

La catenaria y su influencia en la arquitectura de Gaudí

por

Alejandro Fernández Jiménez

RESUMEN. La catenaria es una de las curvas con propiedades más interesantes. Nuestro objetivo con este trabajo es definirla de forma matemático-física y estudiar alguna de sus propiedades más importantes, así como mostrar algunos de los usos más relevantes que se le han dado a lo largo de la historia, centrándonos sobre todo en las originales aplicaciones que le dio Antonio Gaudí.

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo nos proponemos estudiar un tipo de curva muy particular, la catenaria. Comenzaremos presentando esta curva desde un punto de vista matemático-físico y, tras ello, analizaremos su importancia en la arquitectura y cómo explotó Gaudí sus propiedades en algunas de sus construcciones. El arquitecto catalán fue el gran responsable de popularizar el empleo de las catenarias en los edificios occidentales, donde eran elementos prácticamente anecdóticos hasta el siglo XIX.

Antes de definir este tipo de curvas, y dado que la finalidad última de este trabajo es estudiar los distintos usos arquitectónicos que se han dado a la catenaria, conviene mostrar cómo se manifiesta en la naturaleza para intentar explicar de dónde viene la inspiración para utilizarla en el diseño de edificios.

Supongamos un elemento lineal con masa equidistribuida a lo largo de su longitud (por ejemplo cuerdas, cables o cadenas), y sostengamos dicho elemento lineal solo por sus dos extremos. Como cualquier otro cuerpo, al verse sometido a la fuerza de la gravedad este adopta la forma de una curva concreta. En la literatura científica esta curva se ha denominado catenaria, nombre proveniente del latín *catena* (cadena).

El análisis de la forma y propiedades de la *catena* ha sido desarrollado a lo largo de varios siglos. Durante el Renacimiento, varios ilustres científicos se dedicaron a estudiar el problema de la catenaria e intentaron describir cuál era la silueta de esta curva. Una prueba de su dificultad es que incluso uno de los científicos más reputados de la época, Galileo Galilei, se equivocó al afirmar que la cadena colgante adquiriría la forma de una parábola, publicando este resultado en su último libro *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* [5]. Es justo aclarar que Galileo hizo esta afirmación en 1638, cuando ya contaba con 74 años, y simplemente se limitó a aceptar aquello que era comúnmente admitido en la comunidad científica, sin hacer justificaciones rigurosas. Además, al ver una cuerda sujeta por sus dos extremos la intuición parece engañarnos y, efectivamente, esta se asemeja bastante a la forma de una parábola.

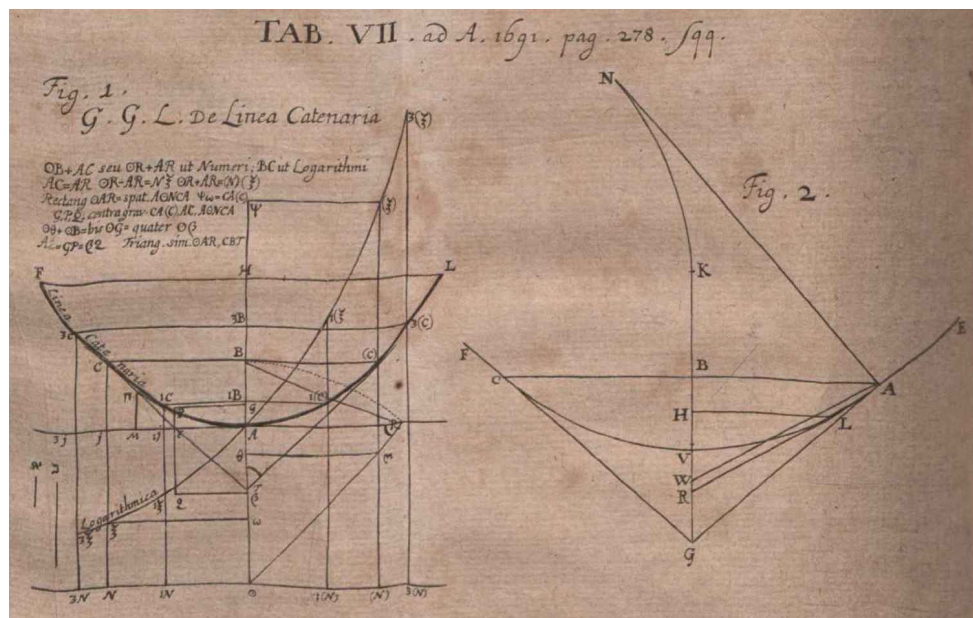


Figura 1: Imágenes que acompañan a la solución de Leibniz en *Acta Eruditorum* (1691).

Si hemos recurrido al matiz «se asemeja» es porque, en el año 1691, Johann Bernoulli, Gottfried Leibniz y Christiaan Huygens resolvieron el problema de forma simultánea e independiente tras haber sido propuesto como reto un año antes por Jakob Bernoulli en la revista *Acta Eruditorum* (véase la figura 1). Obtuvieron una expresión analítica que servía para describir geométricamente a la catenaria y publicaron sus soluciones en esa misma revista. Como dato curioso, el interés de Johann Bernoulli por este problema surgió después de una disputa con su hermano mayor Jakob, que había dedicado varios años y muchos esfuerzos a intentar demostrar que era una parábola. Johann, presuntamente con la única intención de mofarse, demostró en una noche que la catenaria no se correspondía con una parábola [7].

Estudiar la catenaria no es solo importante por su destacado papel a lo largo de la historia; también lo es por sus excelentes propiedades físicas que pueden ser de gran ayuda en el ámbito de la arquitectura. Pues, al ser una curva que se comba bajo su propio peso, tiene la característica de ser el lugar geométrico de los puntos donde las tensiones horizontales del cable se compensan, careciendo por ello de tensiones laterales, por lo que la cadena permanece inmóvil sin desplazarse hacia los lados. Las fuerzas que actúan son una fuerza vertical, la de la gravedad, y una tensión tangente a la cadena en cada punto, gracias a la cual se mantiene estirada. Es esta propiedad la que va a justificar nuestro interés por conocer lo mejor posible a la catenaria, y todas las enumeradas al comienzo de esta sección explican su recurrencia en tantas construcciones; pensemos, por ejemplo, en un puente colgante (véase la figura 2).



