

Arquitectura de inflorescencias y fracciones continuas

por

Carmen Casares Antón

RESUMEN. Las semillas del girasol dibujan familias de ramas espirales en número igual a diferentes términos de la sucesión de Fibonacci. Pero, ¿es esta disposición la única solución al problema evolutivo de la distribución de las semillas en las especies botánicas? Las fracciones continuas asociadas a los números reales y sus congruentes dan respuesta a la pregunta. En este artículo se muestran argumentos que descartan algunas arquitecturas de las inflorescencias y señalan otras, diferentes a Fibonacci, como opciones que la Naturaleza también desarrolla.

La inflorescencia, o capítulo floral, del girasol y otras especies la componen cientos de flores diminutas rodeadas por una fila de flores en forma de pétalo sin función reproductora. Las flores fecundadas desarrollan en su receptáculo el fruto con una única semilla, la pipa. Las pipas se distribuyen en la inflorescencia formando familias de espirales que dibujan un elegante entramado. El número de espirales de dos familias que se cruzan a una distancia dada del centro coincide, en la mayoría de las especies, con términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci $1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Esta disposición aparece no solo con semillas en las inflorescencias, sino también en las alineaciones secundarias, o parásticos, de las distribuciones de las hojas sobre el tallo y se aprecian mejor cuando, como en las coníferas, las hojas son numerosas y los entrenudos muy cortos [2].

Sin embargo, Fibonacci no es la única respuesta evolutiva que han desarrollado las especies botánicas. En las siguientes secciones se exponen argumentos sencillos que justifican por qué se repite con tanta frecuencia este patrón filotáctico y cómo aparecen, además, otros patrones que también se observan en la Naturaleza.

1. SIMULACIÓN DE INFLORESCENCIAS

1.1. CONDICIONES DE CRECIMIENTO Y DISTRIBUCIONES DE PUNTOS

Para simular las distribuciones de semillas en una inflorescencia se establecen las siguientes condiciones de crecimiento [6]:

1. Las semillas se originan una a una a intervalos temporales constantes.
2. Las semillas se distribuyen radialmente sobre el capítulo de manera que el ángulo central entre una semilla y la siguiente es constante.

3. La distancia de las semillas al centro del capítulo es tal que el número de ellas que cabe en un disco es proporcional a su área.

Las distribuciones de puntos en el plano que siguen estas condiciones de crecimiento son

$$\Omega(r) = \{(\sqrt{j} \cos(2\pi r j), \sqrt{j} \sin(2\pi r j)) : j \in \mathbb{N}\},$$

para $r \in \mathbb{R}$, y quedan determinadas por el número de vueltas $|r|$ entre dos puntos consecutivos (el signo de r indica el sentido del giro). Dependiendo de r , las distribuciones $\Omega(r)$ serán o no el reflejo matemático de patrones de semillas en los capítulos de alguna especie botánica.

1.2. PROPIEDADES DE LAS DISTRIBUCIONES $\Omega(r)$

De la expresión para los puntos de las distribución $\Omega(r)$ se deducen, entre otras, las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 1. $\Omega(r + p) = \Omega(r)$, para cualquier $p \in \mathbb{Z}$.

Así pues, la parte entera de r no es relevante y en adelante se limitará el estudio a las distribuciones con valores $r \in [0, 1)$.

PROPIEDAD 2. *Las distribuciones $\Omega(r)$ y $\Omega(-r)$ son simétricas con respecto al eje horizontal que pasa por el origen.*

Si se considera que ambas distribuciones simétricas reflejan una misma arquitectura para la inflorescencia, el estudio podría reducirse a distribuciones $\Omega(r)$ tales que $r \in [0, \frac{1}{2}]$.

