John Conway, el genio mágico

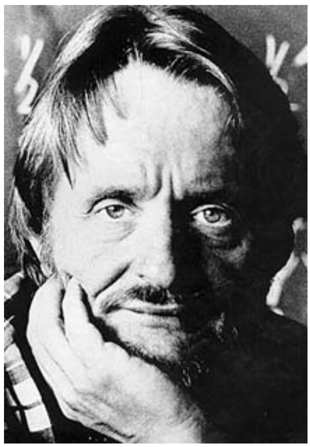
por

Pedro Alegría y Fernando Blasco

... I have said for twenty-five or thirty years that the one thing I would really like to know before I die is why the monster group exists. But I'm almost certain I won't.

John Conway

Introducción



John Horton Conway nació en Liverpool el 26 de diciembre de 1937 y falleció en New Brunswick (New Jersey) el 11 de abril de 2020, una víctima más de la pandemia que asoló la humanidad, valga la redundancia, durante este año.

Las mayores cualidades que le han caracterizado fueron su imaginación desbordante, una inagotable curiosidad, pasión por la divulgación y el gran entusiasmo que mostraba por temas que iban más allá de las matemáticas. Tanto en el aspecto personal y profesional, como afirma su biógrafa Siobhan Roberts, *fue la encarnación en una sola persona de un romántico y un revoltoso, utópico y anarquista.* Según Persi Diaconis, matemático de la Universidad de Stanford, *John Conway es un genio, capaz de pensar sobre cualquier tema, con un verdadero sentido de fantasía. No es posible colocarle en un nicho matemático concreto.* Incluso, para Michael Atiyah, *Conway es el matemático más mágico del mundo entero.* La cantidad de homenajes y reconocimientos que se han prodigado en los medios al conocerse su deceso demuestran la gran influencia que ha ejercido tanto en la comunidad matemática como fuera de ella.

La variedad de áreas en las que incursionó con profundidad le hacen merecedor del apelativo de polímata, versión moderna de hombre del Renacimiento, y en este artículo realizaremos un recorrido biográfico de su persona y su peculiar forma de entender las matemáticas.

1. Formación académica

Siempre destacó en la mayoría de materias durante su etapa escolar pero, incluso desde su infancia, ya dejaba entrever sus grandes dotes e interés hacia las matemáticas. Su madre afirmó que recitaba las potencias de dos cuando tenía cuatro años y también desde muy joven podía calcular el día de la semana de cualquier fecha (con un algoritmo que perfeccionó más adelante). De hecho, al empezar la educación secundaria a los once años, ya manifestó su ambición de convertirse en matemático de Cambridge.

Dicho y hecho, al terminar el bachillerato entró en el Gonville and Caius College de Cambridge —el mismo donde estudió Stephen Hawking y dicen que Sherlock Holmes— para estudiar matemáticas. Parece que el paso a la universidad supuso un cambio de estrategia en su vida pues una vez comentó que

> *When I was on the train from Liverpool to Cambridge to become a student, it occurred to me that no one at Cambridge knew I was painfully shy, so I could become an extrovert instead of an introvert.*

En esta etapa universitaria ya dio muestras del interés que mantuvo durante toda su vida por los juegos de lógica e ingenio: dedicaba su tiempo libre a jugar al backgammon (es el tercero desde la derecha en la fotografía de la figura 1) y suponemos que estudiando constantemente nuevas estrategias, propiedades y variantes que se convirtieron en una constante de su trabajo, como fue el incesante y prolífico recorrido de ida y vuelta entre la matemática recreativa y la matemática «académica».

Figura 1: Jugando al backgammon en Cambridge. Fotografía de Pelham Wilson.

Esa inagotable curiosidad y eclecticismo le hicieron plantearse todo tipo de retos intelectuales, en los que se involucraba hasta sus últimas consecuencias. Por ejemplo, junto a sus compañeros de clase, elaboraron una teoría (que nunca llegaron a publicar) sobre los tetraflexágonos, figuras geométricas inventadas por Arthur Stone —que también se educó en Cambridge y completó su formación en Princeton— y popularizadas por Martin Gardner en uno de sus primeros artículos divulgativos.

Como curiosidad, destacaremos también que, en esta época universitaria, diseñó un prototipo de calculadora de casi dos metros de altura que funcionaba con agua, máquina que bautizó como WINNIE, acrónimo de *Water Initiated Nonchalantly Numerical Integrating Engine.*

2. Carrera profesional

2.1. Periodo inglés

En 1959 terminó la carrera y empezó su etapa investigadora en **Teoría Algebraica de Números** bajo la supervisión de Harold Davenport —considerado como el más destacado de la escuela británica de esa especialidad—, tras haber resuelto el problema de escribir números como suma de potencias quintas, propuesto por el propio Davenport (en el apartado 5.1 trataremos este problema con algún detalle). Su tesis doctoral, titulada «Homogeneous Ordered Sets», fue también dirigida por Harold Davenport y presentada en la Universidad de Cambridge en 1964.

Ese mismo año fue elegido para una beca en el Sidney Sussex College y nombrado profesor de matemática pura en la Universidad de Cambridge. Dedicó sin demasiada fortuna un corto periodo de tiempo a la **Lógica Matemática**, pero su primer gran éxito lo obtuvo en **Teoría de Grupos** resolviendo un problema propuesto por John Leech sobre el orden del grupo de simetrías del —conocido como— retículo de Leech asociado a un denso empaquetamiento de esferas en dimensión 24, donde cada esfera toca a otras 196 560 (problema que abordaremos en el apartado 5.2). Según Martin Gardner, Conway acuñó a propósito de esto la frase *«There is a lot of room up there»*, sugiriendo la gran variedad de problemas matemáticos que se planteaban en ese campo. Este primer artículo, publicado en 1969 [8], supuso el lanzamiento de su carrera y el afianzamiento de su autoconfianza o, en palabras del propio Conway, *«empecé a hacer matemáticas reales».*

En realidad, ya se había cruzado con las matemáticas reales unos años antes. Durante sus estudios en el Caius and Gonville College conoció a Michael Guy[1], y juntos trabajaron en el problema de enumeración de los politopos arquimedianos de dimensión 4. La clasificación de estas figuras había sido sistematizada por H.S.M. Coxeter —uno de los matemáticos más admirados por Conway— y completada por el tándem Conway-Guy[2]. Juntos descubrieron el llamado «gran antiprisma» —anómalo politopo uniforme de dimensión cuatro formado por 320 caras (dos anillos duales de 10 antiprismas pentagonales conectados entre sí por 300 tetraedros, cuya imagen se muestra en la figura 2)—, gracias a una notación ideada por Conway para describir

[1] A través de él conoció a su padre, Richard Guy, con quien mantuvo una estrecha colaboración a lo largo de su vida.

[2] El primer nombre de Michael era John pero se lo cambió después de conocer a Conway pues decía que no podía haber otro John.

los poliedros, y sus resultados fueron publicados en [19] así como en el capítulo 26 del libro «The Symmetries of Things» (2008).