Figura 2: El puente de Manhattan, en Nueva York (fotografía de David Torres).

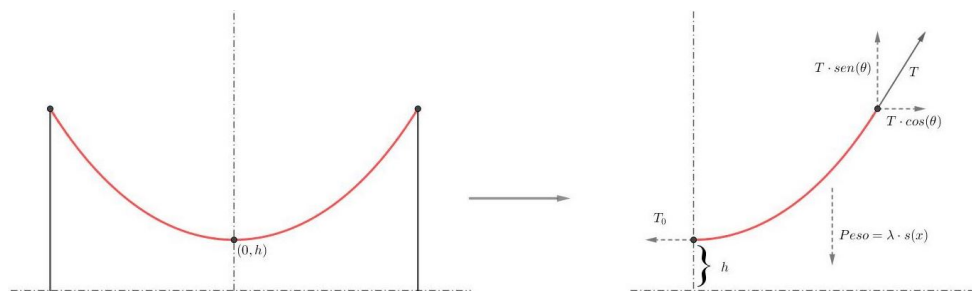


Figura 3: Esquema de fuerzas de la curva de la catenaria.

2. LA ECUACIÓN DE LA CATENARIA

Considérese una cuerda ideal perfectamente flexible e indeformable, con masa distribuida de manera uniforme a lo largo de su longitud, suspendida en el aire por sus extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad. Consideremos solo una parte de la cuerda, el tramo desde el punto $A = (0, h)$, el vértice de la cadena colgante que se define como el punto de la cuerda más próximo al suelo, hasta B , un punto (variable) a la derecha A con abscisa x . Este trozo de la cuerda tiene longitud $s(x)$ y sobre él actúan varias fuerzas.

Apoyándonos en el esquema de fuerzas (véase la figura 3) podemos plantear varias ecuaciones que nos permitan obtener una expresión analítica para la catenaria. Tomemos los siguientes datos:

- T la fuerza tensorial que afecta a la cuerda en el punto B ;
- T_0 la fuerza tensorial que afecta a la cuerda en el punto A ;
- θ el ángulo formado por la fuerza T y la horizontal;
- λ la densidad lineal de la catenaria;

- $h = \frac{T_0}{\lambda}$, para lo que basta con ajustar la coordenada vertical.

Como ya hemos explicado antes, tanto en el eje horizontal como en el vertical mantenemos un equilibrio de las fuerzas. Se extraen las siguientes ecuaciones:

$$\sum F_x = T \cos(\theta) - T_0 = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_y = T \sin(\theta) - \lambda \cdot s(x) = 0. \quad (2)$$

A partir de las igualdades (1) y (2), podemos deducir las ecuaciones que gobiernan a la catenaria:

$$\begin{aligned} T \cdot \cos(\theta) &= T_0, \\ T \cdot \sin(\theta) &= \lambda \cdot s(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Aprovechamos que la pendiente puede expresarse como $\frac{dy}{dx}$ y como la tangente del ángulo θ . Esta relación, junto a (3), nos permite obtener la siguiente igualdad:

$$\frac{dy}{dx} = \tan(\theta) = \frac{\lambda \cdot s(x)}{T_0}. \quad (4)$$

Por otra parte, sabemos que s , la longitud de arco, satisface la igualdad

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (5)$$

Entonces, derivando $s(x)$ con respecto al parámetro x tanto en (4) como en (5), deducimos la expresión

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{T_0}{\lambda} \cdot \frac{d^2y}{dx^2},$$

y por tanto tenemos que resolver

$$\begin{cases} y''(x) = \frac{\lambda}{T_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = h. \end{cases}$$

Finalmente podemos concluir que la ecuación de la catenaria con nuestras condiciones iniciales es

$$y = \frac{T_0}{\lambda} \cdot \cosh\left(\frac{\lambda}{T_0} \cdot x\right) - \frac{T_0}{\lambda} + h.$$

Tomando la constante $a = \frac{T_0}{\lambda}$, y como hemos puesto $h = \frac{T_0}{\lambda} = a$, podemos sustituir esta fórmula por

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Al comienzo de este texto hemos hablado de los quebraderos de cabeza que provocó el intento de demostrar la identificación de la catenaria con la parábola por parte de varios matemáticos. Ahora, al haber encontrado una expresión analítica, esta comparación es más sencilla y, una vez obtenida una fórmula explícita para la catenaria, es interesante preguntarse cómo de grande era el error de aquellos que veían esta curva como una parábola, y si resulta razonable confundirlas.

Galileo no desatinó demasiado al identificar a la catenaria con la parábola, ya que, desarrollando $\cosh(x)$ en serie de Taylor,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$

comprobamos que la ecuación de la catenaria se corresponde con la de una parábola más un término de cuarto orden. Por ello, cerca del origen, ambas ecuaciones serán muy parecidas.

La principal diferencia que podemos encontrar entre ambas curvas corresponde a sus tangentes. La tangente a la catenaria tiende a la dirección vertical mucho más rápidamente que la de la parábola. De hecho, el valor de las derivadas de todos los órdenes de $\cosh(x)$ tiende a infinito cuando $x \rightarrow \infty$. Esta curiosa característica debería haber hecho prevalecer a los arcos catenarios frente a los parabólicos en el ambiente arquitectónico. Aparentemente, la facilidad para dibujar parábolas frente a las catenarias provocó que el empleo de estas últimas fuese bastante reducido hasta el siglo XIX. No obstante, prescindiendo de sus propiedades físicas, durante muchos años curvas como las catenarias, parábolas u otros arcos antifuniculares (todos ellos muy estables) se consideraron de aspecto poco elegante y, por ello, no fueron usadas en la arquitectura clásica [4].

Para concluir con esta sección es curioso reseñar una característica muy particular que une a la parábola con la catenaria. Si hiciésemos rotar una parábola apoyada sobre el eje de abscisas su foco dibujaría una «cadena colgante».