PROPIEDAD 3. *Los puntos de las distribuciones $\Omega(r)$ asociadas a racionales, $r \in \mathbb{Q}$, se sitúan sobre radios equiespaciados en número igual al denominador q de la fracción irreducible $\frac{p}{q}$ que representa al número racional r .*

Si $r = \frac{p}{q}$ es racional, el ángulo central entre dos puntos separados q posiciones es $2\pi p$, un número entero de vueltas, y los puntos caen sobre el mismo radio. Los $q - 1$ puntos intermedios se distribuyen sobre radios separados un ángulo equivalente a $1/q$ vueltas. En esa distribución $\Omega(r)$, hay q sectores circulares que no tienen puntos. Si se tratase de la distribución de semillas de una inflorescencia, el capítulo de la planta tendría amplias regiones en las que no se producirían semillas. Las semillas, además, se acumularían en radios, en una absurda competencia por recibir nutrientes y radiación solar para su crecimiento y maduración. Quedan descartadas, pues, como arquitecturas de inflorescencias aquellas que estuviesen representadas por una distribución $\Omega(r)$ con r racional.

Antes de continuar el estudio de las distribuciones $\Omega(r)$ con $r \notin \mathbb{Q}$ interesa introducir notación y propiedades de las fracciones continuas asociadas a los números reales.

2. FRACCIONES CONTINUAS

2.1. FRACCIONES CONTINUAS Y FRACCIONES CONGRUENTES

Cualquier número real $r \in \mathbb{R}$ puede desarrollarse en una fracción continua, finita o infinita, de la forma

$$r = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}},$$

donde $a_0, a_1, a_2, \dots$ son enteros, que llamaremos *elementos* de la fracción continua, y $a_j > 0$ para $j \geq 1$ ([1] o [5]; también [8] si se prefiere una referencia más moderna entre las muchas disponibles, aunque utiliza una nomenclatura algo distinta).

Toda fracción continua finita es un número racional, y viceversa. Toda fracción continua periódica es un número irracional cuadrático, y viceversa. La fracción continua que corresponde al número e no es finita ni periódica pero sin embargo tiene regularidad:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, \dots] = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{\ddots}}}}}}}}}}.$$

Se dice que cada uno de los números racionales $r_j = \frac{p_j}{q_j}$ ($j = 0, 1, \dots$) que se obtienen al truncar la fracción continua de r es una *fracción congruente*, o un *congruente*, del número r . Por ejemplo, los primeros congruentes de e son

$$2, \quad 2 + \frac{1}{1} = 3, \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}, \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}} = \frac{11}{4},$$

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{19}{7}, \quad 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}} = \frac{87}{32}, \quad \dots$$

2.2. APROXIMACIONES RACIONALES ÓPTIMAS

Los congruentes pares forman una sucesión creciente y los impares una decreciente,

$$r_0 < r_2 < r_4 < r_6 < \dots < r < \dots < r_5 < r_3 < r_1,$$

ambas con límite r . En el cuadro 1 se pueden ver algunos ejemplos que serán de utilidad.

r	r_0	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
$\sqrt{3} - 1$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{30}{41}$
$\sqrt[3]{2} - 1$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{6}{23}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{50}$	$\frac{59}{227}$
$e - 2$	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{23}{32}$	$\frac{28}{39}$

Cuadro 1: Algunos congruentes para $\sqrt{3} - 1$, $\sqrt[3]{2} - 1$ y $e - 2$.

Además, los congruentes pares e impares se acercan sucesivamente a r , es decir, verifican la desigualdad

$$\left| r - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| < \left| r - \frac{p_k}{q_k} \right|;$$

e incluso la desigualdad más fuerte

$$|q_{k+1}r - p_{k+1}| < |q_k r - p_k|.$$

De hecho, si $\frac{p}{q}$ es un número racional que verifica

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| < \left| r - \frac{p_k}{q_k} \right|,$$

entonces

$$q > q_k;$$

y si

$$|qr - p| < |q_k r - p_k|,$$

entonces

$$q \geq q_{k+1}.$$

Por tanto, los congruentes r_k son, en cada caso, la mejor aproximación racional de r de entre todas las fracciones con denominador menor o igual a q_k .

