
LA COLUMNA DE MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

Sección a cargo de

Laureano González Vega

El lector habitual de esta columna de LA GACETA habrá observado que he recogido de Tomás Recio el testigo de continuar acercando a los lectores de LA GACETA temas donde las Matemáticas y la Computación conviven en armonía. Es mi intención que sean los autores que contribuyan a esta columna los que hablen pero, en este número, contamos con Tomás Recio como uno de los autores de la contribución que hoy traemos aquí. Y es de justicia agradecer aquí y ahora a Tomás el tiempo y el trabajo (ambos, sin duda, infinitos) que ha dedicado a La Columna de Matemática Computacional de LA GACETA, siendo el único editor que ha tenido esta columna (¡desde 1998 hasta 2019!). Tomás fue el autor de esa primera columna que data de 1998 y, en este número, el lector interesado, más de 22 años después, podrá observar cómo el interés de Tomás por el cálculo del número de raíces reales sigue presente aquí en la descripción del autómata geométra que hacen Tomás y sus colaboradores.

Hacia un autómata geométra

por

Francisco Botana, Zoltán Kovács, Tomás Recio y M. Pilar Vélez

Autómata, según *Wikipedia*, viene del griego *automatos*, que significa espontáneo o con movimiento propio. Según la Real Academia Española (RAE), en su segunda acepción, *autómata* es una «máquina que imita la figura y los movimientos de un ser animado». Por otra parte, la RAE también nos señala que un geométra es, simplemente, un especialista en geometría. Así, un *autómata geométra* sería una máquina que desarrollara, con éxito, las tareas habituales de un geométra humano: conjeturar, demostrar, refutar, descubrir... propiedades geométricas.

Este artículo tiene como objetivo ilustrar al lector, muy particularmente a los colegas de la comunidad matemática española, de la RSME, de la evolución de nuestro grupo de investigación y de su trabajo a lo largo de los últimos 30 años, en pos de la creación de un *autómata geométra*.

Para ello, en las secciones siguientes se trazan unas pinceladas sobre la historia de las contribuciones del equipo de investigación creado en torno a los autores

de este artículo, incluyendo, en particular, una descripción informal de los conceptos, problemas y métodos que fueron desarrollando. No pretende ser, no puede ser, una historia universal de la demostración automática de teoremas geométricos, pero creemos que el lector interesado encontrará datos relevantes a este respecto en las referencias que se incluyen a lo largo de este trabajo.

Finalmente se presenta el resultado más «visible» de nuestro trabajo, el autómata geométrica AG , a través de diversos ejemplos, concluyendo con unas someras reflexiones acerca de su potencial impacto en el mundo educativo.

1. NUESTRA PEQUEÑA HISTORIA. INICIO: AÑOS 90

La tarea que vamos a describir en este trabajo la inició, hace 25 años, uno de los autores (T. R.) del mismo, tras su asistencia, gracias a la financiación de su primer proyecto de investigación¹, al *Symposium on Symbolic and Algebraic Computation: Symsac'86*, que tuvo lugar en Waterloo, Ontario, Canadá. Su presencia —como mero oyente— en el congreso se debía al especial momento que entonces se vivía de incorporación de las técnicas de álgebra computacional (véase [23], un libro que le fue particularmente influyente en esa época) a la geometría algebraica y, en especial, a la geometría algebraica real, su campo de investigación hasta ese momento.

En ese congreso² impartió una conferencia invitada el profesor Wu Wen-Tsun³ sobre su propuesta de mecanización de la demostración de teoremas en geometría elemental a través de la conversión de los enunciados en sistemas de ecuaciones polinómicas y su manipulación con algoritmos de geometría algebraica computacional [73], lo que le valió en 1997 el Premio Herbrand⁴ *for Distinguished Contributions to Automated Reasoning*. En el mismo congreso se presentaron, también, otras comunicaciones fundamentales sobre el mismo tema y método, [39, 47].

Como señala [66], a lo largo de la década siguiente, T. R. comenzó a aplicar estas técnicas, con la ayuda del programa CoCoA⁵, a diversos ejemplos de teoremas geométricos, conformando así un material docente para sus clases en una asignatura de álgebra conmutativa de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Cantabria. Una metodología que, más tarde, otro de los autores de este trabajo, M. P. V., incorporó a sus clases en la Universidad Complutense. Gran parte de este material está recogido en el capítulo I del libro [60], publicado en 1998, escrito en respuesta a una invitación del añorado Miguel de Guzmán, gran amante de la geometría elemental, quien en algún trabajo, como se detalla en el libro, se inspiró en estas técnicas de razonamiento automático, ver [33].

La conclusión matemáticamente más destacable de todo este periodo de trabajo con casos particulares fue la propuesta [67] de un método propio de demostración

¹*Geometría y Álgebra Reales*, CAICYT-2280/83

²Que forma parte de la serie de congresos más importantes de álgebra computacional, conocidos a partir de cierta fecha por las siglas ISSAC (International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation), <https://www.issac-conference.org/past.php>

³https://en.wikipedia.org/wiki/Wu_Wenjun

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Herbrand_Award

⁵<http://cocoa.dima.unige.it>

y —cuando el algoritmo de demostración concluye que esta no es posible, por la falsedad del resultado formulado— de *descubrimiento automático* de las hipótesis que habría que añadir para la validez del teorema geométrico enunciado. Digamos, por poner un ejemplo sencillo (teorema de Simson y su recíproco, [60]), que si tratamos de probar la alineación de los pies de las alturas trazadas desde un punto arbitrario a los lados de un triángulo, el algoritmo de demostración y descubrimiento automático indicará que ese resultado no es cierto, pero que lo sería si el punto desde el que se trazan las alturas no fuera arbitrario, sino que se encontrara en el circuncírculo del triángulo dado. Véanse la figura 1, que reproduce dos imágenes de este proceso en el programa GDI, al que nos referiremos en la sección siguiente, y la figura 2, que ilustra la prueba con GDI de la alineación de ciertos puntos notables en un triángulo.

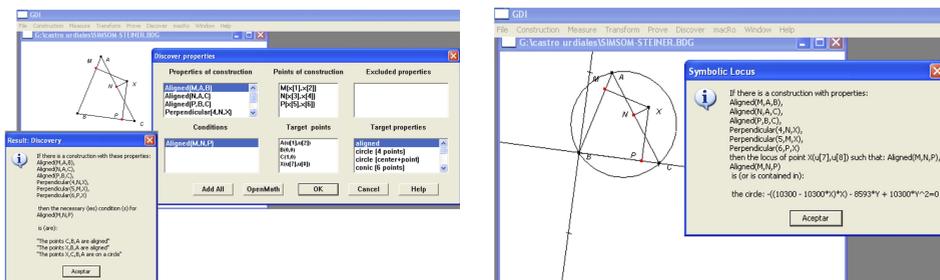


Figura 1: El programa GDI, descubriendo el teorema de Simson.

Dicho sea en términos muy simplistas, *demostrar automáticamente* que un enunciado es cierto puede pensarse como la verificación de la ausencia de soluciones en el sistema de ecuaciones que recoge las hipótesis (estas dos rectas son perpendiculares, este punto equidista de estos otros dos, etc.) y la negación de la tesis (formulando la negación de la tesis $t(x_1, \dots, x_n) = 0$ como $t(x_1, \dots, x_n) * z = 1$, con una variable z extra). Y *descubrir* hipótesis complementarias consistiría en añadir condiciones (necesarias) que sean consecuencia de la conjunción de las hipótesis y tesis y se expresen en términos de los elementos libres de la construcción, comprobando, a continuación, si tales condiciones necesarias son también suficientes, usando el algoritmo de *demostración*.

Ambos tests, de ausencia de soluciones o de derivación de consecuencias, pueden realizarse con algoritmos bien conocidos de álgebra computacional, para determinar si 1 es una combinación de las hipótesis y de la negación de la tesis⁶, o para eliminar variables en el ideal de tesis + hipótesis. En [67, 26, 68] puede verse una formulación matemática rigurosa y una introducción a las múltiples y sutiles complicaciones existentes.

⁶En este contexto es habitual trabajar con soluciones en el espacio \mathbb{C}^n de los sistemas de ecuaciones, al ser el caso de las soluciones reales mucho más difícil de tratar, lo que exige —si el resultado no es válido sobre los complejos— la revisión posterior de la validez *real* de las conclusiones, [63]. En todo caso se trata de un tema actual de investigación, al que nos referiremos más adelante en este artículo.

Una alternativa original —tal vez demasiado técnica para ser descrita en este trabajo— a tales algoritmos tiene que ver con la reducción rigurosa —es decir, no probabilística, sino matemáticamente cierta— de la verificación de la certeza o falsedad de una proposición a su comprobación en un número finito de casos. Se trata, de manera muy grosera, de hacer una relectura del algoritmo de demostración de modo que se convierta en un proceso para decidir si las soluciones de un cierto sistema de ecuaciones, del que solo conocemos que sus soluciones son o bien todo el espacio o bien un conjunto algebraico con una cota de su grado (establecida mediante los grados de las ecuaciones que representan las hipótesis), representan realmente el espacio total o no.

Por ejemplo, imaginemos que sabemos que tal conjunto es una curva de grado menor o igual a dos (o todo el plano). Entonces bastaría con tomar seis puntos adecuadamente dispuestos para que no estén contenidos en ninguna cónica y verificar —sin necesidad de calcular la curva, solo con un test de pertenencia, un oráculo que nos indique si un punto está o no en dicha curva— si la curva asociada al teorema geométrico que consideramos pasa por todos ellos. Si no pasa por alguno, obviamente, el objeto que estamos testando *no* es todo el plano. Si pasa por todos ellos, tiene que ser todo el plano forzosamente.

En [61] puede verse una versión inicial, intuitiva, en castellano, de principios de este siglo, y en [65] una publicación reciente, matemáticamente precisa, de esta idea tan prometedora, computacionalmente hablando. La columna *Recio* en el comparativo disponible en <https://tinyurl.com/provertest> puede dar una idea inicial de la velocidad de este algoritmo que se ha incorporado (aún de modo muy restringido) al conjunto de métodos que el programa de geometría dinámica GeoGebra⁷ pone en marcha simultáneamente para establecer la verdad/falsedad de un enunciado geométrico, ver [40]. Pero... ¡no adelantemos acontecimientos!

2. GDI: 2000–2010

La década de los 90 fue, sin duda, un momento de extraordinaria expansión internacional de esta aproximación algebro-geométrica computacional a la demostración automática de teoremas geométricos. Un crecimiento apoyado, en nuestra opinión, por el desarrollo y popularización entre los investigadores matemáticos, a lo largo de estos años, de múltiples programas de álgebra computacional⁸ (también conocidos como «sistemas de cálculo simbólico», CAS), como Macaulay, CoCoA, Mathematica o Maple, cuyos comandos de manipulación de polinomios evolucionaron extraordinariamente, posibilitando manejar ejemplos complejos de demostración de teoremas en un tiempo reducido.

También fue en esa década cuando comenzó a divulgarse en la comunidad educativa la existencia de cierto software denominado de «geometría dinámica», SGD⁹, como The Geometer's Sketchpad, Cinderella o Cabri, que permite construir figuras

⁷<https://www.geogebra.org>

⁸https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_computer_algebra_systems

⁹https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive_geometry_software

geométricas en la pantalla del ordenador mediante el establecimiento de relaciones geométricas entre los elementos de la figura, unas relaciones que permanecen estables aunque se muevan tales elementos. Por ejemplo, si construimos en un SGD un círculo c de centro A y radio 2 y cambiamos la posición de A , el círculo c acompañará ese movimiento y seguirá teniendo las características establecidas; por el contrario, si construimos un círculo c' de centro A y que pasa por otro punto libre B , ubicado inicialmente a una distancia de 2 unidades de A , aparentemente c y c' serán iguales, pero si movemos A y dejamos fijo B , el círculo c' irá cambiando de radio, en función de la distancia que se establezca entre A y B .