3. VARIACIONES DEL PROBLEMA DE LA CATENARIA

En ocasiones, el peso que deforma la silueta no es exclusivamente el de la propia cuerda, sino que puede deberse a cuerpos externos que cuelgan de ella. Este sería el caso de un puente colgante, para el cual el peso de la cuerda (el cable en este caso), y el de las «barras» que la unen al tablero, es despreciable en comparación con el peso del propio tablero. Sin lugar a dudas, para entender ciertas construcciones resulta imprescindible calcular la forma que adoptará la cuerda que sirve de sostén a la estructura. El primer objetivo de esta sección será obtener una fórmula explícita para el problema del puente colgante.

Supongamos que el tablero posee una densidad homogénea y sea λ su peso por unidad de longitud. Definimos nuestro sistema de coordenadas de tal forma que el punto $(0, h)$ sea el punto más bajo de la curva, de manera que h será la distancia desde el tablero hasta este punto más bajo. Debido a que la densidad longitudinal del tablero sostenido por la cuerda es homogénea, sabemos cuál será el peso al que

se someterá un segmento cualquiera de la cuerda. Sea (x, y) un punto general por el que pasa la cuerda (podemos suponer sin pérdida de generalidad, por la simetría del problema, $x > 0$). Definimos, para dicho punto, el parámetro

$$P(x, y) = \lambda \cdot x,$$

que representa el peso que debe soportar la sección de cuerda entre $(0, h)$ y (x, y) , valor que solo depende de la longitud x del segmento de tablero situado justo debajo de esta fracción de cuerda.

Por la segunda ley de Newton deducimos las ecuaciones

$$\begin{cases} T \cdot \text{sen}(\theta) = P(x, y), \\ T \cdot \text{cos}(\theta) = T_0, \end{cases}$$

extrayendo así la relación clave para resolver este problema:

$$\tan(\theta) = y'(x) = \frac{1}{T_0} \cdot P(x, y).$$

Ya tenemos planteada una ecuación diferencial y solo queda dar la condición inicial:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\lambda}{T_0} x, \\ y(0) = h. \end{cases}$$

La solución a este sistema es

$$y(x) = \frac{\lambda}{T_0} \frac{x^2}{2} + h.$$

En el caso del puente colgante es interesante observar que la ecuación de la curva obtenida sí que ha resultado ser una parábola, a diferencia del problema que hemos tratado en la sección anterior.

Otra situación en la que tenemos una ligera variación del problema de la catenaria es la de la cuerda con una cortina colgando hasta llegar a ras de suelo. Situación que, desde luego, no tiene tanto interés como el ejemplo anterior en el que estudiábamos el puente colgante, pero que también tiene su utilidad.

Supongamos una cortina de densidad uniforme; tal y como hacíamos para el caso del puente colgante vamos a definir nuestro sistema de coordenadas de tal forma que el punto $(0, h)$ sea el lugar geométrico de la cadena que se encuentra a menor distancia del suelo, con h la longitud vertical de la cortina en ese punto de mínimo. En este caso el parámetro peso P que asociamos a cualquier punto (x, y) se puede identificar con el área bajo el arco de curva entre sus puntos $(0, h)$ y (x, y) multiplicada por una constante peso λ que dependerá del material utilizado (de nuevo, sin pérdida de generalidad gracias a la simetría del problema, asumimos $x > 0$):

$$P(x, y) = \lambda \int_0^x y(s) ds.$$

Siguiendo la misma metodología de trabajo, por la segunda ley de Newton existe un equilibrio de fuerzas:

$$\begin{cases} T \cdot \sin(\theta) = P(x, y), \\ T \cdot \cos(\theta) = T_0. \end{cases}$$

Tal y como hemos deducido en anteriores ocasiones,

$$\tan(\theta) = y'(x) = \frac{1}{T_0} \cdot P(x, y),$$

teniendo así todos los datos necesarios para resolver la ecuación correspondiente a la cadena con cortina:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{\lambda}{T_0} \int_0^x y(s) ds, \\ y'(0) = 0, \\ y(0) = h. \end{cases}$$

La solución es, entonces,

$$y(x) = h \cdot \cosh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{T_0}} x \right).$$

4. EXPLICACIÓN GEOMÉTRICA DE LA ESTABILIDAD DE LA CATENARIA

En las secciones anteriores hemos encontrado un modelo con el que podemos deducir la expresión explícita de la catenaria recurriendo a ideas básicas de física. Con él, ya hemos explicado por qué la cuerda colgante se expresa como

$$a \cdot \cosh \left(\frac{x}{a} \right).$$

Esto se ha conseguido dando un pequeño rodeo aprovechando la segunda ley de Newton.

Si tuviésemos que modificar ligeramente la distribución de pesos que debe soportar nuestro arco los cálculos, siguiendo esta metodología, se complicarían demasiado. No obstante, podemos operar de forma mucho más directa, comprobar así que este es el arco más estable posible y obtener expresiones para arcos que pretenden repartir el peso de otra forma. Por ello, comenzaremos esta sección hablando de un concepto arquitectónico conocido como formas funiculares, que, además de servir para justificar de nuevo la forma de la catenaria, nos permitirá extraer un gran abanico de arcos pensados para cumplir funciones similares a las de la catenaria, pero con pequeñas modificaciones.

Consideremos un sistema de varias masas concentradas unidas por un hilo de longitud L y peso despreciable (véase la figura 4). Este hilo adoptará una forma u otra dependiendo de la distribución de las masas, el valor de cada una de ellas y el

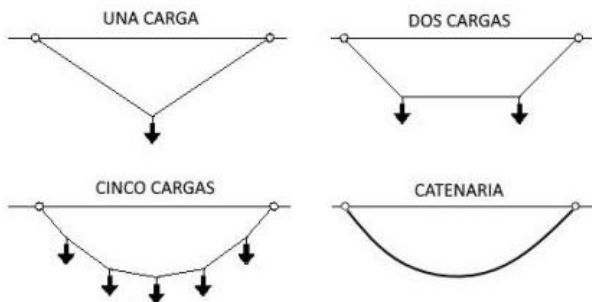


Figura 4: Aproximación de la curva catenaria a través de formas funiculares (Manuel Cañete, todas las imágenes atribuidas a este autor están en [2]).