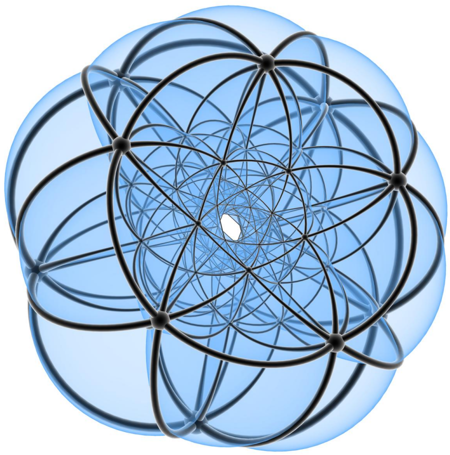


Figura 2: Imagen del gran antiprisma con el programa Jenn3D.

No es común para un matemático —por muy eminente que sea— ser conocido fuera del entorno académico. La presentación en sociedad de Conway se produjo con su incursión en la Inteligencia Artificial, concretamente en el campo de **Autómatas Celulares**, al afrontar el problema que se planteó John von Neumann en la década 1941–50. Éste consiguió encontrar una máquina virtual capaz de fabricar copias de sí misma a partir de una secuencia de complicadas reglas sobre una cuadrícula cartesiana. Después de multitud de intentos, de ensayos fallidos, de adopción de diversos entornos, enunciados de leyes sobre el nacimiento y muerte, incluso con la modificación del número de sexos involucrados, Conway y su equipo de fervientes colaboradores consiguieron simplificar las reglas de von Neumann para llegar a un equilibrio razonable entre la vida y la muerte. Este trabajo dio lugar a la creación del «Juego de la Vida», popularizado por Martin Gardner al ser objeto de su artículo mensual para la sección «Mathematical Games» de la revista *Scientific American* en el número de octubre de 1970 [26]. Los resultados de investigaciones más complejas y teóricas sobre la axiomática de ciertas máquinas automáticas se plasmaron en su primer libro «Regular Algebra and Finite Machines» publicado en 1971.

No era la primera vez que Gardner citaba a Conway en su sección. Ya se había hecho eco del interés mostrado por nuestro protagonista en la **Matemática Recreativa**, publicando en septiembre de 1966 [24] sus resultados sobre un problema combinatorio relativo al empaquetamiento de cuadrados en otros cuadrados (ver [7], que tenía su origen en un problema planteado en 1917 por Henry Dudeney, titulado «Mrs. Perkins's Quilt»), y en julio de 1967 [25] el juego topológico con lápiz y papel titulado «Sprouts» (y su variante «Brussels sprouts»), que habían inventado Conway y Michael Paterson. Estas colaboraciones fueron el inicio de una gran amistad entre ambos personajes, amistad que mantuvieron hasta el fin de sus días. De hecho, John Conway fue un asiduo asistente a los encuentros «Gathering for Gardner» que se celebran bianualmente desde 1993. Esos encuentros han dado lugar a varios libros de reconocimiento a la figura de Martin Gardner y en todos ellos Conway colaboraba con algún artículo. El tercer episodio de la temporada 36 de la serie documental «The Nature of Things» presentada por David Suzuki, titulado «Martin Gardner: Mathemagician», muestra el ambiente que se respira en estos encuentros y John Conway habla de ello. También podemos disfrutar en ese documental de algunas habilidades y juegos de magia de John Conway. Es un importante documento visual. En esos encuentros se le veía frecuentemente rodeado de jóvenes y no tan jóvenes matemáticos, para los que Conway era un auténtico ídolo.

El mismo año 1970, Conway obtuvo una beca en Gonville and Caius College y, en 1973, es ascendido a profesor titular de la Universidad de Cambridge.

Otro ejemplo de que podía navegar por distintas áreas de las matemáticas fue el desarrollo de los números surreales, iniciado también hacia el año 1970. Su motivación inicial era analizar las características del Go, juego milenario de origen oriental. Observó que, cuando el desarrollo del juego estaba suficientemente avanzado, la situación parecía que fuera suma de varios juegos más reducidos. Este hecho le sugirió que ciertos juegos se comportaban en cierto modo como números y el proceso de abstracción que siguió, inspirado por la noción de cortaduras de Dedekind, le hizo concebir esta nueva familia de números, un conjunto ficticio continuo que incluye tanto a los números reales como a los infinitésimos e infinitos, así como *a infinitas clases de extraños números nunca vistos antes por la humanidad.* Conway soñaba que podrían aplicarse para explicar todo, de la incomprensible infinitud del cosmos hasta la infinitésima estrechez del cuanto. En 1972, Conway explicó este nuevo sistema a Donald Knuth (más conocido por la creación del imprescindible lenguaje $\TeX$), quien quedó tan impresionado por sus posibilidades y contenido revolucionario que escribió un libro novelado en forma de diálogos [29] donde bautizó con el nombre «números surreales» a esta nueva clase.

A pesar de que la figura de Conway es más conocida por la invención del Juego de la Vida, él estaba más orgulloso por la creación de los números surreales y, según su propio criterio, fue el mayor logro de su carrera llegando a afirmar que:

> *I used to feel guilty in Cambridge that I spent all day playing games, while I was supposed to be doing mathematics. Then, when I discovered surreal numbers, I realized that playing games IS math.*

Su aportación a la **Teoría de Juegos** fue mucho más extensa. Fruto de su estrecha colaboración con Martin Gardner, publicó en 1976 el libro «On Numbers and Games» donde estableció los fundamentos de la teoría de juegos combinatorios. Además de los juegos ya citados, Conway inventó otros, como el Phutball (fútbol para filósofos) y los soldados de Conway —también llamadas damas de Conway—, que es una variante del solitario en cruz o senku jugado sobre un tablero infinito y cuyo análisis lleva, tras la mágica aparición de la constante áurea, a la inquietante sucesión cuyos únicos términos son $2, 4, 8, \infty$. Junto con Michael Guy (con quien comparte el número de Erdős igual a uno por el artículo [16]), encontraron —durante una tarde de confinamiento por culpa de la lluvia— todas las soluciones del cubo Soma (son 240, excluyendo las rotaciones y reflexiones[3]), inventado por Piet Hein en 1936. Propuso una variante del cubo de Slothouber-Graatsma, que consiste en encajar seis piezas $1 \times 2 \times 2$ y tres piezas $1 \times 1 \times 1$ en un cubo $3 \times 3 \times 3$, esta vez utilizando trece piezas $1 \times 2 \times 4$, una pieza $2 \times 2 \times 2$, otra pieza $1 \times 2 \times 2$ y tres piezas $1 \times 1 \times 3$ para formar un cubo $5 \times 5 \times 5$. También se contagió con la fiebre del cubo de Rubik y era capaz de resolverlo a ciegas después de un breve vistazo a la configuración inicial.

Como resultado de sus investigaciones y la extensa colaboración que mantuvo con Elwyn Berlekamp y Richard Guy, se puede disfrutar del completísimo tratado «Winning Ways for your Mathematical Plays», publicado en 1982.