Lógicamente, la cooperación entre ambos sistemas de software (CAS y SGD) es especialmente atractiva desde la perspectiva de la demostración automática, puesto que permite, a través de la introducción en la ventana de un SGD de los pasos de la construcción de la figura correspondiente y de la formulación de la conjetura —por ejemplo, señalando con el ratón determinados elementos y eligiendo en un menú del SGD algunas propiedades que se considera que han de verificar entre ellos—, la traducción e incorporación mecánica en el CAS asociado de los polinomios que describen analíticamente la hipótesis y la tesis, así como la ejecución por este programa del algoritmo de prueba, para concluir con la superposición de la respuesta (verdad/falso) en la ventana del SGD (véase un ejemplo en la figura 1).

Por ello, tras haber logrado desarrollar, en la década de los 90, algoritmos eficientes de prueba de enunciados geométricos complicados, a comienzos del nuevo siglo se plantea de manera natural, como el paso siguiente hacia la mecanización del razonamiento geométrico, el establecimiento de una simbiosis CAS/SGD que facilite la interfaz con el usuario, a través de la visualización y automatización de la introducción de las ecuaciones correspondientes a las tesis e hipótesis de los teoremas. Y esto con vistas no solo a facilitar el trabajo de los matemáticos que investigan en este campo, sino teniendo en cuenta el destinatario final de los resultados sobre razonamiento automático en geometría elemental, el mundo educativo. Un destinatario que tal vez, en la fase inicial, no estuviera presente en la mente de los investigadores, pero que a partir de la década de los noventa fue, de alguna forma, el oscuro —confuso e implícito— objetivo de los mismos.

Así, en [60, p. 81], se anuncia: «Uno de los requisitos para que esta técnica tenga cierta repercusión escolar en el futuro es la automatización de varios pasos intermedios. Por ejemplo, la obtención automática de las ecuaciones analíticas de las hipótesis y de las tesis conjeturales, de modo que el ordenador desarrolle, sin intervención humana, las ecuaciones [...] a través de una interfaz gráfica [...] Finalmente, la simplificación fundamental vendría de la mano del establecimiento de una comunicación entre el programa gráfico y el programa (o programas) de Cálculo Simbólico que vaya a ser empleado [...]. Ya existen hoy calculadoras de bolsillo¹⁰ que incluyen programas geométricos y simbólicos [...] ¡solo falta que, mañana, se relacionen entre sí!».

Y también Miguel de Guzmán señala [34] en 2002, lamentándose tanto de la falta de cálculo riguroso en los SGD como de la «pesadez» de los CAS para manipular

¹⁰El texto se refiere a la TI-92, https://en.wikipedia.org/wiki/TI-92_series, que incorporaba el CAS Derive y el SGD Cabri, pero de modo independiente.

ecuaciones derivadas de construcciones geométricas, que «es claro que los programas actuales de geometría interactiva, tales como Cinderella, Sketchpad, Cabri... aventajan ampliamente a Derive en lo que se refiere a la flexibilidad extraordinaria que proporcionan para la experimentación con elementos geométricos elementales, pero Derive (como otros programas de cálculo simbólico) permite, además de experimentar en geometría a su modo un tanto más pesado, llegar hasta la demostración de muchas de las conjeturas que la experimentación sugiere y que los programas anteriores no son capaces de realizar [...] me resulta del todo verosímil que en un futuro bastante próximo la experimentación será mucho más fácil de realizar que ahora, la conjetura y su comprobación o refutación se hará así mucho más sencilla y sin esfuerzo, y la **demostración automática será directa**» (la negrita es nuestra).

Tales programas, que permitan la introducción gráfica de una construcción geométrica sobre la que se establecen ciertas conjeturas cuya validez rigurosa (no probabilística ni numéricamente aproximada) es comprobada mediante la conexión con un sistema de cálculo simbólico, iniciaron, de manera casi simultánea a finales de los 90, su desarrollo por diversos grupos de investigación, con una pluralidad de matices (grado de automatización de la interconexión de los dos sistemas, accesibilidad por internet, tipos de tareas de razonamiento automático que permiten, etc.).

La página `List_of_interactive_geometry_software` de *Wikipedia* a la que hemos hecho referencia anteriormente ofrece, en particular, una tabla que sintetiza las capacidades en razonamiento automático de diferentes programas de geometría dinámica, pero no incluye¹¹ una referencia detallada al programa Geometry Expert (GEX), pionero en el desarrollo de esta colaboración SGD/CAS para la demostración automática [25]. Ciertamente este programa —como otros varios desarrollados hace una veintena de años por grupos de investigación, con una difusión prácticamente restringida a la comunidad científica— tuvo una vida corta. Fueron reemplazados, en el mejor de los casos, por versiones con interfaces actualizadas para los diversos sistemas operativos o programadas en lenguajes más modernos (por ejemplo, Java). Así GEX se convirtió, hacia mediados de la década 2000–2010, en el proyecto Java Geometry Expert [74], JGEX, cuyo lanzamiento se anunciaba para finales de ese periodo¹².

Remitimos al lector al primer capítulo de la tesis [71], «Geometría Dinámica Inteligente», presentada por J.L. Valcarce en 2003 en la Universidad de Vigo y dirigida por uno de los autores de este artículo, F.B., titulado «Estado del arte: Sistemas de Geometría Dinámica y Deducción Automática en Geometría» si desea encontrar más detalles acerca del incipiente desarrollo, a principios de siglo y a nivel internacional, de programas de geometría dinámica que incluyan comandos de demostración automática.

¹¹Véase, por el contrario, la web https://swmath.org/?term=automated+theorem+proving+dynamic+geometry&which_search=standard&sortby=rank

¹²Como se describe en <https://zhuanlan.zhihu.com/p/118669357>: «The Java Geometry Expert (Java GEX or JGEX) has been rewritten completely with emphasis on its ease of use by high school students and teachers in geometric drawing for educational purpose. The primary goal of Java GEX is to provide a piece of alternative and free software for dynamic geometry. We began this project in 2004 and plan to release the first official version in 2008».

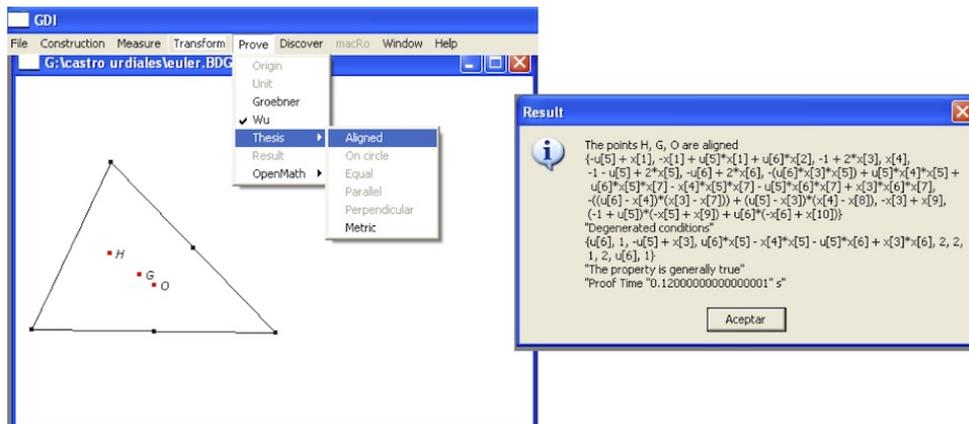


Figura 2: El programa GDI, probando que el circuncentro, ortocentro y baricentro están alineados en cualquier triángulo.

Dicha tesis fue, en todo caso, la primera aportación española en esta dirección y el programa GDI (por las iniciales de Geometría Dinámica Inteligente) que desarrolla esta tesis fue, en su momento, a nivel internacional, uno de los programas más versátiles, al ir incorporando paulatinamente diversos módulos (*Lugares, Discovery...*) para el cálculo de lugares geométricos, el descubrimiento y prueba automáticos, etc. De amplia accesibilidad y facilidad de manejo, GDI conectaba REX, un SGD, específicamente desarrollado por el profesor Valcarce, con diversos CAS (CoCoa, Mathematica, Maple, OpenMath), facilitando, además, la elección por el usuario de varios métodos de prueba (Wu, Gröbner, etc.), como puede apreciarse en la figura 2. Dado que la tesis no está publicada, remitimos al lector interesado a [21, 22] o [14] para que pueda consultar una descripción de las características de GDI¹³.

El crecimiento y fortalecimiento del grupo español, con la incorporación de Valcarce y Botana al núcleo inicial de T. Recio y M. P. Vélez, supuso, en particular, el desarrollo de numerosos trabajos centrados en el descubrimiento de teoremas cada vez más complejos, utilizando y desarrollando, además, nuevas técnicas complementarias.

Así, en [63] se aborda el teorema 8₃ de MacLane (dados ocho puntos P_i en el plano tales que, para $i = 1, \dots, 8$, se tiene que $P_i P_{i+1} P_{i+3}$ están alineados, siendo $P_{i+8} = P_i$, entonces han de estar todos alineados), donde se discuten las sutiles diferencias del concepto (esto es, de los aspectos técnicos de la definición matemática asociada) de «verdad» en el caso complejo y real que pone de manifiesto este ejemplo.

¹³De [14]: «The goal of this paper is to report on a prototype of a new dynamic geometry software, GDI (Geometría Dinámica Inteligente). We will describe how, apart from being a standard dynamic environment for elementary geometry, GDI addresses some key problems of the dynamic geometry paradigm, by including enhanced tools for loci generation and automatic proving, plus another distinguished feature, namely, a discovery option, allowing the user to find complementary hypotheses for arbitrary statements to become true. The key technique for all these improvements is the development of an automatic bridge between the graphic and the algebraic counterparts of the program (calling on an external computer algebra system)».

Pero lo que resulta particularmente relevante en ese trabajo es mostrar la posibilidad de abordar, vía GDI, dicho teorema, mediante el *descubrimiento* automático, algo que no es posible realizar con otro programa con interfaz geometría dinámica que solo tenga incorporada la *demostración* automática, dado que se trata de un enunciado de tipo no constructivo, puesto que cada punto P_i está sujeto a tres condiciones (ver [24, p. 16] o [63, p. 765]).

Por el contrario, con GDI (figura 3) se puede realizar una construcción que satisface solo las primeras cinco condiciones de alineación $P_1P_2P_4$, $P_2P_3P_5$, $P_3P_4P_6$, $P_4P_5P_7$, $P_5P_6P_8$, dado que de esta forma P_1 puede elegirse libremente, P_2, P_3, P_4, P_5 están sujetos solo a dos condiciones cada uno, y P_7, P_8 verifican solamente una condición. A continuación, GDI permite plantear el descubrimiento de las hipótesis necesarias para que también se verifique la alineación de $P_6P_7P_1$, $P_7P_8P_2$ y $P_8P_1P_3$, algo que, como es habitual en el descubrimiento, no es evidente en la figura. Y, tras añadir estas condiciones extra, concluye, precisamente, con la necesidad de la alineación de los ocho puntos.