Los numeradores p_j y los denominadores q_j de los congruentes verifican simultáneamente la misma recurrencia con respecto a sus dos predecesores:

$$\begin{aligned}p_j &= a_j p_{j-1} + p_{j-2}, \\q_j &= a_j q_{j-1} + q_{j-2},\end{aligned}$$

para $j = 2, 3, \dots$, donde a_j es el correspondiente elemento de la fracción continua de r . En particular, cuando todos los elementos, incluidos a_0 y a_1 , son la unidad, los numeradores y denominadores de los congruentes son términos de la sucesión de Fibonacci y la fracción continua corresponde al número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

$$\phi = [1; 1, 1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}}.$$

Cuando los elementos son la unidad salvo un número finito no nulo de ellos, $a_j = 1$ para $j = k+1, k+2, \dots$ con $k \geq 2$, los numeradores y denominadores de los congruentes son términos de sucesiones diferentes a la de Fibonacci pero que siguen la misma ley recurrencia que esta a partir del término $(k+1)$ -ésimo. El cuadro 2 muestra los valores reales r y los congruentes que corresponden a diferentes a_0 , a_1 y a_2 .

r	Fracción continua	Congruentes
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$	$[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$	$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \dots$
$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$	$[0; 1, 1, 1, 1, \dots]$	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \dots$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$	$[0; 1, 2, 1, 1, \dots]$	$0, 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{8}{11}, \frac{13}{18}, \dots$
$\frac{7}{22} + \frac{\sqrt{5}}{22}$	$[0; 2, 2, 1, 1, \dots]$	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{8}{19}, \frac{13}{31}, \dots$
$\frac{15}{22} + \frac{\sqrt{5}}{22}$	$[0; 1, 3, 1, 1, \dots]$	$0, 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{18}{23}, \dots$

Cuadro 2: Los congruentes $r_0, r_1 = \frac{p_1}{q_1}, r_2 = \frac{p_2}{q_2}, \dots$ de los ejemplos que se muestran tienen denominadores q_j que siguen para $j > 2$ la misma ley de recurrencia que la sucesión de Fibonacci. Los dos primeros ejemplos corresponden al número áureo y su inverso, y los denominadores de los congruentes $q_1, q_2, \dots$ reproducen la sucesión de Fibonacci. El tercer ejemplo corresponde al número $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}$, y los denominadores reproducen la sucesión de Lucas.

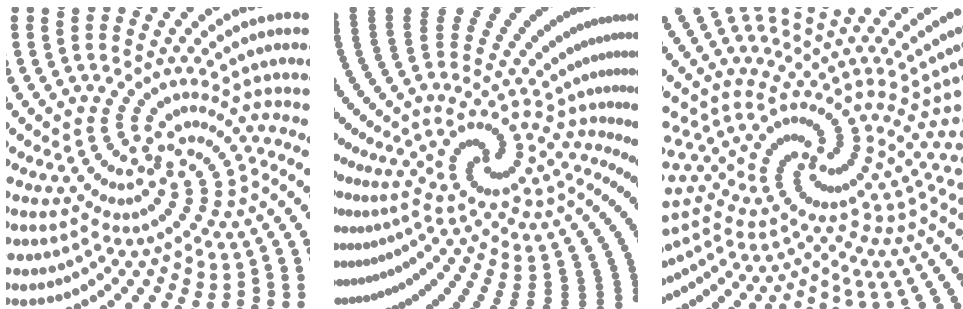


Figura 1: Distribuciones de puntos $\Omega(\sqrt{3}-1)$, $\Omega(\sqrt[3]{2}-1)$ y $\Omega(e-2)$.

3. DISTRIBUCIONES CON $r \notin \mathbb{Q}$

3.1. FAMILIAS DE ESPIRALES DEXTRÓGIRAS Y LEVÓGIRAS

En el apartado 1.2 se observó que si r es racional los puntos de $\Omega(r)$ se distribuyen sobre radios en posiciones angulares periódicas. Pero si r no lo es, los puntos se distribuyen sobre espirales (figura 1).