2.2. Periodo americano

En 1983 fue ascendido a catedrático de matemáticas en Cambridge, pero pronto emigró a Estados Unidos: en 1986 accedió a la cátedra John von Neumann en Matemática Aplicada y Computacional de la Universidad de Princeton, donde se centró en la investigación de las simetrías de retículos cristalinos, ampliando su abanico de intereses matemáticos hacia la **Geometría y Topología Geométrica**. Ideó una original notación para clasificar los poliedros, la cual fue popularizada después por George Hart. Se conoce como polinomio de Alexander-Conway a un invariante de nudos que asigna un polinomio de coeficientes enteros a cada tipo de nudo. Desarrolló la teoría de entrelazados de nudos y se llama notación de Conway a un sistema de notación para tabular los nudos. En la figura 3 se muestra una caricatura realizada por Simon Fraser con la imagen de una esfera cornuda de Alexander[4] en su cabeza.

Figura 3: Caricatura de John «Horned» Conway.

No dejó abandonadas sus anteriores especialidades pues realizó también importantes contribuciones en Teoría de Números, probando en 1993, junto a William Schneeberger, el «teorema 15» sobre formas cuadráticas enteras definido-positivas [14], generalizado en 2005 por Jonathan Hanke y Manjul Bhargava con el «teorema 290». Se interesó en el tema de los cuaterniones

[3]De hecho, probaron que, salvo una, de cada una de las 239 soluciones se puede llegar a otra alterando la posición de no más de tres piezas.

[4]Modelo topológico con propiedades contraintuitivas, características que también se asociaban a la personalidad del propio Conway.

e inventó el sistema de icosianos en álgebra, llegando a publicar la monografía «On Quaternions and Octonions» junto con Derek Smith en 2003.

Una fructífera incursión a la **Mecánica Cuántica** tuvo como resultado el teorema del libre albedrío, desarrollado y demostrado junto con Simon Kochen en 2004 (en la figura 4 aparecen ambos trabajando en el teorema) y publicado posteriormente en [21]. El teorema establece que, si un observador puede elegir libremente lo que va a medir en un experimento particular, entonces las partículas elementales también pueden elegir libremente sus *spins* para hacer que las medidas sean consistentes con las leyes físicas. Su resultado origina un nuevo enfoque de la Mecánica Cuántica al no estar obligatoriamente asociada a las leyes de la probabilidad y aclara una posible paradoja avanzada por Einstein.

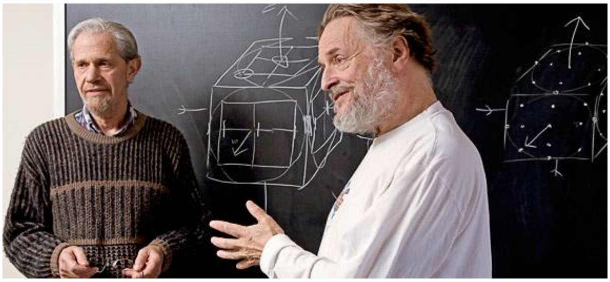


Figura 4: Conway y Kochen explicando el teorema del libre albedrío.

Conway se convirtió en una figura querida y admirada en Princeton, y era frecuente encontrarse con él en la cafetería Small World de la calle Nassau rodeado de estudiantes, profesores y personas interesadas en las matemáticas. También aficionado a la magia, acostumbraba a llevar en sus bolsillos cuerdas, cartas, dados o cualquier material con el que entretener —a la vez que mostrar algunos conceptos matemáticos— a sus acompañantes. Su discípulo y colaborador Manjul Bhargava (medalla Fields en 2014) afirmó que *«yo aprendí rápidamente que el juego y el trabajo en matemáticas eran para él dos actividades estrechamente relacionadas, si no la misma actividad»*. Como profesor se manifestaba de forma entusiasta y siempre estaba dispuesto a compartir sus conocimientos y a discutir todo tipo de temas. Por ejemplo, David Gabai cuenta que *«un día, al estrechar su mano, me aseguró que estaba a cuatro manos de distancia de Napoleón, empezando por mí, siguiendo por él, Bertrand Russell, Lord John Russell y Napoleón»*. Su última esposa, Diana, comentaba que constantemente recibía verdaderas montañas de correos por parte de sus admiradores.

Después de 26 años ocupando su plaza, pasó a profesor emérito en 2013. Como ya hemos indicado, a lo largo de su carrera, Conway realizó aportaciones significativas en Teoría de Grupos, Teoría de Números, Álgebra, Topología Geométrica, Física Teórica, Teoría de Juegos Combinatorios y Geometría. En palabras de su amigo y colaborador Simon Kochen, *«era como una mariposa aleteando de un tema a otro, siempre consiguiendo resultados de calidad mágica»*.

Figura 5: Aspecto de la oficina de Conway en Princeton. Fotografía de Dith Pran/The New York Times.

A partir de los datos del portal Mathematics Genealogy Project, dirigió entre la Universidad de Princeton y la Universidad de Cambridge 21 tesis doctorales, y, a la fecha de su fallecimiento, tenía 126 descendientes matemáticos.

3. Reconocimientos y galardones

Desde el año 1971, cuando recibió el «Premio Berwick» por la London Mathematical Society, no ha dejado de cosechar galardones y reconocimientos académicos. Fue nombrado socio de la Royal Society of London en 1981 y, en 1992, miembro de la American Academy of Arts and Sciences. Recibió en 1987 el «Premio Pólya» de la London Mathematical Society, y en 1998 el «Premio Frederic Esser Nemmers» en matemáticas por la Northwestern University, concebido para reconocer a quienes consiguen resultados sobresalientes en su disciplina que aportan destacadas contribuciones a nuevos conocimientos. El año 2000 recibió el premio «Leroy P. Steele for Mathematical Exposition» de la American Mathematical Society, reconociendo sus múltiples trabajos expositivos sobre autómatas, teoría de juegos, retículos, teoría de códigos, teoría de grupos y formas cuadráticas. En 2001, el Dickinson College de Carlisle (Pennsylvania) le concedió el «Joseph Priestley Award», y fue nombrado «Doctor Honoris Causa» por la Universidad de Liverpool en 2001 y por la Universidad Jacobs de Bremen en 2015.

No lo consiguió pero fue nominado al premio Abel, sobre todo por sus aportaciones en teoría de grupos, incluso antes de que la mayor parte de sus trabajos hayan tenido aplicaciones prácticas. Por ejemplo, su colega de Princeton, Peter Sarnak, aseguró que *«The surreal numbers will be applied, it's just a question of how and when»*.

El 11 de abril de 2010, Alex Bellos publicó en el periódico *The Guardian* [4] una lista (personal) de los 10 genios matemáticos de la historia cuyos revolucionarios descubrimientos cambiaron nuestro mundo. Rodeado por Gauss, Euler y otras eminencias aparece el nombre de John Conway, quien era un poco renuente a esta nominación, por una parte creyendo que era debido al «Juego de la Vida» y, por otra, porque la lista no incluía nombres tan destacados como Arquímedes o Newton.