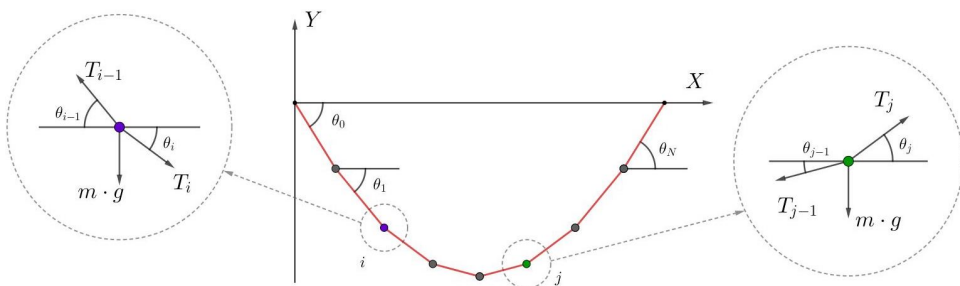


Figura 5: Esquema de fuerzas actuando en cada masa puntual.

número de estas. A medida que aumentamos el número de cargas, la forma funicular tiende a aproximarse a la curva catenaria, pues esta última es el caso límite (la idea intuitiva de aplicar una misma carga vertical en cada punto del hilo). Las curvas funiculares son el caso discreto de la catenaria.

Supongamos N masas iguales m , concentradas y equidistribuidas. La curva de equilibrio obtenida puede definirse gracias al ángulo θ_i , $0 \leq i \leq N$, que forma cada segmento de la curva con la horizontal (véase la figura 5).

Vamos a suponer que estamos ante el caso particular (y más habitual) en el que ambos extremos del cable se sitúan a la misma altura. Situamos el origen de coordenadas en el extremo izquierdo de la curva, orientamos las horizontales en el sentido positivo de las x y medimos los ángulos yendo de la curva horizontal. Definimos

$$I = \begin{cases} \frac{N+1}{2} & \text{si } N \text{ es impar,} \\ \frac{N}{2} + 1 & \text{si } N \text{ es par} \end{cases}$$

(I es el índice en el que empieza «el lado derecho de la curva»). Lo que nos interesa es observar que

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_i < \pi/2 & \text{si } 0 \leq i < I, \\ -\pi/2 < \theta_i < 0 & \text{si } I \leq i \leq N. \end{cases}$$

Señalemos también que, por simetría, $\theta_{N-i} = -\theta_i$ (y que, para N par, $\theta_{N/2} = 0$).

En cada punto i , $1 \leq i \leq N$, actúan las fuerzas de tracción que ejercen los dos tramos del hilo más la fuerza peso debida a la masa puntual m que estamos estudiando. Por la segunda ley de Newton, y teniendo en cuenta que en los puntos del lado derecho $\sin \theta_i < 0$, se tiene

$$\begin{cases} T_{i-1} \cos \theta_{i-1} = T_i \cos \theta_i, \\ T_{i-1} \sin \theta_{i-1} - T_i \sin \theta_i = mg. \end{cases}$$

Observamos que en todas las componentes la tensión horizontal es la misma. Llamando T_x a este número,

$$T_x = T_i \cos \theta_i. \quad (6)$$

De la ecuación en el eje y concluimos que

$$\frac{T_i \sin \theta_i}{T_x} - \frac{T_{i+1} \sin \theta_{i+1}}{T_x} = \frac{mg}{T_x}. \quad (7)$$

Aprovechando las expresiones (6) y (7), encontramos una relación para los ángulos θ_i y θ_{i+1} , obteniéndose

$$\tan \theta_{i+1} = \tan \theta_i - \frac{mg}{T_x}. \quad (8)$$

Por comodidad definimos $\gamma = \frac{mg}{T_x}$ como el cociente entre el peso de cada elemento y la componente horizontal de la tensión. Iterando la relación de recurrencia de la ecuación (8) llegamos a

$$\tan \theta_N = \tan \theta_0 - N\gamma.$$

Como ya hemos indicado, por simetría sabemos que $\tan \theta_N = -\tan \theta_0$, interesante propiedad que nos permite escribir

$$\tan \theta_0 = \frac{N\gamma}{2},$$

y, más en general,

$$\tan \theta_i = \tan \theta_0 - i\gamma = \frac{(N - 2i)\gamma}{2}. \quad (9)$$

Gracias a (9) podemos determinar una expresión explícita para los $N + 1$ ángulos:

$$\theta_i = \arctan \left(\frac{(N - 2i)\gamma}{2} \right), \quad i = 0, \dots, N.$$

Finalmente, las coordenadas del punto i -ésimo (x_i, y_i) se obtienen sumando para $j = 0, \dots, i - 1$ las proyecciones (orientadas) sobre el eje x , $d \cdot \cos \theta_j$, y sobre el eje y , $-d \cdot \sin \theta_j$, donde $d = L/(N + 1)$ es la distancia entre dos elementos consecutivos (recordemos que L denota la longitud de la curva). Así obtenemos, finalmente,

$$x_i = \frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{i-1} \cos \theta_j, \quad y_i = \frac{L}{N + 1} \sum_{j=0}^{i-1} \sin \theta_j.$$

Para concluir, hemos de hacernos la siguiente pregunta: ¿cuál es la relación que guarda la catenaria con el diseño de los arcos? Consideremos un arco que toma la geometría de una catenaria invertida, con lo que este arco se encontrará sometido únicamente a la fuerza de compresión. Análogamente a lo que ocurre con la cadena colgante, la cual distribuye de manera homogénea su peso, el arco que adopta la forma de una catenaria invertida reparte la compresión del peso que soporta de forma totalmente homogénea a lo largo de su estructura. Por ello, esta forma es ideal para el arco sometido únicamente a su propio peso, ya que no necesitaremos de elementos externos cuyo único fin sea el de reforzar la estructura. Además, si la masa no está equidistribuida, siguiendo el método de funiculares que acabamos de obtener e invirtiendo la curva (esto recibe el nombre de antifuniculares) podemos variar ligeramente el arco para que se siga distribuyendo de forma óptima el peso.

