pasar de $d\mu(x) = e^{-V(x)}\,dx$ a $d\mu_t(x) = Ze^{-V(x)-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}\,dx$ para algún $t > 0$, con Z un factor de normalización. Con esto, notemos que, al multiplicar por el factor $e^{-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}$, podemos aplicar el resultado anterior y, como $e^y \sim 1 + y$ para y pequeños, no estaremos muy lejos de la densidad inicial. A continuación calcularemos la constante de Cheeger para μ_t y luego intentaremos deducir algo para la de μ.

El problema es que únicamente con estas herramientas no se obtienen buenos resultados. La idea de Eldan para solventar esta dificultad, teniendo en cuenta que el centro de gravedad y la matriz de covarianzas de μ_t van variando, es intentar corregir esto añadiendo al exponente otro factor lineal, por tanto convexo, de la siguiente forma:

$$d\mu_t(x) = Ze^{-V(x)+\langle c_t,x\rangle-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}\,dx, \qquad t > 0.$$

Y el hecho capital es suponer que $c_t \in \mathbb{R}^n$ evolucione como un proceso de Itô. Es decir, a cada instante corregimos el baricentro e introducimos una componente browniana. El proceso de Itô c_t aparecerá como solución de un sistema diferencial estocástico. Para asegurar la existencia de solución se necesita que la probabilidad inicial sea de soporte compacto, lo que no es una dificultad añadida, pues las acotaciones que se obtengan para las probabilidades log-cóncavas de soporte compacto lo serán también para todas.

Teorema 5.3 (Eldan). *Sea μ una probabilidad isotrópica, log-concava y de soporte compacto. Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas*

$$dc_t = b_t\,dt + dW_t, \qquad c_0 = 0,$$

donde $c_t \in \mathbb{R}^n$, W_t es un movimiento browniano o proceso de Wiener n-dimensional y $b_t \in \mathbb{R}^n$ es el baricentro de la probabilidad $d\mu_t(x) = f_t(x)\,dx$, siendo esta densidad

$$f_t(x) = \frac{e^{\langle c_t,x\rangle-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle c_t,x\rangle-\frac{t}{2}\langle x,x\rangle}f(x)\,dx},$$

es decir,

$$b_t = \int_{\mathbb{R}^n} xf_t(x)\,dx \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces, este sistema tiene solución única para todo $t \geq 0$ *y casi todo* $\omega \in \Omega$*. Además,* b_t *y* $f_t(x)$ *son procesos de Itô en* $\mathbb{R}^n$*. En particular,* df_t *no tiene deriva sino solo difusión,* $df_t(x) = f_t(x)\langle x - b_t, dW_t\rangle$ *para casi todo* $x \in \mathbb{R}^n$*, lo que implica que* $f_t(x)$ *es una martingala.*

Las probabilidades μ_t son log-cóncavas, aunque no isotrópicas. El hecho de que $f_t(x)$ sea una martingala será crucial, dado que tomando esperanza condicional podremos recuperar el instante $t = 0$, es decir, $f(x) = f_0(x) = \mathbb{E}_\omega f_t(x)$, para todo $t > 0$, y casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Tratemos de computar la constante de Cheeger. Para ello tomemos cualquier boreliano $E \subset \mathbb{R}^n$, con $\mu(E) = \frac{1}{2}$. En principio, $\mu_t(E)$ no tiene por qué medir $\frac{1}{2}$. Estudiemos este proceso estocástico gracias al efecto martingala. Llamemos $g(t) = g_{\omega,E}(t) = \mu_t(E)$, que también es un proceso de Itô. Entonces,

$$g(t) = \int_E f_t(x, \omega)\, dx, \qquad t \geq 0.$$

Es obvio que $g(0) = 1/2$. Fijamos un tiempo $T > 0$ y una constante $\Theta > 0$, que luego serán elegidos, e intentemos aplicar el teorema 5.1:

$$\begin{aligned}\mu(E^\Theta \setminus E) &= \int_{E^\Theta \setminus E} f(x)\, dx = \int_{E^\Theta \setminus E} \mathbb{E}_\omega f_T(x)\, dx \\ &= \mathbb{E}_\omega \int_{E^\Theta \setminus E} f_T(x)\, dx = \mathbb{E}_\omega \mu_T(E^\Theta \setminus E).\end{aligned}$$