4. El puzle de su vida

Cuando le preguntaban cómo podía inventar un juego nuevo o una nueva estructura matemática, Conway respondía:

> *Nadie más antes que yo ha sido tan estúpido como para inventar esta regla. Pero si alguien más lo hubiera hecho antes que yo, habría encontrado exactamente la misma regularidad que yo. En cierto sentido, ese mundo abstracto existió intelectualmente por siempre y para siempre. Imagina un planeta deshabitado lleno de cosas interesantes. Ha existido durante un millón de años, pero ninguna persona ha estado allí, ningún ser sensible la ha visitado. Hay lugares como ese, estoy seguro. Pero no hace falta viajar: puedes sentarte en esta silla y encontrar lo que es y existió por toda la eternidad y ser la primera persona en explorarlo.*

A Conway también se le aplicó el apelativo «genio mágico», término acuñado por Mark Kac para describir al físico Richard Feynman, por ser no solo más inteligente que la mayoría de la gente, sino porque su mente trabaja por caminos avanzados e insondables.

Figura 6: Conway trabajando con su bebé en brazos.

¿Sería necesario, en un recorrido vital para tener una visión completa de un personaje tan singular, que citemos que tuvo un intento de suicidio, que le fue realizado un triple by-pass, que estuvo casado tres veces y que tiene tres hijos y cuatro hijas, la mayor nacida en 1962 y el menor en 2001? Dejaremos que sea el lector o lectora quien decida si esta información es oportuna.

5. Selección de problemas seleccionados

Como ya hemos apuntado, a menudo se dedicaba a sus «entrañables trivialidades», algunas de las cuales han tenido mucha repercusión y han sido objeto de estudios más profundos. Quizá uno de los motivos de esta repercusión haya sido la aparición regular de sus ideas en las páginas de la sección «Mathematical Games» de Martin Gardner. Como es bien sabido, los artículos de esta sección han sido publicados posteriormente en una colección de quince libros. Pues bien, en los trece últimos volúmenes aparecen contribuciones de John Conway, y muchas de ellas consisten en capítulos completos de sus originales ideas e invenciones. Incluso, en el séptimo volumen de la colección (ver [27]) aparece la siguiente dedicatoria de Martin Gardner:

> *To John Horton Conway, whose continuing contributions to recreational mathematics are unique in their combination of depth, elegance and humor.*

Ya hemos citado algunas de sus líneas de investigación en las secciones anteriores, y ahora queremos desarrollar brevemente algunas de ellas pero, a diferencia de los números surreales, la lista será cerrada y acotada, con la pretensión de abrir el apetito para los paladares más exquisitos. Un breve recorrido por la red nos permitirá encontrar otros ejemplos, nuevos problemas y selecciones diferentes (ver, por ejemplo, [32]). Incluso, en [15] se puede encontrar una lista de problemas por cuya solución Conway ofrecía 1000 dólares.

Para abrir boca, enunciamos el famoso problema de los magos que Conway ideó a principios de los años 60:

> *La otra noche me senté en el autobús detrás de dos magos. Esta fue su conversación:*
> *—Mago A: «Tengo un número entero no negativo de hijos, cuyas edades son números enteros no negativos, su producto es mi edad, y su suma el número del autobús.»*
> *—Mago B: «Aparte del número del autobús, no me das muchas pistas. Quizá si me dijeras tu edad y el número de hijos que tienes, yo podría averiguar las edades de tus hijos.»*
> *—Mago A: «No, no podrías.»*
> *—Mago B: «¡Ah! ¡Entonces ya sé tu edad!»*
> *¿Cuál es el número del autobús?*

5.1. El problema de las potencias quintas

En 1779, Edward Waring conjeturó que todo número natural puede expresarse como suma de cierta cantidad de potencias del mismo orden. Dicha conjetura fue probada por David Hilbert en 1909 pero sin determinar, para el caso general, cuál es el mínimo número de potencias necesarias para representar todos los números. Ya era conocido que todo número es suma de 4 cuadrados, 9 cubos y 73 potencias sextas. Parece que el caso de las potencias quintas interesaba a Davenport —seguramente porque su director de tesis doctoral fue John Littlewood quien, junto con Godfrey Hardy, desarrolló un método general de solución— y se lo planteó a Conway. Como narra su biógrafa Siobhan Roberts en [36], todos los jueves se reunían ambos para discutir el problema, pero a Conway no parecía interesarle demasiado. Al final pudo tanto la sensación de culpabilidad por no dedicar ningún esfuerzo al problema que se propuso como plazo un verano en su casa de Liverpool para resolverlo. Seis semanas de dedicación exclusiva dieron sus frutos pero, cuando presentó el trabajo completo a su supervisor, este le desalentó pues no proporcionaba nuevas ideas que le dieran consistencia de tesis doctoral. Poco después, en 1964, Chen Jingrun publicó la solución, demostrando que hace falta al menos 37 potencias quintas para garantizar que cada número natural se puede expresar como suma de tales potencias.

5.2. El problema del retículo de Leech

En el primer volumen del *Bulletin of the London Mathematical Society* de 1969 [8], Conway publicó su descubrimiento de un nuevo grupo simple esporádico de orden 4 157 776 806 543 360 000 (cuatro trillones y pico) —popularmente conocido como *Constelación de Conway*—, que es el grupo de simetrías del retículo de Leech. Además, dos de sus subgrupos también eran grupos simples no conocidos hasta el momento, y otros de ellos tenían como imágenes homomorfas a todos —excepto dos de— los grupos simples esporádicos finitos entonces conocidos. Más adelante, colaboró en la obra colectiva «Atlas of Finite Groups», publicada en 1985, donde se detallaban las principales propiedades de 93 de dichos grupos esporádicos.

En la misma revista publicó posteriormente dos artículos relacionados con los grupos simples, [17] en colaboración con Cameron Gordon y [22] en colaboración con Simon Norton, este último sobre el grupo monstruo (o gigante amistoso como lo llamaba Conway), el mayor de los grupos esporádicos. Eligieron el término «Monstruous Moonshine» como la teoría que establece una conexión entre el grupo monstruo y las funciones modulares. Posteriores resultados de dicha teoría fueron demostrados en 1992 por Richard Borcherds, el único entre los «hijos académicos» de Conway que fue galardonado con una medalla Fields, en 1998.

5.3. El Juego de la Vida

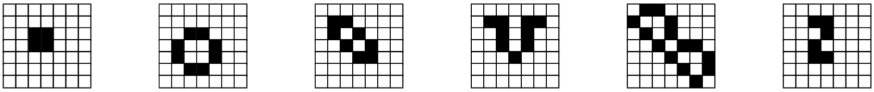
John Conway ideó el *Juego de la Vida* en 1970. Ese año, Martin Gardner lo presentó en el número de octubre de la *Scientific American* [26] como un solitario, al tiempo que decía que era un «fantástico pasatiempo». El juego de la vida puede pensarse como un modelo muy sencillo de vida artificial y sobre él se siguen publicando numerosos artículos todos los años. Recordemos en qué consiste este pasatiempo.