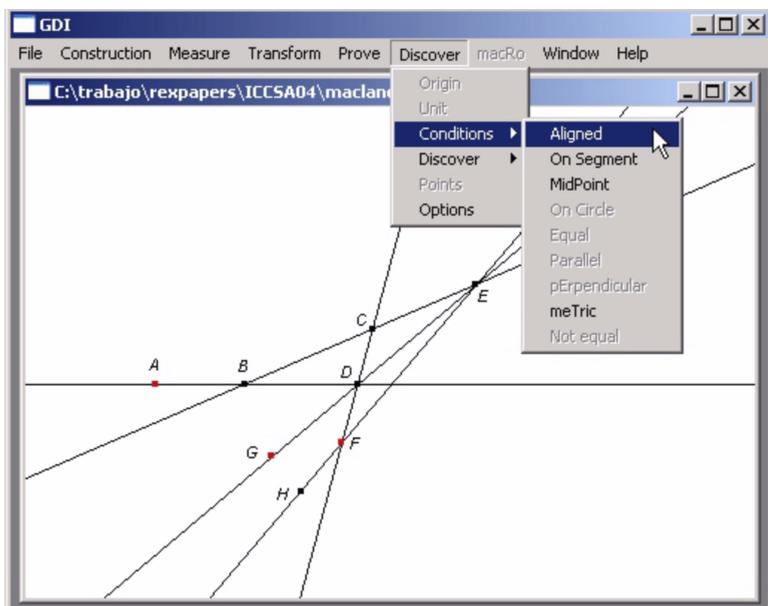


Figura 3: El programa GDI, descubriendo el teorema 8_3 de MacLane.

Otro ejemplo interesante del trabajo del grupo en ese periodo lo constituye la búsqueda automática de una generalización del teorema de Steiner-Lehmus, una tarea en la que resultó decisiva la participación de los profesores Antonio Montes, de la Universidad Politécnica de Cataluña, y Rafael Losada, del I.E.S. de Pravia (Asturias). Este teorema afirma que si un triángulo tiene dos bisectores internos (es decir, el segmento de la bisectriz del ángulo interior, desde el vértice hasta el lado opuesto) de igual longitud, entonces es isósceles (y recíprocamente). En <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner->

lehmus se describen múltiples demostraciones (comentadas, en muchos casos), con aportaciones de matemáticos de la talla de Coxeter, Conway y otros, y un listado de publicaciones hasta principios del siglo XXI —aproximadamente— sobre dicho resultado.

Nuestro trabajo inicial versó sobre el descubrimiento —usando GDI y las técnicas de descubrimiento automático desarrolladas por el grupo con anterioridad— de las hipótesis adecuadas para que se verifique la igualdad de dos o tres bisectores de cualquier tipo, internos o externos (determinados por la bisectriz del ángulo exterior de cada vértice y su intersección con la recta soporte del lado opuesto), ver [10, 26, 51, 52].

Como muestra de la complejidad de los resultados obtenidos, la figura 4 reproduce, usando una técnica desarrollada en este contexto por R. Losada en GeoGebra, el «color dinámico» [49], la curva de grado 35 que contiene las posibles ubicaciones del vértice P (los vértices A y B se fijan inicialmente) para que haya al menos dos longitudes iguales de bisectores de vértices distintos¹⁴. Nótese arriba, a la izquierda, el valor de dichas longitudes (eA es el nombre del bisector exterior, de color rojo, asociado al vértice A ; iA representa el bisector interno, de color blanco, del mismo vértice, etc.).

$eA = 8.59066$	$iA = 0.70337$
$eB = 4.12569$	$iB = 1.01906$
$eP = 2.69838$	$iP = 0.90576$

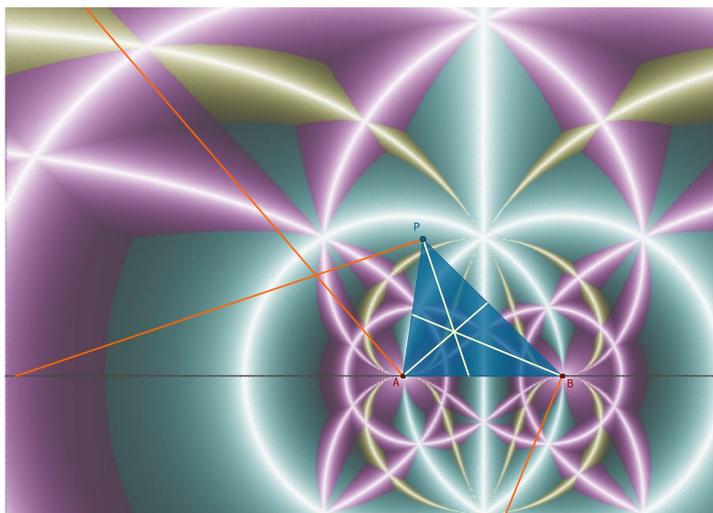


Figura 4: Descubrimiento automático de la generalización del teorema de Steiner-Lehmus, representado la solución obtenida, usando color dinámico, en GeoGebra.

Dicha curva resulta ser la unión de una recta (la mediatriz entre A y B , de modo que la ubicación del tercer vértice produce un triángulo isósceles, de ángulos iguales en A, B), dos círculos centrados en A, B respectivamente, y pasando por B, A , en

¹⁴En http://geogebra.es/color_dinamico/color_dinamico.html y <https://www.geogebra.org/m/d6j2nhYG> puede verse una detallada descripción de esta técnica y, en particular, un enlace interactivo a figuras como esta.

su caso, que representan también el caso isósceles, pero con igualdad de otro par de lados, y de otra curva de grado 30 que es, realmente, la unión de tres curvas de grado 10, que corresponden a las posiciones del vértice libre para que se produzca alguna igualdad de longitudes de bisectores internos/externos de los tres pares posibles de vértices. En la figura 5 hemos representado, a la izquierda, la curva donde se ha de ubicar C para que haya alguna coincidencia de tamaño entre los conjuntos de números $\{eA, iA\}$ y $\{eB, iB\}$ y, a la derecha, lo mismo, pero para los vértices A, C .

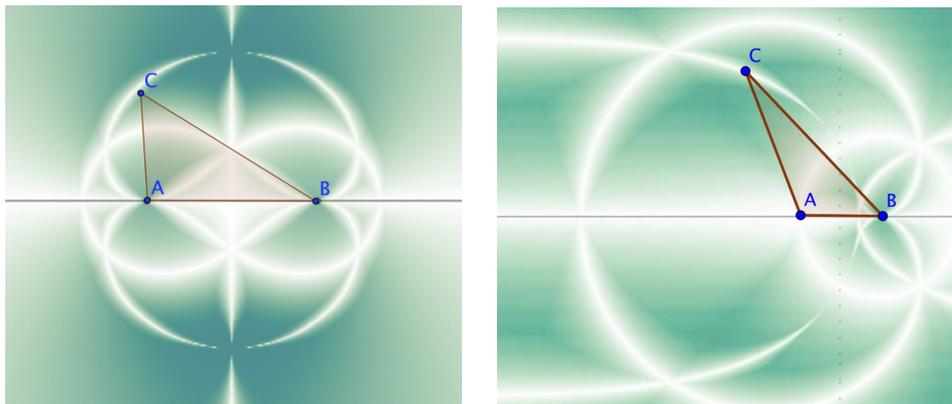


Figura 5: Posiciones del vértice libre para la igualdad de un par de bisectores, visualizadas usando color dinámico.

Además, en los trabajos arriba citados, se estudiaron las condiciones para la igualdad de tres bisectores (de cualquier tipo) de vértices distintos, concluyendo que este caso solo era posible en triángulos equiláteros (en el que los tres bisectores internos coinciden, así como los externos, pero ambos números son distintos), o cuando los externos de B, C coinciden con el interno de A , o los externos de A, B con el interno de C , de modo que se puede afirmar que no existen triángulos con dos bisectores internos y uno externo, o con tres bisectores externos, con el mismo tamaño. Por último, otro de nuestros trabajos [53] abordó el estudio, mediante las herramientas de razonamiento automático, de la igualdad de los dos bisectores correspondientes a un mismo vértice, en uno, en dos o en tres de los vértices del triángulo; o de la igualdad de áreas de los triángulos rectángulos formados por cada vértice y los pies de los bisectores correspondientes), etc., arrojando interesantes conclusiones.

Curiosamente, un problema sobre bisectores apareció en la sección *Problemas y Soluciones* de *La Gaceta* [69], con motivo del centenario de la RSME. El problema *ENEM 3*, propuesto por la redacción, consideraba, en un triángulo cualquiera, el triángulo bisector asociado, formado por los pies de las tres bisectrices internas. Y planteaba probar que, en cualquier punto del perímetro de este triángulo bisector, se verifica que alguna de las tres distancias del punto a los lados del triángulo inicial es igual a la suma de las otras dos.

No pudimos resistir la tentación de probar nuestras técnicas de razonamiento automático en este problema y así, en [50], publicamos la solución a una versión

generalizada del mismo, en el que considerábamos el enunciado simultáneamente sobre los diversos triángulos bisectores que se pueden construir teniendo en cuenta las bisectrices internas y externas en cada vértice. Es destacable comprobar cómo ese artículo reconoce que la interacción geometría dinámica (GDI, GeoGebra) / cálculo simbólico (Maple) que se llevó a cabo para abordar el problema fue realizada de modo no automático, por los autores del mismo. Y, por eso, hace continuas referencias a la necesidad —y aparente facilidad de automatizar, dado el planteamiento general de GeoGebra¹⁵ combinando CAS y SGD— en un mismo programa estas tareas, lo que va a constituir uno de los logros del equipo en la siguiente década 2010–2020.

Ha de enfatizarse la importancia, puesta de manifiesto a lo largo de todo este periodo de experimentación, de que la interacción CAS/SGD se lleve a cabo en un *mismo* programa y que este tenga diversas aplicaciones, una amplia difusión y mantenimiento. Es decir, que no se trate simplemente de un programa de razonamiento automático, usado, básicamente, por investigadores, sujeto, por tanto, a las contingencias y vaivenes propios de la actividad investigadora, en un contexto tecnológico (lenguajes de programación, por ejemplo) altamente cambiante al que es preciso adaptarse continuamente (como ocurrió con GEX, JGEX, etc.). Que no se trate, tampoco, de un programa que enlace, a su vez, con otro programa externo para llevar a cabo tareas fundamentales (como hacía GDI con CoCoA, Mathematica, etc.), lo que conlleva una interdependencia que termina por hacer inviable la conexión a medio plazo, por la evolución natural e independiente de cada programa.

El teorema de Steiner-Lehmus arrojó, también, otros aprendizajes cuya consolidación tuvo lugar en la década siguiente. Nos referimos al planteamiento de este mismo problema para estudiar la eficacia de una nueva aproximación algorítmica al razonamiento automático, mediante las bases de Gröbner paramétricas y su implementación en el CAS Singular¹⁶, [56, 57, 58, 54].

La figura 6 (también en [58]) muestra, con la misma notación de la figura 4, las posiciones del vértice libre C para la igualdad de un par de bisectores. Ahora las igualdades que verifican diversos trozos de las distintas curvas están obtenidas algorítmicamente —y no de modo puramente gráfico, como en la figura 4— usando el recubrimiento de Gröbner, el *Gröbner Cover*, que nos permite tratar directamente conjuntos constructibles, dados por ecuaciones $=$ e inecuaciones \neq , más allá de los conjuntos algebraicos considerados en los trabajos anteriores. Es esta una línea de investigación que está actualmente en pleno desarrollo, como se recoge en un capítulo específico del reciente libro de Montes [55].