En efecto, si r no es racional, no existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que el producto qr sea entero. Pero, para determinados valores de q , dicho producto puede tomar un valor cercano a un entero p . En esos casos, $\frac{p}{q}$ será una aproximación racional de r . Si p/q es una aproximación por defecto de r , un punto dado de la distribución $\Omega(r)$ quedará en una posición cercana, con un radio mayor y un ángulo ligeramente menor, respecto del punto que ocupa q posiciones anteriores. Los puntos describirán familias de q ramas de espirales dextróginas. Análogamente, si p/q es una aproximación por exceso, los puntos describirán familias de q ramas espirales levóginas. Aún más, dada una aproximación por defecto que tenga una familia de q espirales dextróginas asociadas, los puntos de las ramas van quedando atrás cada q vueltas y terminan acercándose por delante al punto de la rama anterior. Es decir, a esa familia de espirales dextróginas le sigue una familia de espirales levóginas. Y viceversa, tras una familia de espirales levóginas se aprecia otra familia de giro opuesto.

En resumen, en las distribuciones $\Omega(r)$ se observan familias de espirales. Estas familias de espirales aparecen a cualquier distancia del origen, aunque en diferentes coronas predominan los trazos de una o, a lo sumo, dos familias de espirales. De hecho, al aumentar la distancia al centro cada familia dominante cede el lugar a otra de giro opuesto y mayor número de ramas (figura 2). El número de trazos de ramas espirales de cada familia coincide con los denominadores de algunas aproximaciones racionales de r .

3.2. FAMILIAS DE ESPIRALES Y CONGRUENTES

Considérese $\Omega(r)$ con $r \notin \mathbb{Q}$, que, por la propiedad 1, puede suponerse positivo y menor que uno. Supóngase además que, sobre esa distribución, a una distancia dada del centro, se observa una familia de espirales con q_k ramas. Entre un punto y

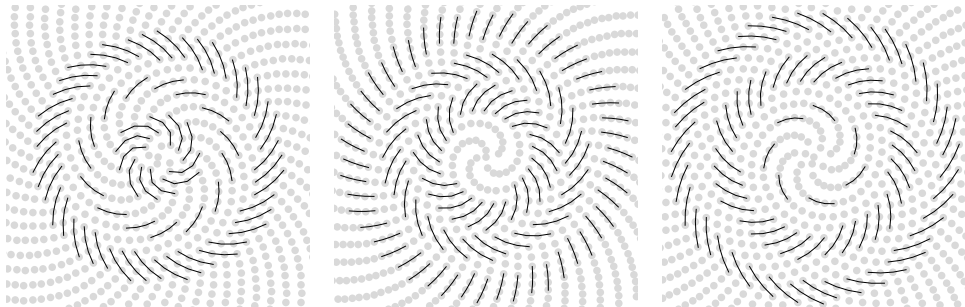


Figura 2: Algunas familias de espirales para $\Omega(\sqrt{3} - 1)$, $\Omega(\sqrt[3]{2} - 1)$ y $\Omega(e - 2)$. El número de espirales de las familias dibujadas es de 11, 15 y 41 en la primera distribución; 23, 27 y 50 en la segunda; y 7, 32 y 39 en la tercera; y coincide con los denominadores de los congruentes (cuadro 1).

el siguiente de cada espiral de esa familia hay $q_k r$ vueltas. Sea p_k la aproximación entera de ese número de vueltas. El cociente $\frac{p_k}{q_k}$ es una aproximación racional de r y el error cometido cuando se aproxima r como $\frac{p_k}{q_k}$ es

$$\left| r - \frac{p_k}{q_k} \right|.$$

Sea ahora p_{k+1}/q_{k+1} la aproximación con denominador $q_{k+1} > q_k$ que corresponde a la siguiente familia de espirales. Esta aproximación, más fina, queda fijada por el hecho de que su denominador sea el menor valor q_{k+1} que cumple que la diferencia de vueltas entre $q_{k+1}r$ y su aproximación entera p_{k+1} sea inferior a la que había entre $q_k r$ y p_k . De esta manera, sobre la distribución de puntos se percibirá una nueva familia de trazos espirales. Se verifica, pues, que

$$|q_{k+1}r - p_{k+1}| < |q_k r - p_k|.$$

Como se ha visto en el apartado 2.2, esta condición caracteriza a las aproximaciones racionales que provienen de truncar la fracción continua que representa al número real r .