Se juega sobre una cuadrícula y a cada uno de los cuadrados unitarios que la forman lo llamaremos *célula*. Cada célula tiene dos estados: o está viva (la representaremos coloreada en negro) o está muerta (se deja de color blanco). Es inmediato ver que cada célula (salvo las que se encuentran en los bordes de un tablero finito) está rodeada por otras 8: arriba, abajo, derecha, izquierda y noroeste, noreste, sureste y suroeste (i.e., las que están en diagonal con esa célula). La evolución del sistema de células responde a cuatro reglas muy sencillas relacionadas con el nacimiento y la muerte:

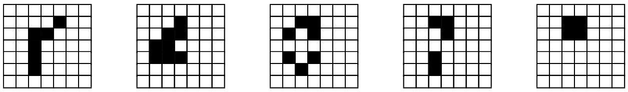
1. Una célula viva con una o ninguna célula vecina viva se muere, por aislamiento.
2. Una célula viva con 2 o 3 células vecinas vivas permanece viva, porque su entorno es el adecuado.
3. Una célula viva con más de 3 células vecinas vivas se muere, debido a la superpoblación.

4. Una célula muerta con exactamente 3 células vecinas vivas nace y en el siguiente turno estará viva, debido a la reproducción.

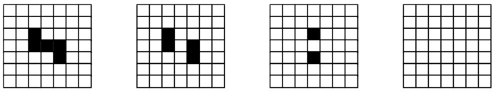
Estas reglas extremadamente simples dan lugar a evoluciones del sistema bastante complejas y sorprendentes. Por ejemplo, hay *puntos fijos* —configuraciones que no cambian— como los siguientes:



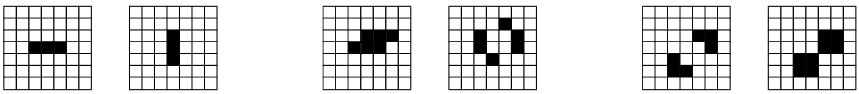
Podemos encontrar configuraciones que evolucionan hacia un patrón estable, como en



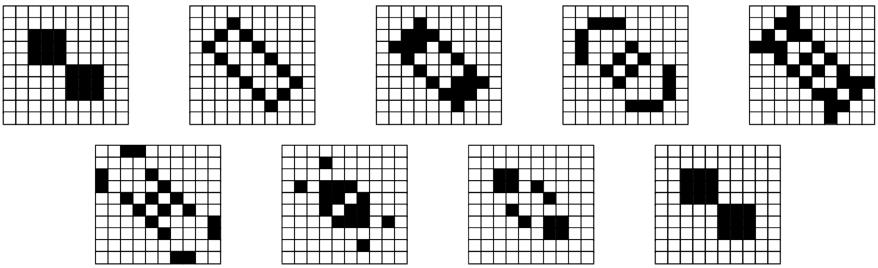
y otras que conducen a la extinción de todas las células, como esta:



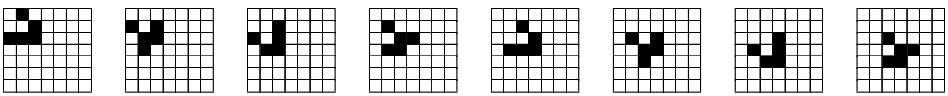
Hay también configuraciones cíclicas, con diferentes periodos. Los ejemplos que mostramos a continuación son de periodo 2:

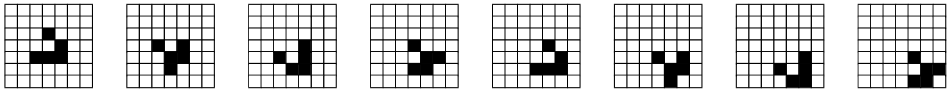


Pero también es posible encontrar configuraciones cíclicas más interesantes, con periodos más largos



junto con configuraciones iniciales que ni son cíclicas ni estables. Una de las más frecuentes y ultilizadas es la denominada «glider» (descubierta por Richard Guy en 1970), que se desplaza diagonalmente a lo largo de todo el tablero:

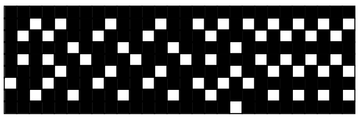




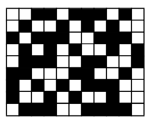
La implementación del juego de la vida se ha convertido en un clásico en las asignaturas de programación, pero también se pueden encontrar, en la red, lugares donde poder ensayar el comportamiento de las configuraciones que se nos ocurran, como en `https://bitstorm.org/gameoflife/`.

El juego de la vida no solo nos permite simular la existencia de vida artificial sino que tiene muchas otras implicaciones. Por ejemplo, a partir de diferentes patrones, se puede construir una máquina universal de Turing [34], y también se ha estudiado cómo crear puertas lógicas a partir de diferentes elementos del juego de la vida [35]. Además, las reglas que diseñó Conway para este pasatiempo pueden cambiarse, con lo que obtenemos modelos distintos de evolución. Podríamos también cambiar la cuadrícula en la que se juega por una teselación diferente como, por ejemplo, una teselación hexagonal o pentagonal [3], o incluso ir un paso más allá y definir las reglas para un juego de la vida tridimensional o, incluso, en dimensiones superiores [2].

Analizar el juego de la vida es fascinante. Hay configuraciones que solo pueden ser un punto de partida, esto es, no proceden de una evolución de un estado del juego de la vida. Estas configuraciones se conocen como «Jardines del Edén», puesto que describen una situación que solo puede darse en el principio de los tiempos [37]. El primer jardín del Edén fue descrito por Roger Banks en el MIT en 1971:



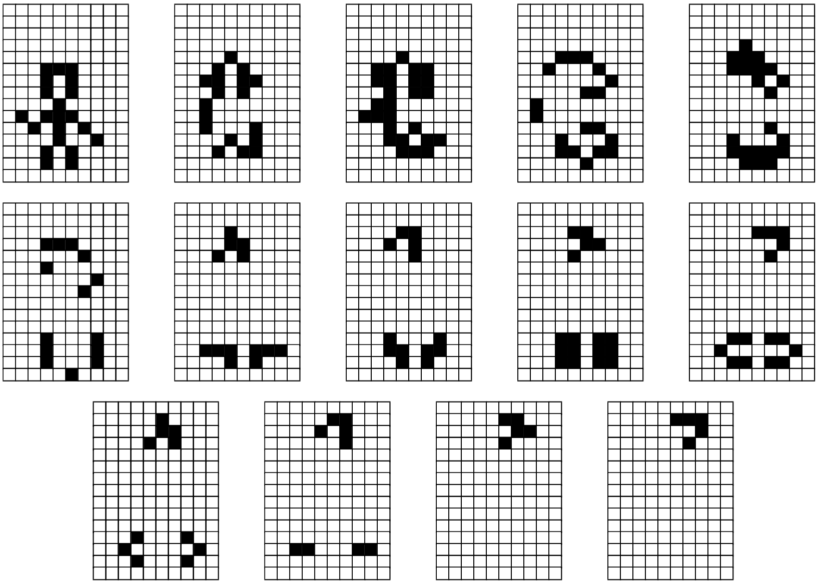
Y el más pequeño es el descubierto por Steven Elker en 2017:



Quedan muchos retos: desde descubrir jardines del Edén aún más pequeños hasta resolver problemas abiertos como determinar si existe una configuración a la que se pueda llegar de modo único en el tiempo. Conway ofreció un premio de 50 dólares a quien pudiera encontrarla o probar que no existe.