Una última reflexión sobre el trabajo desarrollado por el grupo español en este periodo. Se trata del artículo [26] escrito con la colaboración del joven doctor de la Universidad de Pisa, G. Dalzotto, elaborado durante varias estancias postdoctorales

¹⁵Ha de tenerse en cuenta que en su versión 3.2, en 2009, este programa incluyó por primera vez la herramienta «compás» y no fue hasta la versión 4.2, en 2012, cuando apareció la Vista Algebraica (CAS) a la que se incorporó, poco después, el programa CAS denominado GIAC, [43]; ver <https://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>, <https://en.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Es decir, creemos que GeoGebra tampoco estaba totalmente listo, en la década inicial de este siglo, para albergar un módulo de razonamiento automático.

¹⁶Cuya versión más actualizada puede descargarse a través del enlace que se incluye en <https://mat.upc.edu/en/people/antonio.montes/>

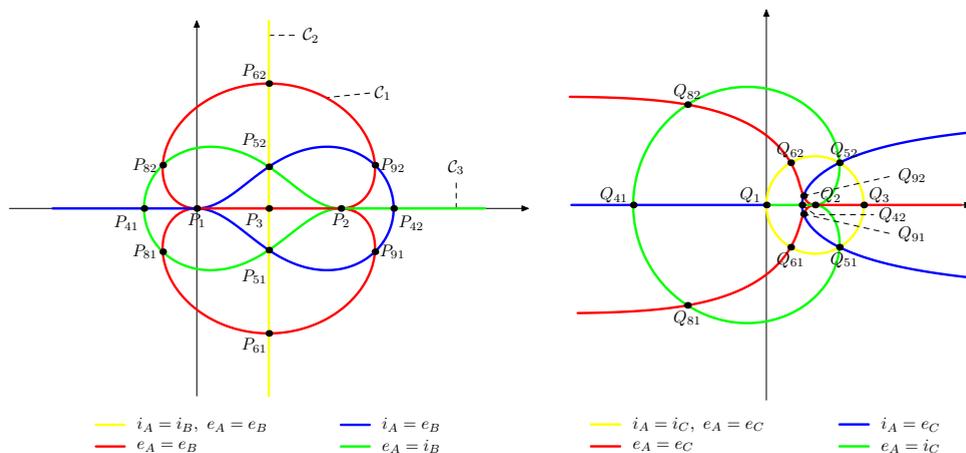


Figura 6: Posiciones del vértice libre para la igualdad de un par de bisectores, determinadas mediante bases de Gröbner comprensivas.

en la Universidad de Cantabria, que fue precedido por el resumen extendido [9], en el que colaboró otro joven investigador español, Carlos Beltrán. En [26] se realiza una reflexión teórica acerca de lo que se podría considerar como un conjunto interesante de hipótesis complementarias (mediante igualdades polinómicas) necesarias para que se verifique una cierta tesis¹⁷ (puesto que, obviamente, la propia tesis puede considerarse como una de tales condiciones, pero *no* es interesante...). Y se concluye que cualquier formulación de condiciones sobre la existencia de tales hipótesis interesantes es equivalente a la propuesta de método para el *descubrimiento* de teoremas realizada en [67], que es la que se ha venido usando a lo largo de la primera década del siglo, en los ejemplos que hemos descrito en esta sección.

Una conclusión a la que también se llega desde el planteamiento, más general, de [68] (publicado en 2012, pero donde se recoge el contenido de una conferencia impartida en el Research Institute for Symbolic Computation (RISC), de Linz (Austria), en 2008), que solo añade la necesidad del estudio sistemático de las consecuencias de la consideración de las bases de Gröbner comprensivas, como en [56], si se estimase oportuna la inclusión generalizada de inequaciones en este contexto de descubrimiento y demostración automáticos.

¹⁷De *Conclusions*, en [26]: «The framework for discovery that we have called FSDIC (Full Set of (Discovery) Interesting Conditions) aimed to be a general approach towards discovery (stating in general terms what we wanted to achieve, rather than how we wanted to achieve it). It turned out that despite the fact that there are, if any, several possible FSDICs, its existence is equivalent to the existence of a very concrete couple of ideals, verifying some simple to check conditions, close to the ones presented in [67]. In this sense the present paper can be thought, after an exhaustive formalization and analysis, as a definitive closure of the main ideas originated there».

3. GEOGEBRA: 2010–2020

En lo que sigue el lector podrá apreciar fácilmente que el trabajo de nuestro grupo de investigación en los diez últimos años ha estado marcado por el programa GeoGebra, al que ya hemos hecho referencia en varias ocasiones en las páginas precedentes. Tres son las razones de fondo para este protagonismo:

- Su planteamiento fundacional (descrito, por ejemplo, en la tesis doctoral de su creador, Markus Hohenwarter, leída en 2006 en la Universidad de Salzburgo), conjugando sistemas de geometría dinámica y cálculo simbólico.
- La presencia de este software en el proyecto europeo Intergeo¹⁸ (2007–2010), del que formaba parte activa nuestro grupo de investigación, y el regreso a Europa del profesor Hohenwarter, en 2010, a la cátedra de educación matemática de la Universidad Johannes Kepler (Linz, Austria), tras unos años de estancia postdoctoral en U.S.A.
- La expansión del programa, de código abierto y gratuito (para uso no comercial), por la comunidad educativa mundial, con más de 5 millones de usuarios en 2010 (ver [37, figura 1]) y más de 100 millones¹⁹ en la actualidad, presente en cerca de 200 países.
- La incorporación a GeoGebra de los primeros comandos de demostración/refutación de un enunciado de geometría, fruto de la tesis doctoral [40] de uno de los autores, Z. K., miembro desde 2010 del equipo oficial de desarrolladores de GeoGebra (esto es, *GeoGebra developer*, tal como aparece en la ventana «About GeoGebra...» de información sobre el software), y responsable en la actualidad del módulo de razonamiento automático GeoGebra.

En efecto. Si el objetivo final de la investigación sobre razonamiento automático en geometría es, precisamente, modelar, desarrollar e implementar algoritmos que permitan abordar de manera mecánica la prueba o refutación de un enunciado geométrico, parece lógico aprovechar —si surge la oportunidad— la posibilidad de aplicar los resultados de la investigación sobre un software que ponga, en la práctica, las herramientas diseñadas por los investigadores en manos del colectivo más importante de usuarios finales, aquellos que están en contacto más frecuente con la geometría elemental: los profesores y alumnos de los distintos niveles educativos. Y esta oportunidad surgió, precisamente, por el contacto de nuestro grupo de investigación con GeoGebra a través del proyecto Intergeo, por las características idóneas de este software para dar un paso más en la tarea que estábamos desarrollando.

Características idóneas, sí, y momento idóneo, también, puesto que el periodo 2007–2010 es el de la mayor expansión internacional de GeoGebra, duplicando en

¹⁸Por diversas razones legales, relacionadas con la actual normativa europea de protección de datos, el portal que recogía toda la documentación y resultados del proyecto <http://i2geo.net>, ya no es accesible al público en general. Pero el lector interesado puede encontrar detallada información sobre el proyecto en [28] o, en español, en [62] o [32], en donde, en particular, se hace referencia al papel de GeoGebra en el proyecto europeo y se detalla el amplio equipo español de profesores de secundaria y universidad que lo desarrollaba.

¹⁹<https://tinyurl.com/elearninginside-geogebra>

2007, y cuadruplicando en 2009, el número de visitantes de 2006 a su página web [37]. Es el periodo en el que tiene lugar la creación (en 2008) del Instituto GeoGebra Internacional, una agrupación de múltiples institutos nacionales o regionales²⁰, a los que se unió, en 2009, el Instituto GeoGebra de Cantabria (IGC)²¹, uno de los primeros de España, fundado en estrecha relación con el proyecto Intergeo y, por tanto, con los miembros de nuestro grupo de investigación sobre razonamiento automático. El protagonismo del IGC en la propuesta y organización de múltiples reuniones de formación de profesores y de intercambio y análisis de experiencias educativas²², en colaboración con la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), ha propiciado la difusión en este colectivo, en innumerables ocasiones a lo largo de esta última década, de los productos finales de nuestra investigación.

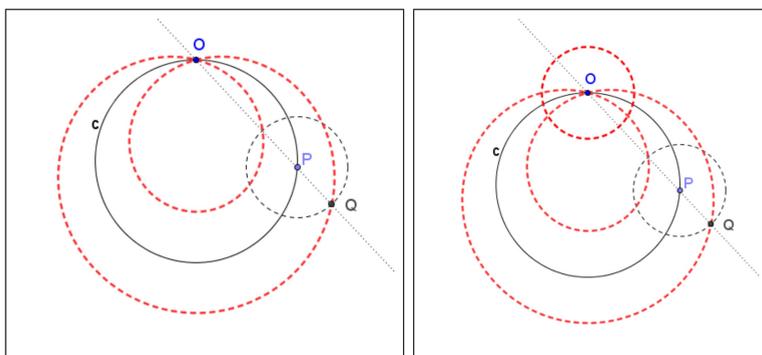


Figura 7: Limaçon de Pascal, descrita, al moverse $P(a, b)$ en el círculo $c = \{a^2 + b^2 - 2^2 = 0\}$, por los puntos $Q(x, y)$ que están en la línea $OP = \{x(b-2) - (y-2)a = 0\}$, con $O(0, 2)$, a una distancia fija igual a 1 de P , es decir, verificando además la condición $\{(x-a)^2 + (y-b)^2 - 1^2 = 0\}$. A la izquierda, la curva «esperada». A la derecha, con un círculo extra, que se produce cuando P coincide con O y la recta OP degenera.

Una investigación que, en este periodo, se ha centrado en cinco líneas de trabajo que describimos someramente a continuación:

1. La implementación y prueba de un conjunto de comandos de razonamiento automático en GeoGebra [11, 2, 3]²³, y de producción automática de teoremas [13], cuyas principales características ejemplificaremos en la siguiente sección.
2. El estudio, mediante algunos experimentos y reflexiones teóricas, de su potencial utilización en diversos contextos metodológicos (resolución de problemas,

²⁰Véase en <http://institutosgeogebra.es> la relación de institutos españoles.

²¹<http://geogebra.es>

²²Véase <http://institutosgeogebra.es/?s=dia+geogebra>, <http://rrrgeogebra.tk>, https://geometriadinamica.es/gg_day2012/index2010.htm

²³Premiado con el *Software Demo Award* en el congreso ISSAC 2016, Waterloo, Canadá, justamente el lugar y la conferencia donde se inició en este tema, 30 años antes, uno de los autores de este trabajo.

aprendizaje por descubrimiento o indagación, etc.) para la enseñanza de las matemáticas [35, 36, 64].

3. El desarrollo de distintos marcos teóricos para

- tratar, con algoritmos de geometría algebraica compleja, esto es, sin necesidad de apelar a métodos de geometría real, mucho menos eficientes, la introducción de tesis o hipótesis involucrando distancias entre puntos, algo muy frecuente en geometría elemental, véase [44];
- determinar, sin el costoso cálculo de una descomposición primaria, aquellos casos que los algoritmos de razonamiento automático indican que son, simultáneamente, verdaderos y falsos, porque la tesis tiene un comportamiento diferente sobre distintas componentes no degeneradas de la variedad de las hipótesis, véase [17] y [45];
- justificar rigurosamente, en el trabajo [65], la validez del método de demostración a través de la comprobación de un número finito de casos;
- analizar, en [48], la forma más adecuada (saturación de ideales, truco de Rabinowitsch, véase en [26, sección 5] una introducción de estos conceptos) de incluir condiciones de no-degeneración entre las hipótesis o de proponer tesis negativas (por ejemplo: dos bisectrices en un triángulo nunca son perpendiculares).

4. El análisis, la modelización, el desarrollo de algoritmos y su implementación en torno a la obtención de lugares geométricos.