El último elemento clave que debemos estudiar para comprender la importancia de este tipo de arcos es el de su estabilidad. Para hacerlo hemos de definir un nuevo concepto que en la literatura en castellano suele recibir el nombre de *línea de empujes* del arco. Este nombre hace referencia a la trayectoria que siguen los empujes en el interior del arco hasta llegar a los apoyos. La primera definición rigurosa de este concepto¹ fue dada por Moseley en 1835 en el artículo [15], donde la llamaba *line of resistance*. Esta es la explicación de Moseley tal y como la presenta Santiago Huerta en [10] (véase la figura 6 para una mejor comprensión de la cita):

«Sea un macizo de fábrica MNLK, compuesto por un apilamiento de piedras recibidas sin mortero y de cualquier forma. Consideremos ahora un plano que corta a la estructura y llamemos A a la resultante (empuje) de todas las fuerzas situadas por encima de dicho plano (A' y A'' en este caso). Supongamos que esta superficie de corte cambia de forma y posición de manera que coincida con todas las superficies de contacto $3b4$, $5c6$, $7d8$,... de los sólidos que componen la estructura, y sean B , C , D , E ,... las resultantes, obtenidas en forma análoga a la de A , correspondientes a los distintos planos de intersección. Para cada una de las superficies consideradas la resultante tendrá un punto de aplicación que deberá estar situado dentro de la masa de la estructura. Llamaremos a este punto *centro de empuje* de los puntos a , b , c , d ,...»

Tomemos la estructura seccionada por una infinidad de planos (que se corresponden con las normales de una determinada curva) y consideremos las intersecciones de cada una de las resultantes con su plano, es decir, los centros de empujes correspondientes a cada uno de los planos. El lugar geométrico de estos puntos es lo que definimos como *línea de empujes*.

Interpretando la definición de Moseley, y tal y como ya hemos comentado anteriormente, la línea de empujes de un arco se refiere a la trayectoria que siguen los empujes en su interior hasta llegar a los apoyos. Por ello, se asemeja mucho a la forma invertida de un cable que soporta pesos (el antifuncular). Esto implica que la

¹Si se desea profundizar más en el desarrollo matemático de las líneas de empuje, se recomienda consultar [10], [8] y [15]. Si se busca un enfoque más formal, se puede encontrar en [14].

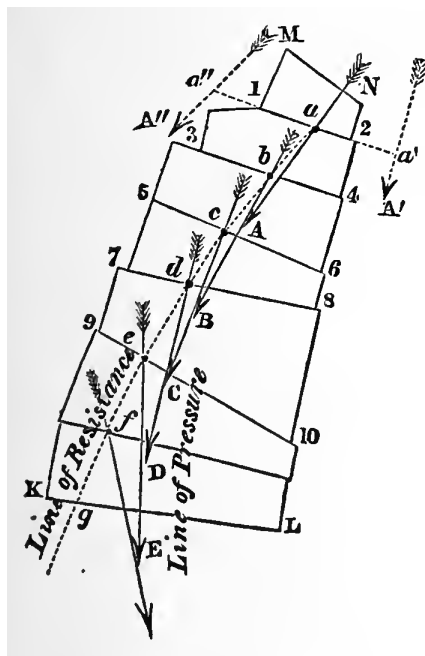


Figura 6: Líneas de empuje en un macizo de fábrica. La línea de empujes (línea de puntos) es el lugar geométrico del punto de paso de la resultante por un sistema de planos de corte dados. Estos planos de sección pueden corresponderse a juntas reales o imaginarias. Moseley denominó línea de resistencias a dicha curva y línea de presiones a su envolvente, la cual define la dirección de los empujes. (Ilustración tomada de [16].)

condición geométrica de estabilidad de un arco de fábrica es que la línea de empujes esté contenida en su interior.

Este principio ya fue intuido por Hooke (hacia 1670), que escribía: «Del mismo modo que cuelga un hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido». Gregory, algunos años después (en 1698), mejoraba este enunciado afirmando: «Solo la catenaria [invertida] es la forma correcta de un arco. Y si arcos de otras formas se sostienen es porque en su espesor hay contenida una catenaria» [9]. Esta última afirmación de Gregory es totalmente cierta, pero hubo que esperar casi tres siglos hasta conseguir una demostración rigurosa de este enunciado, que ha pasado a conocerse como el *Primer Teorema del Análisis Límite* [14].

5. CATENARIA EN EL ARTE. POPULARIZACIÓN DE ESTA POR PARTE DE GAUDÍ

Las excelentes propiedades mecánicas de la catenaria eran conocidas ya en el siglo XVII. Además, dibujarla era bastante sencillo —no podemos decir lo mismo si

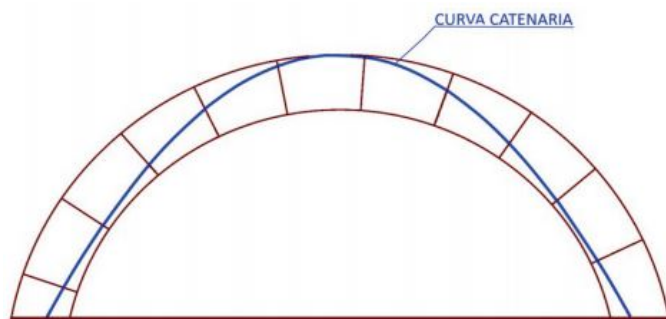


Figura 7: Un arco cualquiera se sostiene si y solo si contiene a un arco catenario en su interior (Manuel Cañete).



Figura 8: Empleo de los arcos catenarios en la Iglesia de Saint Martin en Donges, Francia (fotografía de Fabrice Fouillet).

lo que queremos es calcular su expresión—, pues no hay más que sujetar una cuerda por sus dos extremos y luego reflejarla. No obstante, en la cultura occidental este tipo de arcos no fueron bien acogidos y, pese sus propiedades apropiadas para la arquitectura, se prefirió recurrir a arcos dibujados con regla y compás. Fue Gaudí

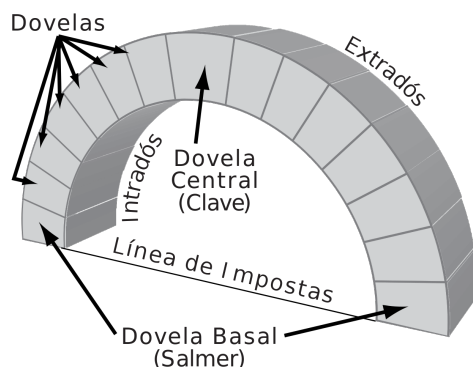


Figura 9: Trasdós (también llamado extradós) e intradós de un arco.

quien popularizó y explotó las propiedades estéticas y mecánicas de las catenarias, introduciendo con gran éxito en la arquitectura occidental los arcos no formados por segmentos de circunferencia [11].