Son muchas las anécdotas referidas al juego de la vida. Quizás la más curiosa sea escuchar a Conway decir que lo odia. La razón de este odio: él ha hecho muchas otras contribuciones a las matemáticas, a su juicio mucho más importantes que esta que concibió como un pasatiempo, pero siempre se le reconoce como el inventor de este juego. También es curiosa la historia del fallido homenaje que se pretendió tributar a Conway en la fachada de la estación de ferrocarril de Cambridge: aparentemente se trata de reproducir una configuración del juego de la vida, pero en realidad sigue la lógica de otro autómata celular, la «Regla 30» de Wolfram. El resultado final es un homenaje a Stephen Wolfram, que perteneció a la Universidad de Oxford, la institución rival de Cambridge.

Terminamos con el homenaje que le ha hecho Randall Munroe a través de su página de cómics *xkcd* [33]. Comienza con un personaje, que representa a John H. Conway, y continúa con su evolución hasta llegar al «glider» que asciende hasta el Olimpo de las Matemáticas:



5.4. Algoritmo del juicio final «doomsday»

En el volumen 35 del 31 de marzo de 1887, apareció en *Nature* un artículo escrito por Lewis Carroll (pseudónimo del matemático Charles Dodgson) —titulado *«To find the day of the week for any given date»*— que empezaba así:

> *Having hit upon the following method of mentally computing the day of the week for any given date, I send it you in the hope that it may interest some of your readers. I am not a rapid computer myself, and as I find my average time for doing any such question is about 20 seconds, I have little doubt that a rapid computer would not need 15.*

El método allí presentado fue la inspiración que necesitó Conway para desarrollar su algoritmo en 1973 (publicado en [10]). La clave de su método es el hecho de que determinados días siempre caen en el mismo día de la semana para un año determinado. A continuación, unos sencillos cálculos permiten determinar estas fechas para el resto de los años.

1. En primer lugar, se define el día clave de un siglo cualquiera:
   - Años $15xx$, $19xx$, $23xx$, ..., MIÉRCOLES.

- Años 16xx, 20xx, 24xx, …, MARTES.
- Años 17xx, 21xx, 25xx, …, DOMINGO.
- Años 18xx, 22xx, 26xx, …, VIERNES.

2. En segundo lugar, se determina el día clave de un año cualquiera de un siglo cualquiera:
   - Si el año es $AAxx$, se divide xx por 12 y se obtiene el cociente C y el resto R.
   - Se divide el resto R por cuatro para obtener el nuevo cociente D.
   - Se suman $C + R + D$.
   - A partir del día clave del siglo, se van añadiendo de uno en uno tantos días como el último número obtenido.
3. El último paso consiste en conocer un día de cada mes que caiga el mismo día de la semana que el día clave del año —lo que Conway denominó «doomsday»—. Estos días son los siguientes:
   - 4/4, 6/6, 8/8, 10/10 y 12/12.
   - 9/5, 5/9, 7/11 y 11/7.
   - 0/3 (el día anterior al 1/3) y 14/3 (día de π).
   - En años no bisiestos, 0/2 (o 31/1) y 3/1; en años bisiestos, 4/1 y 1/2.
   - Una fecha muy importante para los estadounidenses: el 4/7.

Así, por ejemplo, para calcular el día de la semana del 26 de diciembre de 1937, haremos lo siguiente:

1. Por ser año 19xx, el día clave del siglo es miércoles.
2. Como 37 entre 12 da cociente 3 y resto 1, y 1 entre 4 da cociente 0, el día clave del año es domingo (miércoles más 4).
3. Como el 12 de diciembre es domingo, también lo es el 26, de modo que Conway nació un domingo.

Mediante un cálculo similar se llega a que el día de su fallecimiento fue sábado.

5.5. Sucesiones con nombre propio

Han pasado de ser simples entretenimientos a formar parte importante de problemas más complejos algunas sucesiones que llevan su firma. Describiremos brevemente una pequeña selección de ellas.

5.5.1. Sucesión «look-and-say» o audioactiva

Echa una *mirada* a esta sucesión:

$$1, 11, 21, 1211, \dots$$

Ahora trata de *decir* el siguiente elemento. Si lo consigues, tendrás también la forma de generar toda la sucesión.

El nombre *look-and-say* no está dado porque basta una mirada para deducir la forma de la sucesión sino porque se construye precisamente verbalizando cada elemento y agrupándolos por valores. Así, el primer elemento es un 1, lo cual se lee —y se escribe— como 11. Ahora vemos dos unos, es decir 21. Este elemento consta de un 2 y un 1, es decir 1211. Este nuevo elemento se lee como un uno, un 2 y dos unos, de modo que se escribirá 111221. El siguiente sería 312211. Así como es fácil ahora determinar el siguiente elemento de la sucesión, no lo es determinar una fórmula para el término general.

Sucesiones similares se pueden generar con cualquier valor inicial. Podemos destacar la «sucesión aburrida» que empieza y termina en 22.

Desde el primer trabajo de Conway [11] se han ido conociendo algunas propiedades elementales —y no tan elementales— como las siguientes:

1. Ningún elemento de la sucesión contiene otras cifras distintas de 1, 2 o 3.
2. Todos los elementos terminan con la cifra 1.
3. Si L_n es el número de cifras del n-ésimo elemento, la razón L_{n+1}/L_n tiene como límite la constante de Conway, $\lambda = 1.303577269034296\ldots$, que es un número irracional algebraico y es la única raíz real positiva del siguiente polinomio de grado 71 (que tiene otras dos raíces reales negativas y 68 raíces complejas):

$$\begin{aligned}
x^{71} &- x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} \\
&- x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} \\
&+ x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} \\
&- 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} \\
&- 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} \\
&+ 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} \\
&+ 5x^{9} + x^{7} - 7x^{6} + 7x^{5} - 4x^{4} + 12x^{3} - 6x^{2} + 3x - 6 = 0.
\end{aligned}$$

   Esta propiedad es también cierta para cualquier valor inicial, excepto 22 como ya indicamos.