Se trata de una de las prestaciones más características de los programas de geometría dinámica, pero presentando, en general, notables deficiencias, tales como la mera representación gráfica y aproximada del lugar geométrico y, sobre todo, la presencia de componentes espurias, de partes del lugar dibujado que no corresponden realmente al lugar que se desea calcular (véase un ejemplo en la figura 7), por la irrupción de casos degenerados o por falta de precisión en la definición del lugar o en su traducción en términos de ecuaciones algebraicas²⁴.

Nuestra contribución se centró, esencialmente, en el desarrollo de una formulación más precisa del concepto de lugar en términos propios de geometría algebraica, a través de una descomposición canónica de ciertos conjuntos constructibles asociados al lugar [4]; en la incorporación de determinados matices a esta formulación en el caso de algunos lugares, como las *envolventes* [15, 18, 19, 20, 42]; en la propuesta de algoritmos de cálculo de lugares siguiendo esta taxonomía, usando métodos tales como el denominado «Gröbner Cover» [1, 5], o «Regular Chains» [16].

El caso de lugares que dependen de múltiples parámetros (es decir, el caso de familias paramétricas de lugares) es una de las tareas que planteamos abordar en un futuro inmediato.

²⁴ Así, el lugar geométrico de la figura 7 podría considerarse simplemente como el resultado de eliminar todas las variables excepto las coordenadas (x, y) del punto Q en el ideal $(x(b-2) - (y-2)a, a^2 + b^2 - 2^2, (x-a)^2 + (y-b)^2 - 1^2)$, pero el resultado es la condición $\{(x^2 + y^2 - 4y + 3)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 9x^2 - 9y^2 + 4y + 12) = 0\}$, producto de la circunferencia de radio 1, centrada en O , y la auténtica limaçon.

5. La aplicación de nuestras herramientas de razonamiento automático en dos ámbitos bien diversos.

Por un lado, en el clásico problema del dibujo de curvas planas mediante mecanismos de barras²⁵, proporcionando en [46] un método mecánico para

- determinar qué curva produce un determinado mecanismo,
- verificar si un mecanismo efectivamente traza la curva que afirma dibujar,
- indicar cómo debe reconstruirse un mecanismo para que dibuje una cierta curva.

Por otro, en el contexto de la realidad aumentada, como un instrumento para aumentar «automáticamente» la realidad geométrica, mediante el proceso que comenzaría con la conversión —por ejemplo, usando la transformada de Hough— de la imagen de un objeto real, tal vez captada con la cámara de un móvil, en una figura de GeoGebra, cuyas propiedades serían analizadas de manera exhaustiva y comunicadas al usuario (un estudiante de arte, una persona con discapacidad visual, etc.), por nuestro «geómetra mecánico», [12].

Como el lector podrá apreciar por la autoría de los trabajos que se mencionan, en este periodo nuestro grupo de investigación se enriqueció con la incorporación de dos nuevos investigadores, M. Abánades, Z. Kovács, de las universidades Rey Juan Carlos (Madrid) y Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz, respectivamente, y la colaboración frecuente de otros muchos colegas: M. Hohenwarter (JKU, Linz), M. Ladra (USC), A. Montes (UPC), M. P. Páez-Guillán (USC), P. R. Richard (Universidad de Montreal, Canadá), C. Sólyom-Gecse (JKU, Linz), por no mencionar sino a los más asiduos.

Un trabajo, lógicamente, que ha sido posible gracias a la financiación de diversos proyectos españoles (MTM2008-04699-C03-03, MTM2011-25816-C02-02, MTM2014-54141-P, MTM2017-88796-P, por citar solo los de esta década) y europeos.

4. UN AUTÓMATA GEÓMETRA

Las herramientas de razonamiento automático (que denominaremos ART, abreviadamente, por sus iniciales en inglés: *Automated Reasoning Tools*) que hemos implementado en GeoGebra son, *grosso modo*, de dos tipos. Por una parte está *GeoGebra Discovery*, accesible en <https://github.com/kovzol/geogebra-discovery>, que incluye GeoGebra Classic 5 —para ordenadores y portátiles, sobre Windows, Mac o Linux— y GeoGebra Classic 6, sobre un navegador, en la página <http://autgeo.online/geogebra-discovery/> (por tanto, válido también para tabletas y teléfonos inteligentes).

En este programa están implementados comandos como (*Relación*, *Comprueba*, *DemuestraDetalles*, *EcuaciónLugar*) que responden a una interpelación concreta del usuario sobre propiedades geométricas de una figura. *Relación* es un extensión simbólica del comando del mismo nombre existente, desde 2002, en GeoGebra, pero de

²⁵En [38] puede verse una presentación actual de este tema, con un enunciado y demostración rigurosos del teorema de Kempe, https://en.wikipedia.org/wiki/Kempe's_universality_theorem

modo puramente numérico [41]. Así, inicialmente, el usuario planteaba el comando *Relación* y señalaba dos objetos geométricos concretos, obteniendo como respuesta la existencia de ciertas relaciones entre ellos, tales como la perpendicularidad, el paralelismo, la igualdad o la incidencia²⁶, siendo advertido en un mensaje que la conclusión obtenida era solo numéricamente válida.

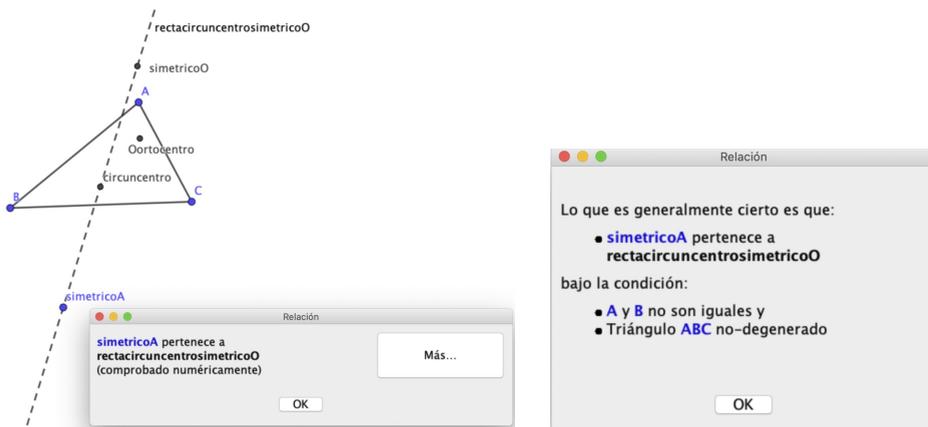


Figura 8: Ejemplo 230 de Chou [24], ejecutado en la versión clásica de GeoGebra 5: Examinar si el simétrico del vértice A de un triángulo (ABC) con respecto al punto medio del lado opuesto, está alineado con el circuncentro del triángulo y el simétrico del ortocentro O con respecto al vértice A .

En la versión actual de GeoGebra, el comando *Relación* responde añadiendo un botón adicional en ese mismo mensaje, con la etiqueta «Más...». Pulsándolo se inician determinados cálculos simbólicos, poniéndose en marcha el sistema ART de GeoGebra, que traduce en términos de ecuaciones polinómicas la figura geométrica y plantea, sistemáticamente, como tesis las posibles relaciones a las que hemos hecho referencia. A continuación selecciona (según ciertas heurísticas) el método de demostración automática, de entre los que tiene GeoGebra implementados²⁷, que considera más adecuado para decidir sobre la tesis.

En la figura 8 se muestra el uso de la herramienta *Relación*, analizando la relación existente entre el simétrico del vértice A y la recta definida por el circuncentro y el simétrico del ortocentro O . Inicialmente, *Relación* confirma numéricamente que A' está en dicha recta. Luego, con «Más...», realiza la comprobación rigurosa.

Los comandos *Comprueba* y *DemuestraDetalles* funcionan de manera similar, excepto que es el usuario quien debe introducir la tesis conjeturada (por ejemplo, este punto está en esta recta), obteniendo como respuesta la verdad o falsedad de su conjetura y, en el caso afirmativo, proporcionando algunas condiciones geométricas

²⁶Ver una lista completa en https://wiki.geogebra.org/en/Relation_Command

²⁷La versión actual de GeoGebra es capaz de elegir, internamente, entre aplicar a) el método de la base de Gröbner, b) el método característico de Wu, c) el método del área, o d) el denominado «método de Recio» de verificación a través de un número finito de casos.

adicionales que deben verificarse para que la afirmación dada sí sea generalmente correcta. Estas son las llamadas condiciones de no degeneración, que habitualmente prescriben que determinados objetos del input (por ejemplo, los vértices de un triángulo definido libremente) no deben coincidir o alinearse, etc., para que la relación conjeturada sea verdadera.

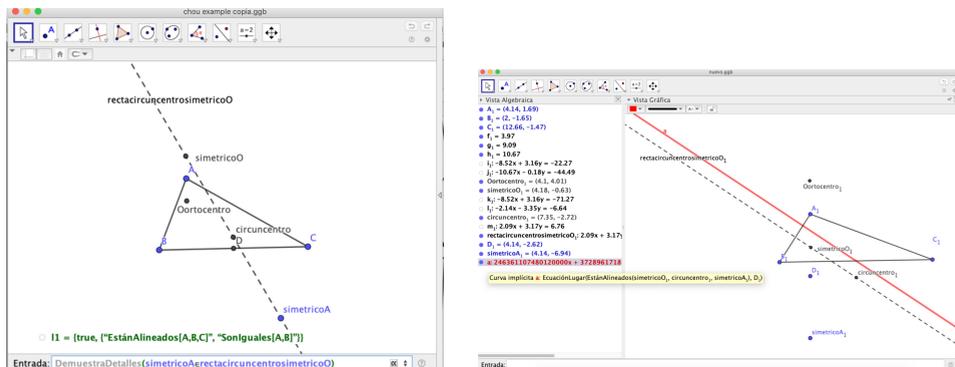


Figura 9: El mismo ejemplo 230 de Chou, a la izquierda, con el comando *DemuestraDetalles*. A la derecha el punto D_1 se ha tomado libremente y el comando *EcuaciónLugar* permite generalizar el ejemplo 230, si se reubica D_1 en la recta a .

En la figura 9, a la izquierda, se presenta el mismo ejemplo 230 de Chou, pero aquí con el comando *DemuestraDetalles*. Se ha superpuesto en la Vista Gráfica la respuesta que aparece en la Vista Algebraica: la confirmación de la verdad de la conjetura salvo casos degenerados. A la derecha de la figura, el punto D_1 se ha tomado libremente y, en este caso, el simétrico del vértice A_1 de un triángulo ($A_1B_1C_1$) con respecto al punto D_1 ya no está alineado con el *circuncentro* $_1$ del triángulo y el simétrico del ortocentro O_1 con respecto al vértice A_1 . El comando *EcuaciónLugar* permite descubrir que es necesario ubicar D_1 en la recta a para la alineación de *simetrico* A_1 , *simetrico* O_1 y *circuncentro* $_1$, generalizando de este modo el ejemplo de Chou y descubriendo, así, un nuevo teorema, como refleja la figura 10.

Un ejemplo de otra naturaleza distinta se incluye en la figura 11, que recoge tres pantallazos de un teléfono móvil, mostrando, a la izquierda, la construcción inicial, un simple cuadrado, sobre el que se ejecuta el comando *Discover(B)*. Este comando busca, de manera automática y combinatoria, toda una serie de posibles relaciones geométricas entre los elementos de la figura en los que se incluya el punto B , para, a continuación, verificar la verdad o falsedad de las mismas. En el centro de la figura se muestra el mensaje con el resultado de la ejecución del comando; y a la derecha, la visualización —también producida de modo automático por GeoGebra— de las propiedades obtenidas.