Obsérvese que, como los congruentes sucesivos son aproximaciones uno por defecto y otro por exceso de r , las familias de espirales consecutivas tendrán giros opuestos.

PROPIEDAD 4. *Los puntos de las distribuciones asociadas a irracionales $\Omega(r)$, $r \notin \mathbb{Q}$, dibujan ramas de espirales de giros levógiros o dextrógiros alternadamente y que coinciden en número con los denominadores de las fracciones congruentes sucesivas de r .*

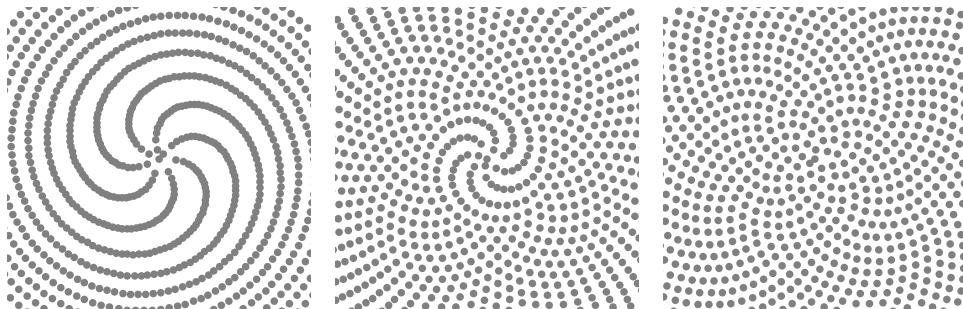


Figura 3: Distribuciones $\Omega(\pi - 3)$, $\Omega(e - 2)$ y $\Omega(\phi - 1)$. Las fracciones continuas para los tres valores son $\pi - 3 = [0; 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$, $e - 2 = [0; 1, 2, 1, 1, 4, \dots]$ y $\phi - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0; 1, 1, 1, 1, 1, \dots]$. En las dos primeras se aprecian regiones en las que predomina un única familia de espirales. En la tercera pares de familias de espirales se entrelazan con continuidad.

4. ARQUITECTURAS DEL CAPÍTULO FLORAL: FIBONACCI Y OTRAS SUCESIONES

En los apartados anteriores se ha visto que las semillas en los capítulos de las especies botánicas forman distribuciones como las de puntos $\Omega(r)$ definidas con valores r irracionales que pueden elegirse en el intervalo $(0, 1)$. En esas distribuciones se aprecian regiones de familias de espirales que alternan el giro, levógiro o dextrógiro, de igual manera que los congruentes de r alternan aproximaciones por defecto o exceso. En la figura 3 se puede observar que, dependiendo del valor de r , en algunas coronas circulares los puntos de la distribución parecen dibujar una familia única de espirales de igual giro, mientras en otras regiones se observan dos familias diferentes de espirales con giros opuestos que se entrelazan.

En las regiones en las que se aprecia una familia única, las espirales dibujan accesos al interior de la distribución. Si estas distribuciones correspondieran a distribuciones de semillas de una inflorescencia, las semillas del capítulo quedarían más expuestas a agresiones externas que aquellas donde no se traza un camino hacia el interior del capítulo. La selección natural favorecerá a las especies cuyas familias de espirales estén, en todas las regiones, entrelazadas, porque esta distribución dificulta el acceso al capítulo floral y las semillas están más protegidas.