Desde sus primeras obras Gaudí mostró su originalidad e independencia, centrándose de forma sistemática en arcos y bóvedas nada convencionales que utilizan formas parabólicas o catenarias.

Recorre a la idea de los arcos catenarios para integrar el cálculo de estructuras en el proceso del proyecto. Así, el arquitecto no trata de verificar la estabilidad de un cierto diseño; en su lugar, trata de proyectar, desde el principio, con formas estables. Gaudí es el primero en hacerlo, y lleva este intento hasta las últimas consecuencias.

Bajo estas hipótesis, en los casos reales el problema práctico a resolver no es el de la catenaria uniforme como tal, sino el de un arco que se soporta a sí mismo: la cuestión es hallar la forma de un arco que resista una cierta carga definida por dos líneas (o superficies) de trasdós e intradós, donde el trasdós (o extradós) designa el plano superior convexo de un arco o bóveda y el intradós el interior, que debe adoptar una forma equilibrada (véase la figura 9). Estos arcos suelen denominarse «catenarias transformadas», y de ellos podemos encontrar ejemplos en puentes, arcos sobre puertas o como parte de una arcada, o incluso soportando forjados o bóvedas. La solución general a este problema fue estudiada por Rankine en 1858 [11].

Antonio Gaudí entendía que las construcciones debían surgir desde la estabilidad y no al revés, es decir, intentando eliminar toda clase de accesorios pensados simplemente para sostener la estructura. Por ello la catenaria le resultaba tan atractiva, pues elimina las fuerzas laterales y distribuye la compresión de forma totalmente homogénea, permitiendo crear estructuras elevadas, elegantes y estables [1]. La catenaria fue uno de sus recursos favoritos y, por poner un ejemplo, lo usó en repetidas ocasiones en la Sagrada Familia, la obra a la que más tiempo y esfuerzo dedicó.

El problema más habitual con el que tuvo que lidiar fue el de obtener la forma de un cable (o arco) que soporta un peso proporcional a la distancia vertical entre su directriz (la línea central en la estructura de un arco) y una cierta línea horizontal. No solía resolverlo de forma directa, pues matemáticamente conlleva bastantes

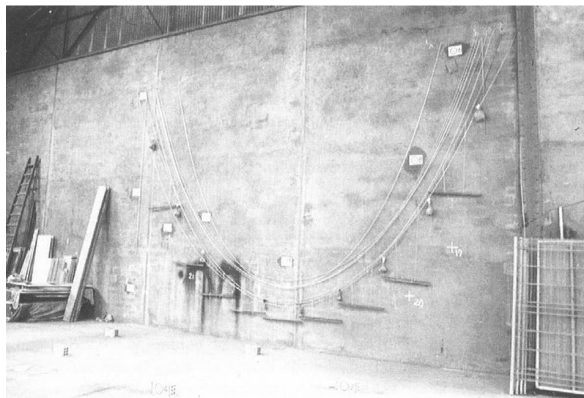


Figura 10: Modelos de cables empleados en los proyectos de los arcos diafragma de la casa Milá [19].

dificultades, por lo que habitualmente se empleaban métodos gráficos iterativos o modelos colgantes que, dadas las excelentes propiedades mecánicas de estas familias de curvas, eran más que suficientes para garantizar la estabilidad de las estructuras. Además, Gaudí usaba arcos con otras formas, con su trasdós relleno con un muro consistente aprovechando la proposición de Gregory («si un arco se sostiene es porque su catenaria está contenida en su espesor») que le permitía usar arcos catenarios simétricos para sostener cargas asimétricas.

Gaudí necesitaba una herramienta que le permitiera realizar cálculos rápidos y variar el proyecto a voluntad. Los cálculos matemáticos, tediosos en esa época por la falta de instrumentos sofisticados, no cumplían estos requisitos. Por ello, empleó otros métodos; en construcciones de tamaño moderado, como por ejemplo en la casa Milá (figura 10), la naturaleza de estos arcos permitía replantearlos sobre la misma pared. El proceso que seguía no era directo, los pasos requeridos durante este son los siguientes: primero se cuelga un cable simple y se calculan los pesos que actuarían sobre él, midiendo las distancias verticales y sumándole el peso del forjado; después se añaden esos pesos al cable, que cambia su forma; por último, se miden de nuevo las distancias verticales y se modifica el propio peso. El cable sometido a esos pesos toma una forma muy aproximada a la solución exacta buscada.

Cuando no todas las cargas resultan ser verticales, los métodos gráficos pueden resultar más convenientes. Los dibujos se podían complicar mucho pero se conseguía la ventaja de tener todos los elementos a la vista en el mismo diagrama.

Gaudí no tenía preferencias por uno u otro método. Hay un deseo evidente de investigar y considerar el problema desde distintos puntos de vista. Así, el empleo combinado de métodos gráficos y modelos le permitió obtener una comprensión profunda de los problemas de estabilidad y forma de arcos de fábrica.

Cabe reseñar que el proyecto y el cálculo de arcos (o bóvedas de cañón) es un problema de dos dimensiones. Antonio Gaudí también quería aplicar todos sus novedosos resultados, aquellos que sacaban la mayor ventaja posible del concepto de