Otras herramientas de razonamiento automático disponibles a través de las versiones clásicas de GeoGebra, como las relacionadas con la estimación de desigualdades y, en general, el caso específico de los aspectos estrictamente reales de la geometría elemental, están siendo estudiados en la actualidad, y su implementación

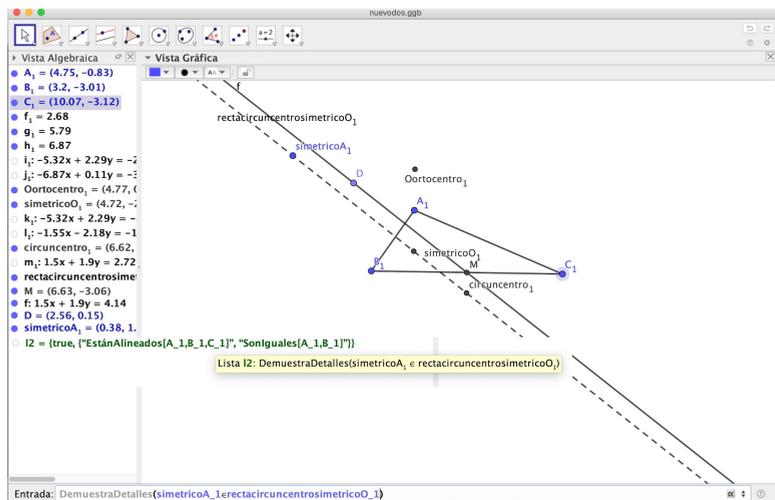


Figura 10: Descubriendo un nuevo teorema: si el punto D_1 se toma en la recta paralela a $rectacircuncentosimetricoO_1$ pasando por el punto M medio del lado B_1C_1 , entonces el simétrico del vértice A_1 respecto de D_1 está en esa misma recta.

se encuentra en fase avanzada de desarrollo, conectando GeoGebra con la versión gratuita de Mathematica sobre Raspberry Pi, [6].

Como se ha indicado anteriormente, estas herramientas de razonamiento automático en GeoGebra están disponibles, no solo en la versión clásica de GeoGebra (que está programada en Java), sino también en la versión web (que es, principalmente, una compilación de máquina de Java a JavaScript, véase [7]). Señalemos, también, que en <https://tinyurl.com/provertest> se encuentra disponible una colección de tests del comportamiento de la actual versión de ART en GeoGebra, involucrando varios centenares de construcciones²⁸.

Debe señalarse que en la versión actual de GeoGebra el usuario no dispone de una prueba visible o legible de la validez del teorema que haya sido verificado usando las herramientas ART. Son, en cierto sentido, una especie de «oráculo» que no proporciona más información salvo la certeza de la corrección de la respuesta. Sin embargo, es preciso insistir en que el resultado obtenido se basa en una prueba matemáticamente correcta, lo que es filosóficamente una verdad de nivel superior y completamente diferente a la alcanzada mediante la verificación *numéricamente aproximada* de la *frecuente* validez de una tesis sobre una colección de *casos particulares*²⁹ obtenidos al arrastrar la construcción dada a diversas posiciones, que ha sido hasta la fecha la forma clásica de trabajar en los sistemas de geometría dinámica.

²⁸Véase en [59, 8] una perspectiva más amplia de la evaluación de las herramientas de demostración automática disponibles en distintos programas de geometría dinámica.

²⁹Es preciso hacer hincapié en que el método tradicional tiene dos diferencias esenciales con el método de prueba a través de un número finito de casos del que hemos hablado anteriormente: los casos son elegidos aleatoriamente, la verificación de cada caso es aproximada.

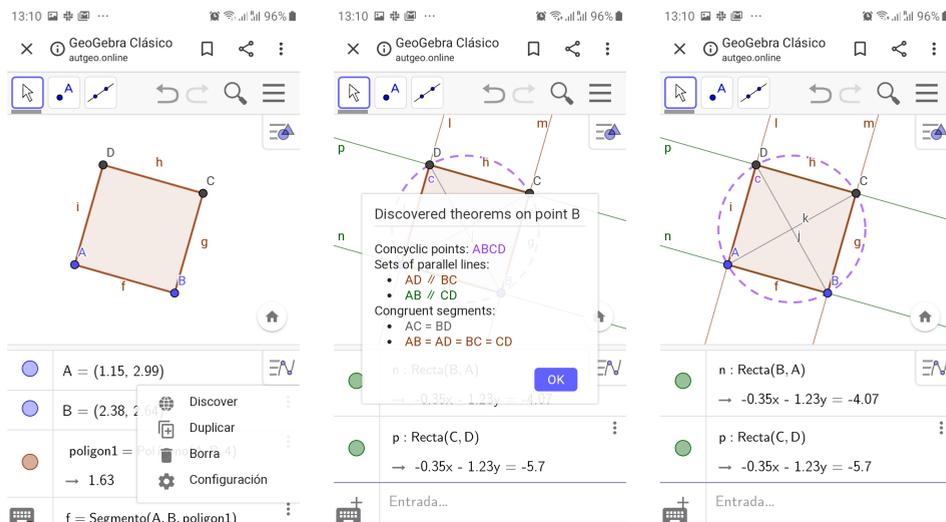


Figura 11: El comando $Discover(B)$ de *GeoGebra Discovery*.

Como hemos indicado, en cierto sentido, las herramientas que acabamos de mostrar son una suerte de oráculo, al que el usuario debe interrogar. Pero un *geómetra mecánico* debe ser capaz de observar e indagar, de manera autónoma, las propiedades geométricas de una figura. Esto ya lo hace, en *GeoGebra Discovery*, el comando *Discover*, pero solo en torno a un punto elegido para centrar la tarea de descubrimiento.

De manera mucho más general, el segundo tipo de herramientas de razonamiento automático que hemos implementado en GeoGebra, el *AG* o *geómetra amateur*, disponible en <http://autgeo.online/ag/>³⁰, parte de una figura dada a la que, de manera sistemática y programada (controlada, en un futuro, por el usuario), va añadiendo diversos elementos (por ejemplo, los puntos medios de los lados de un triángulo dado, las rectas que conectan los vértices con estos puntos medios, etc.). A continuación, el *geómetra mecánico* produce de forma combinatoria —pero que puede ser controlada por el usuario, para evitar una complejidad exponencial— una colección de proposiciones relativas a la colinearidad, paralelismo, etc. entre los diversos elementos existentes (originalmente o añadidos) en la figura. Este protocolo de generación de conjeturas ha sido inspirado por las heurísticas recogidas en [34, p. 44]. Finalmente, el *geómetra mecánico* aplica las herramientas de razonamiento automático para verificar la certeza o falsedad de tales proposiciones.

Un ejemplo del comportamiento de *AG* es el «círculo de los 9 puntos», que puede observarse en la figura 12. Se trata de un triángulo arbitrario ABC , con puntos medios de los lados D , E y F , el ortocentro G y los pies de las perpendiculares H , I y J . Además se incluyen los puntos medios entre los vértices y el ortocentro,

³⁰Véase, para más información, <https://github.com/kovzov1/ag>

K , L y M . Finalmente, el circuncentro N se incluye como la intersección de las mediatrices de dos lados.

La idea es que AG encuentre, sin más ayuda, el teorema que establece las igualdades

$$ND = NE = NF = NH = NI = NJ = NK = NL = NM, \tag{1}$$

esto es, que los puntos D, E, F, H, I, J, K, L y M son concíclicos y que el centro de dicho círculo es N . Se trata del bien conocido teorema, descubierto por Brianchon y Poncelet en 1821, del *círculo de los nueve puntos* o de Feuerbach³¹.

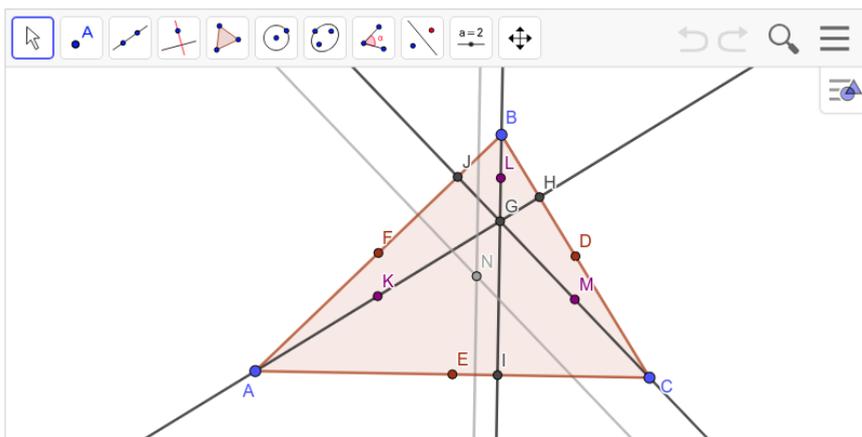


Figura 12: Entrada de AG para la obtención del teorema del círculo de los nueve puntos.

Tras seleccionar este teorema en el catálogo de ejemplos de muestra que vienen en AG , haciendo click en <http://autgeo.online/ag/automated-geometer.html?offline=1>, la figura 12 aparece en la pantalla y el usuario tiene solo que seleccionar algunas relaciones (de las que ofrece un pequeño menú de posibilidades que aparece bajo la imagen) que desea que AG explore. Asumamos, por ejemplo, que optamos por seleccionar *equality of distances between two points* y que pulsamos el botón de *start discovery*. A continuación AG produce, en menos de 26 segundos, en un ordenador portátil³², una lista de 129 «teoremas», entre los cuales se encuentran las igualdades de (1), que forman parte de los resultados 64–71, 84–90, 100–105, 114–118, 120–123, 124–126, 127–128 y 129, tal como se enumeran en la figura 13.

Obsérvese que dicha figura, además, de modo automático, representa con el mismo color aquellos segmentos que tienen la misma longitud, lo que facilita al usuario el descubrir algunos otros resultados, tal vez, inesperados, como las igualdades

$$AK = GK = IK = JK$$

de las que se deriva que A, I, J y el circuncentro G son concíclicos.

³¹https://es.wikipedia.org/wiki/Circunferencia_de_los_nueve_puntos

³²Por ejemplo, en un Lenovo ThinkPad de 8 núcleos, Intel(R) Core(TM) i7-8550U, CPU a 1.80 GHz, con 16 GB de RAM (de 2018).