Sea $(\sqrt{n} \cos(2\pi rn), \sqrt{n} \sin(2\pi rn))$ un punto, para n dado, de la distribución $\Omega(r)$ con $r \in (0, 1)$ irracional. Por ese punto se pueden trazar espirales de todas las familias de espirales dadas para r , en particular la familia con q_k ramas. Entre el punto n de una de esas ramas y el siguiente de la misma rama $n + q_k$ hay una distancia angular de $2\pi r q_k \sim 2\pi p_k$. Sin embargo, como $q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$, de los $q_k - 1$ puntos intermedios de la distribución habrá exactamente a_k puntos, en las posiciones $n + q_{k-1}, n + 2q_{k-1}, n + 3q_{k-1}, \dots, n + a_k q_{k-1}$, sobre la rama de la familia de q_{k-1} espirales que pasa por n . Si el valor del elemento a_k es diferente de uno, la rama espiral asociada a la familia q_{k-1} tendrá dos o más puntos frente al

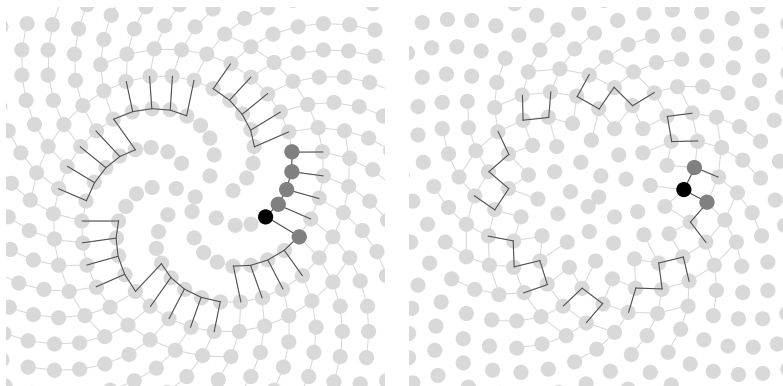


Figura 4: Se muestran las distribuciones $\Omega(e-2)$ y $\Omega(\phi-1)$. Sobre ellas están marcados un punto, en negro, que ocupa la posición $n = 25$ en la primera distribución y $n = 34$ en la segunda, y otros, en gris, que corresponden a tramos de dos familias de espirales consecutivas, de 7 y $32 = 4 \cdot 7 + 4$ ramas en el primer ejemplo y de 13 y $21 = 1 \cdot 13 + 8$ ramas en el segundo.

único que corresponde, en esa región, a cada rama de la familia siguiente, y se verá como trazo dominante hasta que se acerque a un arco de circunferencia y se aprecien las ramas de la siguiente familia. Sin embargo, cuando el elemento a_k es igual a uno, entre un punto y el siguiente de la familia de q_k espirales hay una única posición intermedia en la familia de $q_k - 1$ ramas. Como se puede ver en la figura 4, solo se apreciarán dos familias entrelazadas con giros opuestos en este último supuesto.

Una distribución $\Omega(r)$ repetirá el patrón de espirales cruzadas en todas las regiones si sus elementos son la unidad salvo a_0 , que sin pérdida de generalidad puede tomarse igual a 0 (propiedad 1), y quizá a_1 y a_2 , porque en el centro del capítulo se desdibuja la estructura de espirales. Equivalentemente, si los denominadores de los congruentes (salvo quizá los dos primeros) siguen la misma ley de recurrencia que Fibonacci, en las regiones del capítulo se observarán familias de espirales entrelazadas. En el caso concreto en que todos los elementos, incluidos los primeros (salvo a_0), sean la unidad, las familias de espirales tendrán ramas en número igual a los términos de la sucesión de Fibonacci. En el resto de los casos, es decir, si algunos de los primeros elementos a_1 , a_2 no son la unidad, el número de ramas de las diferentes familias seguirán la ley de recurrencia de Fibonacci aunque la sucesión resultante será diferente a la de Fibonacci (figura 5). En todos los casos descritos, y porque

$$\phi^{-1} = \phi - 1 = [0; 1, 1, 1, \dots] = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5},$$