4. La propiedad anterior es consecuencia del llamado **teorema cosmológico de Conway**:

   > *Si consideramos la cadena de cifras de un elemento de la sucesión, desde una cifra en adelante, la sucesión se desintegra, es decir, todos salvo un número finito de los elementos de la sucesión pueden descomponerse en 92 sub-términos primitivos, a los que Conway llamó elementos atómicos (como analogía a los elementos químicos de la tabla periódica desde el hidrógeno hasta el uranio).*

   La lista de estos elementos empieza con el 3, correspondiente al uranio (elemento 92) y termina con el 22, correspondiente al hidrógeno. El inicio de la cadena es el siguiente: 3 (U), 13 (Po), 1113 (Th), 3113 (Ac), 132113 (Ra), 1113122113 (Fr), 311311222113 (Rn). La «desintegración» de Rn nos lleva a 13211321322113 y este debería ser el elemento correspondiente al At, pero (como veríamos si siguiéramos avanzando en esta cadena) al elemento 67, el holmio, le correspondería el 1322113, con lo que la desintegración de Rn sería 1321132.Ho y por eso reservamos 1321132 únicamente para At. En este caso Rn proporciona dos subproductos: At y otro que se identificará después pero que es Ho. Siguiendo este proceso hasta casi el final llegaríamos al helio He cuya secuencia asociada es 13112221133211322112211213322112 (una de las secuencias primitivas más largas) y que se desintegraría en

$$11132132212312211322212221121123222112$$

la cual, a su vez, se podría escribir como Hf.Pa.22.Ca.Li (las secuencias correspondientes al hafnio, paladio, calcio y litio habrían sido determinadas con anterioridad), con lo que el hidrógeno, curiosamente, se asocia con el 22, que da lugar a la sucesión aburrida o que, mirado de otra manera, es un elemento estable.

Las dos demostraciones que Conway poseía se perdieron (quizá como consecuencia de su legendario descuido con sus papeles), pero llegó al fin en 1997 una demostración por parte de Doron Zeilberger y (su ordenador personal que aparecía como coautor) Shalosh Ekhard [23].

5.5.2. Sucesión de Hofstadter-Conway

Se conoce con este nombre a la sucesión —estudiada de forma independiente por ambos— definida de forma recursiva como

$$a(1) = a(2) = 1, \quad a(n) = a(a(n-1)) + a(n - a(n-1)).$$

Los primeros valores son $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 10, \dots$

En una charla dictada en los laboratorios AT&T Bell en julio de 1988 y titulada *«Some Crazy Sequences»*, Conway probó que $\lim a(n)/n = 1/2$. En particular, $a(2^n)/2^n = 1/2$. Además, ofreció un premio de 10 000 dólares a quien descubriera el valor de n para el cual $|a(i)/i - 1/2| < 1/20$, para todo $i > n$. La oferta de este premio proporciona una curiosa anécdota sobre la forma de ser de Conway y algunos problemas que le dio su conducta: resultó que Colin L. Mallows estaba entre el público de esa conferencia, aceptó el reto y fue capaz de hallar como mínimo valor $n = 1489$ y, tras verificar la prueba de Mallows, Conway le envió el cheque por valor de 10 000 dólares. Él mismo relata que se confundió: creía haber ofrecido 1000 dólares y no 10 000, pero AT&T Bell había grabado la conferencia y en ella se veía que el premio ofertado era de 10 000 dólares, aunque tras haberle enviado el cheque expuso la situación a Mallows y este aceptó cobrar el cheque de 1000 pero conservó el de 10 000, firmado por Conway, enmarcándolo y exhibiéndolo en su casa [31, 30].

5.5.3. Sucesión RATS (Reverse, Add, Then, Sort)

Con el acrónimo RATS se representa una sucesión que se construye de la manera siguiente:

- El primer elemento es cualquier número natural con sus cifras en orden creciente.
- A continuación se invierten las cifras y se suman ambos números.
- Se ordenan las cifras del resultado en orden creciente para obtener el segundo elemento de la sucesión.
- Los elementos sucesivos se definen de forma análoga.

Ejemplos:

1. $123, 444, 888, 1677, 3489, 12333, \ldots, 222, 444, 888, \ldots$ Se llega a un ciclo de orden ocho.
2. $1, 2, 4, 8, 16, 77, 145, \ldots$ Esta sucesión es infinita pues se llega a un esquema repetitivo con una cantidad creciente de cifras. Conway dio el nombre de «creeper» a esta sucesión por la tendencia trepadora de los números que la forman.

Conway conjeturó en 1989 que toda sucesión o bien es cíclica, o bien entra en el «creeper».

5.5.4. Sucesión «subprime fibs»

El nombre que se hizo popular a partir de la crisis financiera provocada por las hipotecas basura conocidas como *hipotecas subprime* sugirió a Conway la denominación de una sucesión basada en la sucesión de Fibonacci y aroma similar a la conjetura de Collatz. Constituye, como muchos otros ejemplos, una muestra de la repetida afirmación de Conway *«nadie en la historia ha sido tan estúpido como para inventar estas reglas»*. La mayor parte de propiedades descubiertas por Conway respecto a esta sucesión las estudió en un viaje de avión para ir a visitar a su amigo Richard Guy. Constituye, como ocurre con la sucesión de Siracusa (origen del problema $3x + 1$), un nuevo ejemplo de lo fácil que es entretenerse con estas sucesiones y lo difícil que es responder a algunas de las propiedades que ocultan.

El proceso de formación de esta sucesión es el siguiente:

«Se escriben dos números naturales y se suman. Si el resultado es primo, se escribe a continuación. Si no, se divide por su divisor primo más pequeño y se escribe el resultado. Se repite el proceso con los dos últimos números escritos.»

Por ejemplo,

$$1, 1, 2, 3, 5, 4, 3, 7, 5, 6, 11, 17, \ldots, 48, 13, \ldots, 48, 13, \ldots$$

La pareja $48, 13$ aparece por primera vez en las posiciones 38 y 39 y, posteriormente, en las posiciones 56 y 57. Esto significa que la sucesión entra en un bucle y se repite periódicamente. Ahora bien, si $a \neq 1$, la sucesión con valores iniciales a, a es constante.