Select relations to check:

- Collinearity of three points
- Equality of distances between two points**
- Perpendicularity of segments defined by two points
- Parallelism of segments defined by two points
- Concyclicity of four points

The following theorems can be proven:

1. $AE=CE$	14. $AK=IK$	27. $BL=GL$	40. $CM=GM$	53. $DJ=LM$	66. $DN=HN$	79. $EL=FM$	92. $FH=KL$	105. $FN=MN$	118. $HN=MN$
2. $AE=DF$	15. $AK=JK$	28. $BL=HL$	41. $CM=HM$	54. $DK=EL$	67. $DN=IN$	80. $EM=FL$	93. $FI=KL$	106. $GK=IK$	119. $IK=JK$
3. $AE=EH$	16. $BD=CD$	29. $BL=JL$	42. $CM=IM$	55. $DK=FM$	68. $DN=JN$	81. $EM=GK$	94. $FK=GL$	107. $GK=JK$	120. $IN=JN$
4. $AE=EJ$	17. $BD=DI$	30. $CD=DI$	43. $DE=EH$	56. $DL=EK$	69. $DN=KN$	82. $EM=IK$	95. $FK=HL$	108. $GL=HL$	121. $IN=KN$
5. $AE=KM$	18. $BD=DJ$	31. $CD=DJ$	44. $DE=FI$	57. $DL=GM$	70. $DN=LN$	83. $EM=JK$	96. $FK=JL$	109. $GL=JL$	122. $IN=LN$
6. $AF=BF$	19. $BD=EF$	32. $CD=EF$	45. $DE=KL$	58. $DL=HM$	71. $DN=MN$	84. $EN=FN$	97. $FL=GK$	110. $GM=HM$	123. $JN=MN$
7. $AF=DE$	20. $BD=LM$	33. $CD=LM$	46. $DF=EH$	59. $DL=IM$	72. $EF=LM$	85. $EN=HN$	98. $FL=IK$	111. $GM=IM$	124. $JN=KN$
8. $AF=EH$	21. $BF=DE$	34. $CE=DF$	47. $DF=EJ$	60. $DM=FK$	73. $EH=EJ$	86. $EN=IN$	99. $FL=JK$	112. $HL=JL$	125. $JN=LN$
9. $AF=FI$	22. $BF=EH$	35. $CE=EH$	48. $DF=KM$	61. $DM=GL$	74. $EH=KM$	87. $EN=JN$	100. $FN=HN$	113. $HM=IM$	126. $JN=MN$
10. $AF=KL$	23. $BF=FI$	36. $CE=EJ$	49. $DI=DJ$	62. $DM=HL$	75. $EJ=KM$	88. $EN=KN$	101. $FN=IN$	114. $HN=IN$	127. $KN=LN$
11. $AK=EM$	24. $BF=KL$	37. $CE=KM$	50. $DI=EF$	63. $DM=JL$	76. $EK=GM$	89. $EN=LN$	102. $FN=JN$	115. $HN=JN$	128. $KN=MN$
12. $AK=FL$	25. $BL=DM$	38. $CM=DL$	51. $DI=LM$	64. $DN=EN$	77. $EK=HM$	90. $EN=MN$	103. $FN=KN$	116. $HN=KN$	129. $LN=MN$
13. $AK=GK$	26. $BL=FK$	39. $CM=EK$	52. $DJ=EF$	65. $DN=FN$	78. $EK=IM$	91. $FH=FI$	104. $FN=LN$	117. $HN=LN$	

Finished, found 129 theorems among 4095 possible statements.
Elapsed time: 0h 0m 26s

Figura 13: El círculo de los nueve puntos, descubierto por AG .

5. EL FUTURO...

Es obvio que la lista de resultados que proporciona AG es reiterativa, al requerir $8 + 7 + 6 + \dots + 1 = 36$ igualdades para expresar las 8 de la fórmula (1). La simplificación de la salida de AG es, claramente, uno de los temas de trabajo pendientes para el futuro inmediato.

También es obvio que varios de los resultados de AG son simples reformulaciones triviales de los datos de la construcción de partida. Por ejemplo, la primera igualdad $AE = CE$ es evidente, puesto que, por definición, E es el punto medio del segmento AC . Otros resultados, como la segunda igualdad $AE = DF$ (que expresa que la longitud de la paralela media es la mitad del lado correspondiente) pueden ser considerados más o menos obvios, según el nivel de conocimiento geométrico del usuario.

Encontrar un algoritmo —tal vez basado en alguna medida de complejidad (tal vez específica para el contexto de la geometría dinámica, [70]) de las hipótesis y las tesis, y en su peso relativo— que cuantifique el interés de un resultado para una cierta categoría de usuarios es otra de las tareas pendientes, y que ya ha sido iniciada por otros grupos de investigación en el ámbito del *Big Data*, utilizando los resultados

de nuestro autómatas geométricos AG como una fuente de ejemplos cuya relevancia ha de ser discriminada (véase la discusión en [29, 30, 31]).

Ya hemos apuntado anteriormente diversas mejoras y aplicaciones en las que nuestro grupo de trabajo está ya trabajando, tales como la implementación del razonamiento «real», incluyendo, en particular, desigualdades entre las tesis o las hipótesis; o la utilización de AG como un mecanismo de «aumentación» automática de la realidad.

Pero tal vez el problema potencialmente más complejo, a la vez que de mayor impacto, es el estudio de la aplicación y consecuencias de las herramientas de razonamiento automático, de nuestra «calculadora geométrica», de nuestro libro inteligente de geometría, del «i-geometrybook» —para usar la terminología de [27]— en el ámbito educativo.

Por ello, siguiendo aquí la reflexión que hemos plasmado recientemente en [72], creemos que es imprescindible realizar una llamada a la comunidad educativa sobre la necesidad de considerar, seriamente, el rol de estas nuevas herramientas de razonamiento automático que hemos descrito y, en concreto, los posibles cambios que su difusión entre el alumnado pudieran conllevar en la enseñanza de la geometría. Unos cambios similares a los que la aparición y generalización del uso de la calculadora de bolsillo han supuesto ya, y deben suponer aún más, no solo en cómo se han de resolver determinados problemas sino, sobre todo, en qué tipo de técnicas y problemas han de considerarse como objetivos de una enseñanza de las matemáticas en plena era digital.

Este es, en definitiva, el reto que creemos urgente e importante plantear al lector y plantearnos.

REFERENCIAS

- [1] M. ABÁNADES Y F. BOTANA, A Dynamic Symbolic Geometry Environment Based on the Gröbner Cover Algorithm for the Computation of Geometric Loci and Envelopes, *Conferences on Intelligent Computer Mathematics CICM 2013, Bath, 2013* (J. Carette, D. Aspinall, C. Lange, P. Sojka y W. Windsteiger, Eds.), 349–353, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 7961, Springer, 2013.
- [2] M. ABÁNADES, F. BOTANA, Z. KOVÁCS, T. RECIO Y C. SÓLYOM-GECSE, Towards the automatic discovery of theorems in GeoGebra, *Proceedings of the 5th International Conference on Mathematical Software, Berlin, 2016* (G.-M. Greuel, T. Koch, P. Paule y A. Sommese, Eds.), 37–42, Lecture Notes in Computer Science, 9725, Springer, 2016.
- [3] M. ABÁNADES, F. BOTANA, Z. KOVÁCS, T. RECIO Y C. SÓLYOM-GECSE, Development of automatic reasoning tools in GeoGebra, *ACM Communications in Computer Algebra* **50** (2016), 85–88.
- [4] M. ABÁNADES, F. BOTANA, A. MONTES Y T. RECIO, An algebraic taxonomy for locus computation in dynamic geometry, *Computer-Aided Design* **56** (2014), 22–33.

- [5] M. ABÁNADES, F. BOTANA, A. MONTES Y T. RECIO, Software using the Gröbner Cover for geometrical loci computation and classification, *Proceedings of the IV International Conference on Mathematical Software, Seoul, 2014* (H. Hong y C. Yap, Eds.), 492–499, Lecture Notes in Computer Science, 8592, Springer, 2014.
- [6] C. ABAR, Z. KOVÁCS, T. RECIO Y R. VAJDA, Connecting Mathematica and GeoGebra to explore inequalities on planar geometric constructions, *Brazilian Wolfram Technology Conference, São Paulo, 2019*, disponible en <https://www.wolfram.com/events/technology-conference-br/2019/presentations/>
- [7] G. ANCSIN, M. HOHENWARTER Y Z. KOVÁCS, GeoGebra goes web, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology* **7** (2013), 412–418.
- [8] N. BAETA, P. QUARESMA Y Z. KOVÁCS, Towards a Geometry Automated Provers Competition, *Theorem Proving Components for Educational software 2019, ThEdu19* (P. Quaresma, W. Neuper y J. Marcos, Eds.), 93–100, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, 313, 2020.
- [9] C. BELTRÁN, G. DALZOTTO Y T. RECIO, The moment of truth (in automatic proving in elementary geometry), *Actas Automated Deduction in Geometry, Vigo, 2006* (F. Botana y E. Roanes-Lozano, Eds.), 1–15, Universidad de Vigo, 2006.
- [10] F. BOTANA, Bringing more intelligence to dynamic geometry by using symbolic computation, *Symbolic Computation and Education*, 136–150, World Scientific, 2007.
- [11] F. BOTANA, M. HOHENWARTER, P. JANIČIĆ, Z. KOVÁCS, I. PETROVIĆ, T. RECIO Y S. WEITZHOFFER, Automated Theorem Proving in GeoGebra: Current Achievements, *Journal of Automated Reasoning* **55** (2015), 39–59.
- [12] F. BOTANA, Z. KOVÁCS, A. MARTÍNEZ-SEVILLA Y T. RECIO, Automatically Augmented Reality with GeoGebra, *Augmented Reality in Educational Settings*, 347–368, Brill-Sense, 2019.
- [13] F. BOTANA, Z. KOVÁCS Y T. RECIO, Towards an Automated Geometer, *Artificial Intelligence and Symbolic Computation, 2018* (J. Fleuriot, D. Wang y J. Calmet, Eds.), 215–220, Lecture Notes in Computer Science, 11110, Springer, 2019.
- [14] F. BOTANA Y T. RECIO, Towards solving the dynamic geometry bottleneck via a symbolic approach, *Automated Deduction in Geometry, Berlin, 2004* (H. Hong y D. Wang, Eds.), 92–110, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 3763, Springer, 2006.
- [15] F. BOTANA Y T. RECIO, A propósito de la envolvente de una familia de elipses, *Boletín de la Sociedad Puig Adam* **95** (2013), 15–30.
- [16] F. BOTANA Y T. RECIO, Using Maple’s RegularChains library to automatically classify plane geometric loci, *Proceedings of the IV International Conference on Mathematical Software, Seoul, 2014* (H. Hong y C. Yap, Eds.), 500–503, Lecture Notes in Computer Science, 8592, Springer, 2014.

- [17] F. BOTANA Y T. RECIO, On the unavoidable uncertainty of truth in dynamic geometry proving, *Mathematics in Computer Science* **10** (2016), 5–25.
- [18] F. BOTANA Y T. RECIO, Some issues on the automatic computation of plane envelopes in interactive environments, *Mathematics and Computers in Simulation* **125** (2016), 115–125.
- [19] F. BOTANA Y T. RECIO, Computing envelopes in dynamic geometry environments, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence (AMAI)* **80** (2017), 3–20.
- [20] F. BOTANA Y T. RECIO, A proposal for the automatic computation of envelopes of families of plane curves, *Journal of Systems Science and Complexity* **32** (2019), 150–157.
- [21] F. BOTANA Y J. L. VALCARCE, Cooperation between a Dynamic Geometry Environment and a Computer Algebra System for Geometric Discovery, *Computer Algebra in Scientific Computing* (V. G. Ganzha, E. W. Mayr y E. V. Vorozhtsov, Eds.), 63–74, Springer, 2001.
- [22] F. BOTANA Y J. L. VALCARCE, A dynamic-symbolic interface for geometric theorem discovery, *Computers & Education* **38** (2002), 21–35.
- [23] B. BUCHBERGER, G. E. COLLINS Y R. LOOS (EDS.), EN COOPERACIÓN CON R. ALBRECHT, *Computer Algebra: Symbolic and Algebraic Computation*, Computing Supplementum, Springer, 1982.
- [24] S. C. CHOU, *Mechanical geometry theorem proving*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1988.
- [25] S. C. CHOU, X. S. GAO Y J. Z. ZHANG, An introduction to Geometry Expert, *Proceedings of the 13th International Conference on Automated Deduction (CADE-13)*, New Brunswick, NJ, 1996 (M. A. McRobbie y J. K. Slaney, Eds.), 235–239, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 1104, Springer, 1996.
- [26] G. DALZOTTO Y T. RECIO, On protocols for the automated discovery of theorems in elementary geometry, *Journal of Automated Reasoning* **43** (2009), 203–236.
- [27] J. DAVENPORT, J. FLEURIOT, P. QUARESMA, T. RECIO Y D. WANG, Intelligent geometry tools, *Proceedings Second International Workshop on Automated Reasoning: Challenges, Applications, Directions, Exemplary Achievements (ARCADE 2019)*, 51–52, Electronic Proceedings Theoretical Computer Science, 311, 2019.
- [28] M. FIORAVANTI Y T. RECIO, The Intergeo Project, *Electronic Proceedings of “Technology and its Integration into Mathematics Education (TIME)”*, Málaga, 2010. Accesible en http://www.time2010.uma.es/Proceedings/Papers/A017_Paper.pdf.
- [29] H. GAO, Y. GOTO Y J. CHENG, A systematic methodology for automated theorem finding, *Theoret. Comput. Sci.* **554** (2014), 2–21.
- [30] H. GAO, Y. GOTO Y J. CHENG, A set of metrics for measuring interestingness of theorems in automated theorem finding by forward reasoning: A case study in NBG set theory, *Proceedings of the International Conference on Intelligence*