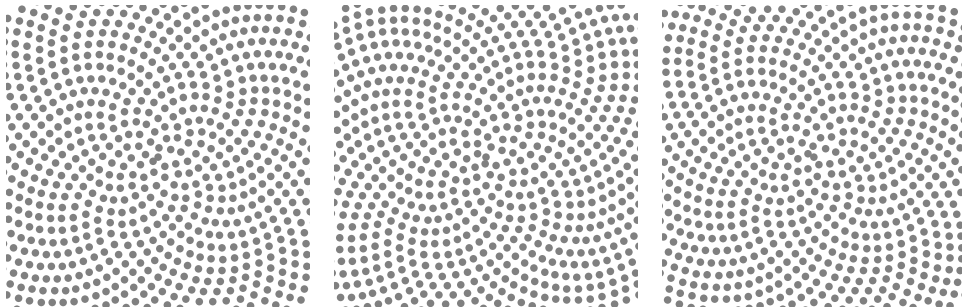


Figura 5: Distribuciones $\Omega(\phi - 1)$, $\Omega(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})$ y $\Omega(\frac{7}{22} + \frac{\sqrt{5}}{22})$ cuyas familias de espirales corresponden a las sucesiones de Fibonacci, de Lucas y Anómala. En todas ellas las diferentes familias de espirales se cruzan y todas representan arquitecturas que se observan en la Naturaleza. El ángulo de giro entre dos puntos consecutivos es, respectivamente, 222° , 260° y 151° . En los dos primeros casos, restringiendo el valor de r al intervalo $(0, 1/2)$ (lo que puede hacerse sin pérdida de generalidad por la propiedad 2) se conseguirían ángulos menores que el llano.

se tiene que el valor real r que determina las distribuciones matemáticas $\Omega(r)$ puede expresarse como

$$r = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] = 0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k + \phi - 1}}}} = a + b\sqrt{5},$$

para determinados valores racionales de a y b .

En conclusión, entre las respuestas evolutivas para las arquitecturas de los capítulos de las inflorescencias se encuentran la distribución $\Omega(\phi - 1)$ [7] y otras $\Omega(r)$ con $r = a + b\sqrt{5}$ para determinados racionales a y b (como los que aparecen en el cuadro 2) cuyas familias de espirales tienen números de ramas que forman sucesiones diferentes a la de Fibonacci. Algunas de ellas se muestran en la figura 6.

5. RESPUESTA EVOLUTIVA DE LAS ESPECIES

Para reproducir matemáticamente las arquitecturas de las inflorescencias que se observan en la Naturaleza mediante las distribuciones de puntos $\Omega(r)$ se han supuesto solo dos argumentos evolutivos que podrían haber servido para seleccionar las especies mejor adaptadas. El primero es que no queden regiones yermas, sin semillas, en el capítulo floral. Como se ha señalado en el apartado 1.2, eso limita las distribuciones de puntos teóricas, $\Omega(r)$, a aquellas en las que r es irracional. El segundo argumento es que las distribuciones de las semillas dificulten el acceso de agentes externos al interior del capítulo. En el apartado 4 se ha mostrado que este