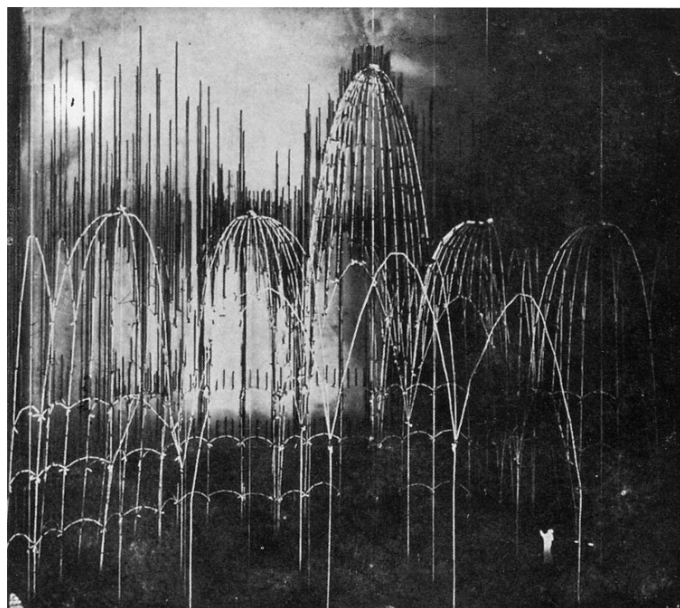


Figura 11: Modelo colgante (invertido) usado por Gaudí para dibujar los planos de la iglesia de Colonia Güell. (Rafols, 1929, imagen tomada de [11].)

equilibrio, en tres dimensiones. Por ello, tras sus investigaciones sobre el diseño de arcos, el arquitecto se plantea el problema más general de proyectar bóvedas.

Una idea que se repite mucho en sus investigaciones es la de imaginar bóvedas espaciales como suma de una serie de arcos obtenidos «cortando» la estructura por una serie de planos. Este método de cortes fue sugerido por Frézier en 1737 y, al parecer, fue aplicado por primera vez para realizar el análisis de estabilidad de la cúpula de San Pedro por Poleni en 1748 [13] y [18]. Para realizar este análisis imaginó la cúpula cortada en cincuenta gajos, de modo que cada dos gajos opuestos formaban un arco; Poleni concluyó que, si era posible encontrar una curva catenaria contenida en el interior de cada arco, entonces cada uno de estos se sostendría por sí mismo y, en consecuencia, la cúpula también lo haría.

Es posible que Gaudí tuviese información sobre el análisis de Poleni. Además, por primera vez existía un método de cálculo asequible y fiable para verificar la estabilidad de estructuras existentes o proyectos nuevos. No obstante, no quería aplicar los cánones tradicionales: su intención era usar un método que condujera directamente a formas equilibradas, alejándose de cálculos matemáticos que podían alargar la fase de proyecto. Claro está, el problema del proyecto en las tres dimensiones sigue siendo complicado de resolver; por ejemplo, para fijar la posición de una recta en el espacio harán falta tres proyecciones.

Enseguida se dio cuenta de que la única vía posible para crear sus proyectos era recurrir al empleo de modelos colgantes (probablemente fue el primero en aplicar esta técnica). Modelos en los que, al seccionar, iban a aparecer de forma natural las



Figura 12: Modelo colgante con pesos distribuidos estratégicamente usado por Gaudí para dibujar los planos de la Sagrada Familia.

catenarias y los antifuniculares (las curvas de mayor equilibrio), y que resultan ser una aplicación implícita del método de los cortes aplicado por Poleni.

Al igual que hizo con los arcos catenarios, Gaudí poco a poco va perfeccionando esta técnica, y consigue evitar un problema sin solución directa mediante la iteración del modelo colgante usando pequeños saquitos de arena para realizar pequeñas modificaciones sobre el esqueleto de la estructura del proyecto en el que estuviese trabajando.

Este modelo colgante funcionaría como una «máquina de proyectar». Una vez obtenida una forma satisfactoria, Gaudí trataba de representar el espacio, pues su modelo inicial apenas permitía obtener el esqueleto de la estructura. Esto lo conseguía directamente colocando papeles de seda pegados a las cadenas o dibujando sobre fotografías del modelo. Para concluir, se medía sobre el modelo para dibujar los planos.

Sin embargo, no se deshizo de todos los convencionalismos recurrentemente usados en construcciones destacadas. A lo largo de la historia, cuando se han realizado

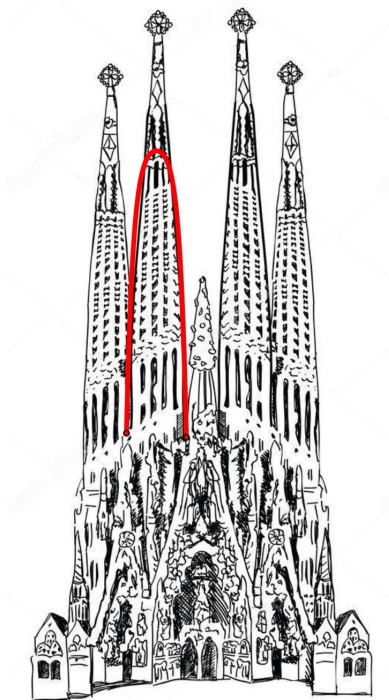


Figura 13: Las torres de la Sagrada Familia se adaptan perfectamente a la forma de la «catenaria áurea», diferenciándose de ella únicamente en el punto en el que comienza a sostener el pináculo.

las distintas obras, ha sido común dotarlas de proporciones especiales con el fin de que resultasen bellas al ojo humano. Él mismo defendía dicha tesis, tal y como afirmaba en un manuscrito fechado en Reus a 10 de agosto de 1878 y en el que decía «... se puede echar mano de la Proporción, que es una de las principales cualidades de la Belleza».

En la propia península ibérica existían ya varios precedentes de distintas épocas, como por ejemplo la iglesia Santo Domingo en Soria, del movimiento románico, o la catedral de Burgos, del gótico (consúltense [3] y [6], respectivamente).

Gaudí no fue la excepción a esta tendencia. En [17] ya se demuestra que recurrió deliberadamente a estos convencionalismos con la pretensión de mejorar las cualidades estéticas de la casa conocida como El Capricho, construida en Comillas (Cantabria). También intentó aplicar esta regla con el objeto matemático que nosotros estamos estudiando en este artículo: como vemos en la figura 13, las torres de la Sagrada Familia adoptan, salvo para sostener el pináculo, la forma de la «catenaria áurea» (la curva pintada en rojo en la figura), que es aquella que tiene por parámetro el número áureo $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$. Es decir, las secciones de las torres de la



Figura 14: El arco de Ctesifonte (fotografía de Karl Oppolzer).