- Science and Big Data Engineering, 2015, part II*, 508–51, Lecture Notes in Computer Science, 9243, Springer, 2015.
- [31] H. GAO, J. LI Y J. CHENG, Measuring interestingness of theorems in automated theorem finding by forward reasoning based on strong relevant logic, *Proceedings 2019 IEEE International Conference on Energy Internet (ICEI), Nanjing, China*, 356–361, IEEE Computer Society Digital Library, 2019.
- [32] M. J. GONZÁLEZ, I. POLO Y T. RECIO, El Proyecto Intergeo, *Investigación en Educación Matemática*, Comunicaciones de los Grupos de Investigación, XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), Santander, 2009 (M. J. González, M. T. González, J. Murillo, Eds.). Accesible en https://www.seiem.es/docs/comunicaciones/GruposXIII/aprenggeom/Gonzalez_Polo_Recio_R.pdf
- [33] M. DE GUZMÁN, An Extension of the Wallace-Simson Theorem: Projecting in Arbitrary Directions, *American Mathematical Monthly* **106** (1999), 574–580.
- [34] M. DE GUZMÁN, *La experiencia de descubrir en geometría*, Nivola, 2002.
- [35] B. HAUER, Z. KOVÁCS, T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, Automated reasoning in elementary geometry: towards inquiry learning, *Pädagogische Horizonte* **2** (2018), 27–39.
- [36] M. HOHENWARTER, Z. KOVÁCS Y T. RECIO, Using GeoGebra Automated Reasoning Tools to explore geometric statements and conjectures, *Proof Technology in Mathematics Research and Teaching*, 215–236, Mathematics Education in the Digital Era, 14, Springer, 2019.
- [37] M. HOHENWARTER Y Z. LAVICZA, The strength of the community: how GeoGebra can inspire technology integration in mathematics, *Model-Centered Learning: Pathways to Mathematical Understanding Using GeoGebra*, 7–13, Sense Publishers, Rotterdam, 2011.
- [38] M. KAPOVICH Y J. J. MILLSON, Universality theorems for configuration spaces of planar linkages, *Topology* **41** (2002), 1051–1107.
- [39] D. KAPUR, Geometry theorem proving using Hilbert’s Nullstellensatz, *Proceedings 1986 Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (SYMSAC’86)*, 202–208, Waterloo, 1986.
- [40] Z. KOVÁCS, *Computer based conjectures and proofs*, Ph.D. Dissertation, Johannes Kepler University, Linz, 2015.
- [41] Z. KOVÁCS, The Relation Tool in GeoGebra 5, *Automated Deduction in Geometry, 10th International Workshop, Coimbra, Portugal, 2014, Revised Selected Papers* (F. Botana y Quaresma, Eds.), 53–71, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 9201, Springer, 2015.
- [42] Z. KOVÁCS, Achievements and challenges in automatic locus and envelope animations in dynamic geometry, *Mathematics in Computer Science* **13** (2019), 131–141.
- [43] Z. KOVÁCS Y B. PARISSÉ, Giac and GeoGebra: improved Gröbner basis computations, *Computer Algebra and Polynomials*, 126–138, Lecture Notes in Computer Science, 8942, Springer, 2015.

- [44] Z. KOVÁCS, T. RECIO Y C. SÓLYOM-GECSE, Rewriting input expressions in complex algebraic geometry provers, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* **85** (2019), 73–87.
- [45] Z. KOVÁCS, T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, Detecting truth, just on parts, *Revista Matemática Complutense* **32** (2019), 451–474.
- [46] Z. KOVÁCS, T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, Reasoning about linkages with dynamic geometry, *Journal of Symbolic Computation* **97** (2020), 16–30.
- [47] B. KUTZLER Y S. STIFTER, Automated theorem proving using Buchberger’s algorithm, *Proceedings 1986 Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (SYMSAC’86)*, 209–214, Waterloo, 1986.
- [48] M. LADRA, M. P. PÁEZ-GUILLÁN Y T. RECIO, Dealing with negative conditions in automated proving: tools and challenges. The unexpected consequences of Rabinowitsch’s trick, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas*, por aparecer, DOI: 10.1007/s13398-020-00874-8.
- [49] R. LOSADA, El color dinámico en GeoGebra, *La Gaceta de la RSME* **17** (2014), 525–547.
- [50] R. LOSADA Y T. RECIO, Descubrimiento automático en un problema centenario, *La Gaceta de la RSME* **14** (2011), 693–702.
- [51] R. LOSADA, T. RECIO Y J. L. VALCARCE, Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del teorema de Steiner-Lehmus, *Boletín de la Sociedad Puig Adam* **82** (2009), 53–76.
- [52] R. LOSADA, T. RECIO Y J. L. VALCARCE, On the automatic discovery of Steiner-Lehmus generalizations, *Proceedings Automatic Deduction in Geometry (ADG), 2010* (J. Richter-Gebert, P. Schreck, Eds.), 171–174, Munich, 2010.
- [53] R. LOSADA, T. RECIO Y J. L. VALCARCE, Equal bisectors at a vertex of a triangle, *Proceedings International Conference on Computational Science and its Applications, 2001, Part IV* (B. Murgante et al., Eds.), 328–341, Lecture Notes in Computer Science, 6785, Springer, 2011.
- [54] A. MONTES, Discusión de sistemas polinómicos con parámetros, *La Gaceta de la RSME* **14** (2011), 527–544.
- [55] A. MONTES, *The Gröbner Cover*, Algorithms and Computation in Mathematics, 27, Springer, 2019.
- [56] A. MONTES Y T. RECIO, Automatic discovery of geometry theorems using minimal canonical comprehensive Gröbner systems, *Proceedings Automatic Deduction in Geometry (ADG), 2006* (F. Botana y T. Recio, Eds.), 113–139, Lecture Notes in Artificial Intelligence, 4869, Springer, 2007.
- [57] A. MONTES Y T. RECIO, Generalizing the Steiner-Lehmus theorem using the Gröbner cover, *Proceedings XIV Spanish Meeting on Computational Geometry* (P. Ramos y V. Sacristán, Eds.), 225–229, CRM Documents, 8, Centre de Recerca Matemàtica, 2011.
- [58] A. MONTES Y T. RECIO, Generalizing the Steiner-Lehmus theorem using the Gröbner cover, *Mathematics and Computers in Simulation* **104** (2014), 67–81.

- [59] P. QUARESMA, V. SANTOS, P. GRAZIANI Y N. BAETA, Taxonomies of geometric problems, *Journal of Symbolic Computation* **97** (2020), 31–55.
- [60] T. RECIO, *Cálculo simbólico y geométrico*, Editorial Síntesis, Madrid, 1998.
- [61] T. RECIO, La mecánica de la demostración y la demostración mecánica, *Actas X Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (E. Palacián y J. Sancho, Eds.), 189–212, Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas/ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2002.
- [62] T. RECIO, El proyecto europeo de geometría dinámica Intergeo, *Boletín de la Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria (SMPC)* **10** (2008), 9–13. Accesible en https://geogebra.es/pub/Conf_Recio_4867d2db9796d.pdf
- [63] T. RECIO Y F. BOTANA, Where the truth lies (in automatic theorem proving in elementary geometry), *Proceedings International Conference on Computational Science and its Applications, 2004*, 761–771, Lecture Notes in Computer Science, 3044, Springer, 2004.
- [64] T. RECIO, P. R. RICHARD Y M. P. VÉLEZ, Designing tasks supported by GeoGebra automated reasoning tools for the development of mathematical skills, *International Journal of Technology in Mathematics Education* **26** (2019), 81–89.
- [65] T. RECIO, J. R. SENDRA Y C. VILLARINO, The importance of being zero, *Proceedings International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, ISSAC 2018*, 327–333, Association for Computing Machinery, 2018.
- [66] T. RECIO, H. STERK Y M. P. VÉLEZ, *Project: Automated Geometry theorem proving*, Some Tapas of Computer Algebra, 276–296, Algorithms and Computations in Mathematics, 4, Springer, 1999.
- [67] T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry, *Journal of Automated Reasoning* **23** (1999), 63–82.
- [68] T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, An Introduction to Automated Discovery in Geometry through Symbolic Computation, *Numerical and Symbolic Scientific Computing: Progress and Prospects*, 257–271, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer, 2012.
- [69] REDACCIÓN DE LA SECCIÓN DE PROBLEMAS Y SOLUCIONES, Los Problemas del Centenario: Concurso de la RSME, con motivo de su centenario, para participantes en el «XII Encuentro Nacional de Estudiantes de Matemáticas», *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), 723–724.
- [70] V. SANTOS, N. BAETA Y P. QUARESMA, Geometrography in Dynamic Geometry, *International Journal for Technology in Mathematics Education* **26** (2019), 89–96.
- [71] J. L. VALCARCE GÓMEZ, *Geometría dinámica inteligente*, Tesis doctoral, Universidad de Vigo, 2003.
- [72] S. VAN VAERENBERGH, T. RECIO Y M. P. VÉLEZ, Herramientas de Razonamiento automático en GeoGebra: qué son y para qué sirven, *Actas del Congreso Iberoamericano: La educación ante el nuevo entorno digital*, Campus Virtual de Congresos de la Asociación Formación IB, UNED, 2019.

- [73] W. T. WU, On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementary geometry, *Scientia Sinica* **21** (1978), 159–172. Republicado en *Automated Theorem Proving: After 25 Years* (W. W. Bledsoe y D. W. Loveland, Eds.), 213–234, Contemporary Mathematics, 29, American Mathematical Society, 1984.
- [74] Z. YE, S. C. CHOU Y X. S. GAO, Visually Dynamic Presentation of Proofs in Plane Geometry, *Journal of Automated Reasoning* **45** (2010), 213–224.

FRANCISCO BOTANA, DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA I, UNIVERSIDAD DE VIGO

Correo electrónico: fbotana@uvigo.es

Página web: <http://fbotana.webs.uvigo.es/>

ZOLTÁN KOVÁCS, PRIVATE PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE DER DIÖZESE LINZ, AUSTRIA

Correo electrónico: zoltan@geogebra.org

Página web: <https://sites.google.com/site/kovzol/>

TOMÁS RECIO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Correo electrónico: tomas.recio@unican.es

Página web: <http://www.recio.tk>

M. PILAR VÉLEZ MELÓN, DPTO. DE INGENIERÍA INDUSTRIAL, UNIVERSIDAD ANTONIO DE NEBRIJA

Correo electrónico: pvelez@nebrija.es