Se trata ahora de acotar inferiormente $\mu_T(E^\Theta \setminus E)$ en un conjunto de ω con medida positiva. La forma de hacer esto es aplicar el teorema 5.2. Para ello tenemos que estar seguros de que $\mu_T(E) \in [1/10, 9/10]$ en un conjunto de sucesos ω suficientemente grande. Con este fin, estimamos superiormente la probabilidad del suceso complementario, $\left\{\left|\mu_T(E) - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{4}\right\}$, y se obtiene

$$\mathbb{P}\left\{\left|\mu_T(E) - \tfrac{1}{2}\right| > \tfrac{1}{4}\right\} = \mathbb{P}\left\{\left|g(T) - \tfrac{1}{2}\right| > \tfrac{1}{4}\right\} \leq 0.1 + \mathbb{P}\left\{T \max_{0 \leq t \leq T} \|A_t\|_{\mathrm{op}} > \tfrac{1}{64}\right\},$$

donde A_t es la matriz de covarianzas de μ_t: $A_t = \mathrm{Cov}(\mu_t) = \mathbb{E}_{\mu_T}(x - b_t) \otimes (x - b_t)$.

La principal estimación que obtuvieron Lee y Vempala es

$$\mathbb{P}\left\{\max_{0 \leq t \leq Cn^{-1/2}} \mathrm{Tr}(A_t^2) \geq 3n\right\} \leq 0.1,$$

donde $C > 0$ es una constante absoluta y Tr es la traza de la matriz. Como $\|A_t\|_{\mathrm{op}} \leq \sqrt{\mathrm{Tr}(A_t^2)}$, eligiendo ahora $T = \min\left\{C, \frac{1}{64\sqrt{8}}\right\} \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ y llamando $\mathcal{F}_T$ al suceso $\mathcal{F}_T = \left\{\frac{1}{4} \leq g(T) \leq \frac{3}{4}\right\}$, se llega a que $\mathbb{P}\{\mathcal{F}_T\} > 0.8$.

Para unas constantes c_1 y c_2 absolutas, para los $\omega \in \mathcal{F}_T$, $\mu_T(E^{c_1 T^{-1/2}} \setminus E) \geq \frac{95}{100}$ y, por el efecto martingala, llegamos a

$$\begin{aligned}\mu(E^{c_2 n^{1/4}} \setminus E) &= \int_{E^{c_2 n^{1/4}} \setminus E} f(x)\,dx = \int_{E^{c_2 n^{1/4}} \setminus E} \mathbb{E}_\omega f_T(x)\,dx \\ &= \mathbb{E}_\omega \int_{E^{c_2 n^{1/4}} \setminus E} f_T(x)\,dx = \mathbb{E}_\omega \mu_T(E^{c_2 n^{1/4}} \setminus E) \\ &\geq (0.95 - 0.5)\mathbb{P}(\mathcal{F}_T) > 0.45 \cdot 0.8.\end{aligned}$$

A continuación, el teorema 5.1 de E. Milman implica que existe una constante c_3 absoluta tal que

$$\mu^+(A) \geq c_3 n^{-1/4} \min\{\mu(A), \mu(A^c)\}$$

para todo boreliano, con lo que ya se ha obtenido la estimación para la constante de Cheeger.

Nota. En la referencia [14] hay otra reciente demostración de Eldan de los resultados de Lee y Vempala y el suyo conjuntamente, acotando la varianza de las funciones 1-Lipschitz, aunque aparece un término $\log n$ extra en la estimación final. Esta demostración también se basa en su método de localización y en dos resultados previos similares a los teoremas 5.1 y 5.2 anteriores, y utiliza el mismo tipo de estimaciones.

Referencias

[1] D. Alonso-Gutiérrez y J. Bastero, Approaching the Kannan-Lovász-Simonovits and variance conjectures, *Lecture Notes in Math.* **2131**, Springer, 2015.

[2] D. Alonso-Gutiérrez y J. Bastero, Convex inequalities, isoperimetry and spectral gap, *Advanced courses of mathematical analysis VI*, 3–24, World Sci. Publ., 2017.

[3] M. Anttila, K. Ball e I. Perissinaki, The central limit problem for convex bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 4723–4735.

[4] K. Ball y V. H. Nguyen, Entropy jumps for isotropic log-concave random vectors and spectral gap, *Studia Math.* **213** (2012), 81–96.