Sagrada Familia son curvas que reescalan y reflejan la expresión

$$\gamma(t) = \left(t, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cosh \left(\frac{t}{(1 + \sqrt{5})/2} \right) \right).$$

Esta será, seguramente, una de las muchas razones que expliquen la gran belleza que percibe en la Sagrada Familia el ojo humano.

A diferencia del empleo del número áureo o de los arcos circulares, la catenaria no gozó de popularidad entre los arquitectos europeos hasta finales del siglo XIX o principios del siglo XX. Ya hemos comentado que fue Gaudí quien la popularizó y quien le dio nuevos enfoques arquitectónicos. No obstante, en las últimas líneas de este artículo repasaremos ejemplos importantes en los que se ha empleado la catenaria [12].

Quizás uno de los ejemplos que mejor representa todas las propiedades que hemos deducido de la catenaria es el del arco de Ctesifonte, en el actual Irak, construido en una fecha desconocida entre los siglos III y VI d.C. y una de las primeras utilizaciones de este tipo de arco (bóveda en este caso, véase la figura 14). Prácticamente toda la estructura ha sido derruida por el paso del tiempo pero el arco se sigue sosteniendo perfectamente por sí mismo sin necesidad de soportarse en elementos adicionales. Esto solo se puede explicar gracias a las excelentes propiedades mecánicas de la catenaria.

A partir del siglo XX han sido numerosas las obras que han empleado geometrías antifuniculares. Eugène Freyssinet fue pionero en el diseño de estructuras a compresión con la construcción de dos hangares para el Aeropuerto de Orly (París) con forma de bóveda catenaria (figura 15).

No podíamos hablar de arcos catenarios sin nombrar el Gateway Arch de San Luis (Misuri, EE. UU.), quizás el arco catenario más famoso de la arquitectura (figura 16).

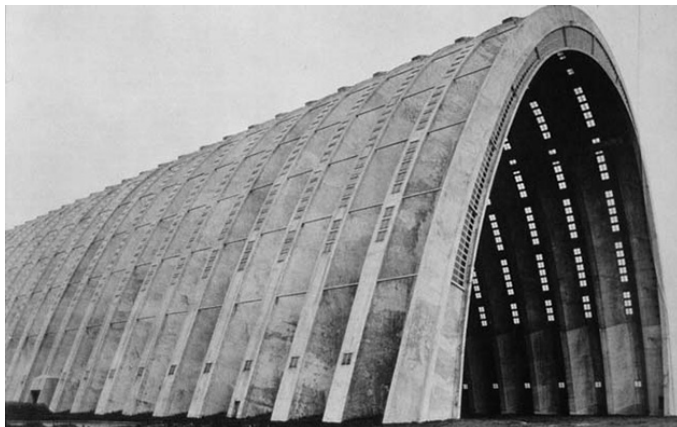


Figura 15: El hangar de Orly.



Figura 16: El Gateway Arch (fotografía de Daniel Schwen).

Se trata de una imponente construcción de 192 metros de altura proyectado en 1947, antes de la aparición de las computadoras.

AGRADECIMIENTOS. Agradezco al revisor anónimo por sus correcciones sobre el artículo que han mejorado su contenido. Agradezco también a Javier Aramayona por darme sus impresiones sobre el primer boceto y animarme a publicarlo.

REFERENCIAS

- [1] C. ALSINA Y J. GÓMEZ SERRANO, Gaudí, geoméricamente, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **5** (2002), no. 3, 523–539.
- [2] M. CAÑETE, *Método de aproximación catenaria para la obtención de densidades de fuerza en estructuras tensadas y antifuniculares*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, 2016.
- [3] A. FERNÁNDEZ JIMÉNEZ, Matemáticas en el arte soriano: Iglesia de Santo Domingo, *Celtiberia* **110** (2016), 169–192.
- [4] R. FRANCO, *Hacia una arquitectura móvil*, Fundación Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano, Bogotá, 2010.
- [5] G. GALILEI, *Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze*, Leiden, 1638.
- [6] GRUPO ESTALMAT DE BURGOS, *Matemáticas en la Catedral de Burgos*, 2.^a ed., Obra social de Caja Círculo, Burgos, 2011.
- [7] S. GUTIÉRREZ, Jakob Bernoulli: La geometría y el nuevo cálculo, *Suma* **51** (2006), 89–92.
- [8] S. HUERTA, *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500–ca. 1800*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1990.
- [9] S. HUERTA, Mecánica de las bóvedas de la catedral de Gerona, *Actas del curso sobre grandes bóvedas hispanas (Madrid, 19–23 de mayo de 1997)*, 53–65, Ministerio de Fomento, CEHOPU, Madrid, 1998.
- [10] S. HUERTA, *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*, Textos sobre teoría e historia de las construcciones, Instituto Juan de Herrera, Madrid, 2004.
- [11] S. HUERTA, El cálculo de estructuras en la obra de Gaudí, *Salvador Tarragó: miscel·lània*, 133–162, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 2013.
- [12] R. IBÁÑEZ, El vientre de un arquitecto (la búsqueda de la forma), *Un paseo por la Geometría 2003/04*, 155–186, Universidad del País Vasco, 2004.
- [13] G. LÓPEZ MANZANARES, *Estabilidad y construcción de cúpulas de fábrica: El nacimiento de la teoría y su relación con la práctica*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1998.
- [14] M. MILANKOWITCH, Theorie der Druckkurven, *Zeitsch für Mathematik und Physik* **55** (1907), 1–27.
- [15] H. MOSELEY, On the Equilibrium of the Arch, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **5** (1835), 293–312.
- [16] H. MOSELEY, *The Mechanical Principles of Engineering and Architecture*, John Wiley & Son, Nueva York, 1869.
- [17] R. PÉREZ, Gaudí y la proporción, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **5** (2002), no. 3, 540–558.
- [18] G. POLENI, *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, Padova, 1748.

- [19] P. ROCA, J. L. GONZÁLEZ, R. BRUFAY Y J. GÓMEZ SERRANO, Consideraciones sobre la dimensión estructural de la obra de Antoni Gaudí, *Obra Pública* **38** (1996), 50–63.

ALEJANDRO FERNÁNDEZ JIMÉNEZ, ESTUDIANTE DEL GRADO EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: alexjfj08@gmail.com

Página web: <http://matematicosoriano.blogspot.com/>