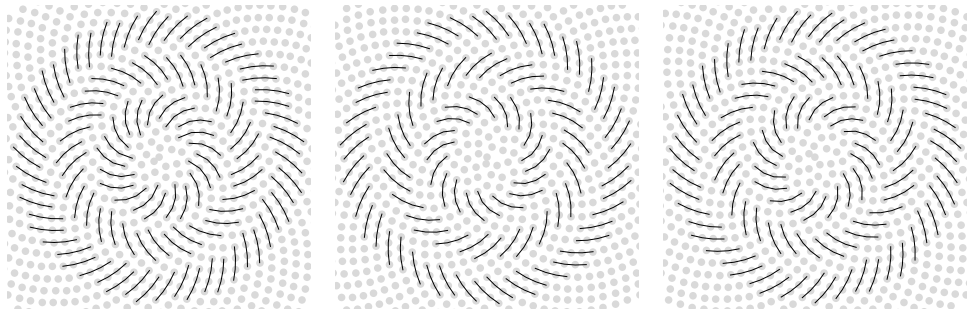


Figura 6: Algunas familias de espirales para $\Omega(\phi - 1)$, $\Omega(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10})$ y $\Omega(\frac{7}{22} + \frac{\sqrt{5}}{22})$. El número de espirales de las familias dibujadas es de 21, 34 y 55 en la primera distribución; 18, 29 y 47 en la segunda; y 19, 31 y 50 en la tercera; y coincide con los denominadores de los congruentes (cuadro 2).

argumento limita los valores irracionales de r a $a + b\sqrt{5}$ para determinados valores racionales a y b .

Con estas restricciones, las distribuciones teóricas que se utilizan para estudiar las distribuciones reales de las semillas en la inflorescencia se reducen a aquellas en las que los puntos dibujan familias de espirales entrelazadas con número de ramas que siguen la ley de recurrencia de la sucesión de Fibonacci.

Pero las restricciones utilizadas no cierran la posibilidad a sucesiones diferentes de Fibonacci, generadas con la misma recurrencia, aunque partiendo de diferentes primeros términos (cuadro 2). Y la Naturaleza tampoco cierra esa opción. En el cuadro 3 se resumen las observaciones que T. Fujita [3] realizó en 1938 sobre la frecuencia de diferentes patrones de inflorescencias y filotaxia de 670 especies botánicas angiospermas, con capítulo floral, y gimnospermas (véase también [4]). Se observa que, aunque Fibonacci corresponde a la arquitectura más frecuente, no es la única respuesta.

Patrón filotáctico	Secuencia de espirales	Frecuencia
Fibonacci	1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .	626
Doble Fibonacci	2, 4, 6, 10, 16, 26, . . .	13
Lucas	1, 3, 4, 7, 11, 18, . . .	5
Anómalo	2, 5, 7, 12, 19, 31, . . .	1
Segundo complemento	1, 4, 5, 9, 14, 23, . . .	1
Otros	1, ℓ , $\ell + 1$, . . . ($5 \leq \ell \leq 18$)	24

Cuadro 3: Observaciones de T. Fujita en 1938 [3] sobre la frecuencia de patrones de espirales en las semillas de 670 especies botánicas. Todos los patrones corresponden a sucesiones con la misma ley de recurrencia que la de Fibonacci, pero con distintos valores iniciales.

REFERENCIAS

- [1] N. M. BESKIN, *Fracciones maravillosas*, Lecciones populares de Matemáticas, Editorial Mir, Moscú, 1987.
- [2] H. S. M. COXETER, *Fundamentos de Geometría*, Editorial Limusa, México, 1971.
- [3] T. FUJITA, Statistische Untersuchung über die Zahl der konjugierten Parastichen bei den schraubigen Organstellungen, *The Botanical Magazine* **52** (1938), no. 630, 425–433.
- [4] R. V. JEAN, *Phyllotaxis: A Systemic Study in Plant Morphogenesis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [5] I. NIVEN Y H. S. ZUCKERMAN, *Introducción a la Teoría de Números*, Editorial Limusa, México, 1976.
- [6] P. PRUSINKIEWICZ Y A. LINDENMAYER, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, Nueva York, 1990.
- [7] P. D. SHIPMAN Y A. C. NEWELL, Phyllotactic patterns on plants, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004), no. 16, 168102.
- [8] J. L. VARONA, *Recorridos por la Teoría de Números*, 2.^a ed., Electolibris, 2019.

CARMEN CASARES ANTÓN, IES JUAN DE LA CIERVA, CALLE DE LA CAOBA 1, 28005 MADRID
Correo electrónico: ccasaresanton@educa.madrid.org