[5] I. Bárány y Z. Füredi, Computing the volume is difficult, *Discrete Comput. Geom.* **2** (1987), 319–326.

[6] S. G. Bobkov y C. Houdré, Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities, *Mem. Amer. Math. Soc.* **129** (1997), 616.

[7] S. G. Bobkov y A. Koldobsky, On the central limit property of convex bodies, *Geometric aspects of functional analysis*, 44–52, *Lecture Notes in Math.* **1807**, Springer, 2003.

[8] J. Bourgain, On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies, *Amer. J. Math.* **108** (1986), 1467–1476.

[9] J. Bourgain, On the distribution of polynomials on high-dimensional convex sets, *Geometric aspects of functional analysis (1989-90)*, 127–137, *Lecture Notes in Math.* **1469**, Springer, 1991.

[10] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas y B. H. Vritsiou, Geometry of isotropic convex bodies, *Mathematical Surveys and Monographs* **196**, American Mathematical Society, 2014.

[11] B. Cousins y S. Vempala, Gaussian cooling and $O^*(n^3)$ algorithms for volume and Gaussian volume, *SIAM J. Comput.* **47** (2018), 1237–1273.

[12] M. Dyer, A. Frieze y R. Kannan, A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies, *J. Assoc. Comput. Mach.* **38** (1991), 1–17.

[13] R. Eldan, Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), 532–569.

[14] R. Eldan, Lecture notes - From stochastic calculus to geometric inequalities, `http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~ronene/GFANotes.pdf`.

[15] G. Elekes, A geometric inequality and the complexity of computing volume, *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 289–292.

[16] H. Federer y W. H. Fleming, Normal and integral currents, *Ann. of Math. (2)* **72** (1960), 458–520.

[17] B. Fleury, Concentration in a thin Euclidean shell for log-concave measures, *J. Funct. Anal.* **259** (2010), 832–841.

[18] M. Gromov y V. D. Milman, A topological application of the isoperimetric inequality, *Amer. J. Math.* **105** (1983), 843–854.

[19] O. Guédon y E. Milman, Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures, *Geom. Funct. Anal.* **21** (2011), 1043–1068.

[20] R. Kannan, L. Lovász y M. Simonovits, Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma, *Discrete Comput. Geom.* **13** (1995), 541–559.

[21] B. Klartag, On convex perturbations with a bounded isotropic constant, *Geom. Funct. Anal.* **16** (2006), 1274–1290.

[22] B. Klartag, A central limit theorem for convex sets, *Invent. Math.* **168** (2007), 91–131.

[23] B. Klartag, Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets, *J. Funct. Anal.* **245** (2007), 284–310.

[24] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon, *Mathematical Surveys and Monographs* **89**, American Mathematical Society, 2001.

[25] Y. T. Lee y S. S. Vempala, Eldan's stochastic localization and the KLS hyperplane conjecture: an improved lower bound for expansion, *58th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2017*, 998–1007, IEEE Computer Soc., 2017.

[26] Y. T. Lee y S. S. Vempala, The Kannan-Lovász-Simonovits conjecture, *Current Developments in Mathematics*, vol. 2017, 1–36. Prepublicación disponible en `https://arxiv.org/abs/1807.03465`

[27] V. G. Maz'ja, Classes of domains and imbedding theorems for function spaces, *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960), 882–885 (traducción de *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **133** (1960), 527–530).

[28] E. Milman, On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration, *Invent. Math.* **177** (2009), 1–43.

[29] E. Milman, Isoperimetric bounds on convex manifolds, *Concentration, functional inequalities and isoperimetry*, 195–208, *Contemp. Math.* **545**, American Mathematical Society, 2011.

[30] V. D. Milman y A. Pajor, Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space, *Geometric aspects of functional analysis (1987-88)*, 64–104, *Lecture Notes in Math.* **1376**, Springer, 1989.

David Alonso-Gutiérrez, Dpto. de Matemáticas e IUMA, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: `alonsod@unizar.es`
Página web: `https://janovas.unizar.es/sideral/CV/david-alonso-gutierrez`

Jesús Bastero, Dpto. de Matemáticas e IUMA, Universidad de Zaragoza
Correo electrónico: `bastero@unizar.es`
Página web: `http://personal.unizar.es/bastero`