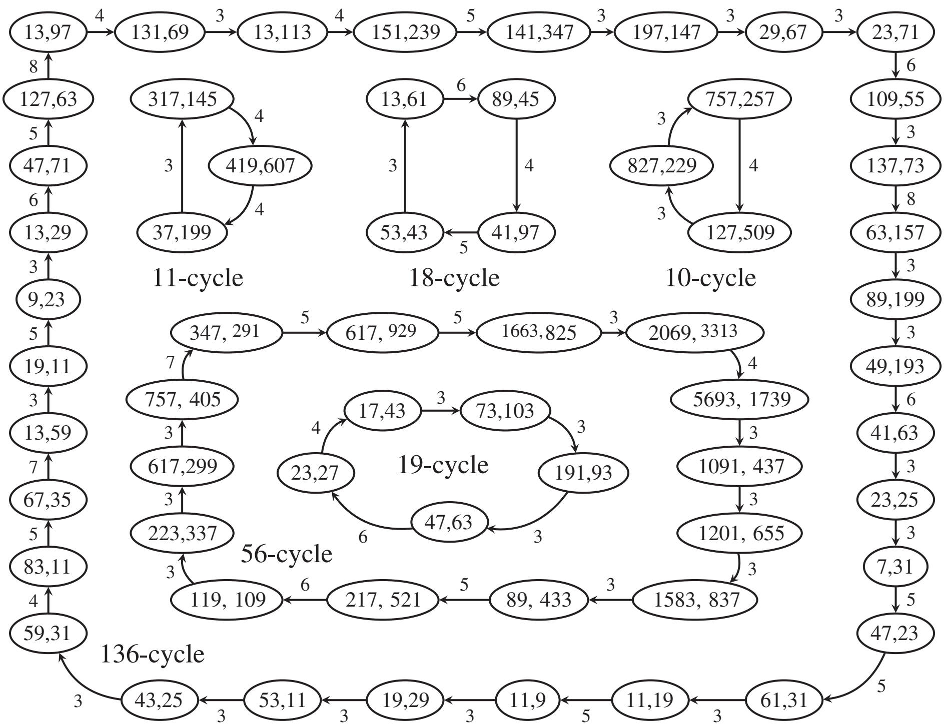


Figura 7: Esquema de los seis posibles ciclos de las *subprime fibs*.

Conway conjeturó que la sucesión termina por ser constante o entrará en uno de seis posibles ciclos, que se repiten periódicamente, de longitudes $10, 11, 18, 19, 56$ o 136 (en la figura 7 se muestran dichos ciclos, como aparecen en [28]). Algunas de las propiedades elementales de esta sucesión son las siguientes:

1. Si un elemento se repite dos veces seguidas, la sucesión se mantiene constante.
2. No existen ciclos de longitud 2 o 3.
3. No hay ningún ciclo, salvo el trivial, de longitud menor o igual a 9 y solo hay un ciclo de longitud 10 (formado por la pareja $127, 509$).

Las propiedades más destacadas de estas sucesiones han sido probadas por Richard Guy, Tanya Khovanova y Julian Salazar en [28]. En particular, que la conjetura de Conway es cierta para cualesquiera valores iniciales a y b, con $1 \leq a, b \leq 1\,000\,000$.

5.6. El baile de los entrelazados racionales

En [9], Conway presentó resultados esenciales en la clasificación de nudos a partir de una notación que facilitaba el proceso de enumeración y a través del estudio de los entrelazados racionales como elementos básicos para la construcción de los nudos. El teorema básico de su teoría establece que dos entrelazados racionales son topológicamente equivalentes si y solo si tienen la misma fracción asociada. En su búsqueda constante de comprender y hacer comprender a todos los públicos cualquier problema que se planteara, inventó también un juego, que él denominó «rational tangle dance», con el que los escolares de los primeros niveles de enseñanza podían aprender las operaciones básicas con fracciones, la composición de aplicaciones y otras cuestiones relacionadas. Sus primeras palabras en una charla que dio en Cambridge en 1998 fueron:

> *What I like doing is taking something that other people thought was complicated and dificult to understand, and finding a simple idea so that any fool — and in this case, you — can understand the complicated thing.*

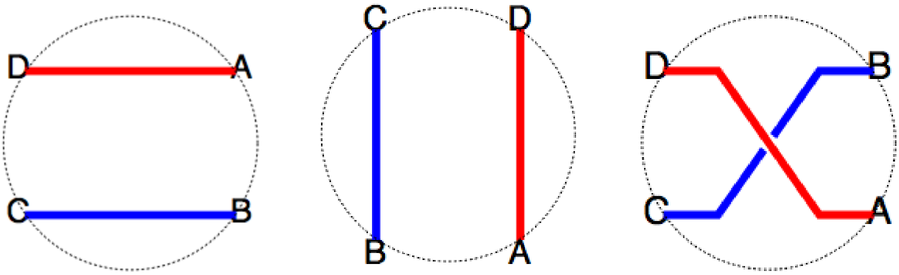
Figura 8: Conway en una sesión del baile de los entrelazados racionales.

Vamos a resumir las características generales del juego y, para completar los detalles, queremos recomendar la lectura de la conferencia *«The power of mathematics»* dictada por Conway y transcrita en el tercer capítulo de [6].

En el baile participan cuatro personas —A, B, C y D—, cada una de las cuales sujeta las esquinas de dos cuerdas, ocupando los cuatro puntos cardinales NE, SE, SO y NO como se ilustra en la figura 9a.

Los únicos movimientos permitidos son un giro de las cuatro personas 90 grados en sentido horario, cuyo resultado se indica en la figura 9b, y el intercambio de las dos personas que ocupan las posiciones NE y SE, de modo que la persona de la posición NE pase la cuerda por encima de la persona de la posición SE, situación ilustrada en la figura 9c. Una determinada sucesión de «pasos de baile» hará que las cuerdas queden entrelazadas. Se plantea ahora el problema de encontrar otra sucesión de pasos con los que volver a desenlazar las cuerdas.

La sorprendente solución pasa por asignar una determinada fracción a cada posición: si asignamos a la posición inicial el valor $n = 0$ (las cuerdas no están anudadas),



(a) Posición inicial (b) Giro de 90 grados (c) Intercambio de A sobre B

Figura 9: Posiciones del baile de los entrelazados.

dada cualquier posición n, los dos movimientos permitidos, que son el giro y el intercambio, se traducen en las aplicaciones $g(n) = -1/n$ e $i(n) = n+1$, respectivamente. Por tanto, para conseguir que los nudos de las cuerdas se deshagan a partir de una posición determinada, basta encontrar una combinación de aplicaciones i y g con las que el valor de n pase a tomar el valor cero.

Por ejemplo, si realizamos desde la posición inicial las transformaciones i, i, i, g, i, i, i, g, la nueva posición tendrá valor $-3/8$. Para deshacer los nudos formados, la secuencia de aplicaciones debe ser i, g, i, i, g, i, i, i, g, i, i.

Como se puede observar, se trata de una forma entretenida de apreciar la no conmutatividad de la composición de aplicaciones, así como de practicar el cálculo con fracciones, de modo que la actividad es muy apropiada para realizarse en diferentes entornos educativos.

6. Epílogo

Conway afirmaba que se había pasado la vida jugando. Pero su idea de jugar no es la que habitualmente conocemos, pues siempre daba un paso más. Como toda actividad matemática, cada solución o respuesta a un problema le sugería otro problema o, incluso, una línea de trabajo. Dejó como herencia muchas otras creaciones que llevan su nombre y constituyen una fuente inagotable de ideas matemáticas. Solo algunos ejemplos más, no citados en esta reseña: el juego TopSwops —y sus variantes TopDrops, BotSwops y BotDrops— la sucesión de Conway-Guy [20], la circunferencia de Conway [5], el puzle de la demostración del teorema de Morley, el problema del ángel [13], el problema del piano (también llamado del sofá), el problema de coloración de los quintominós, la conjetura Thrackle, el teorema de Conway-Gordon sobre nudos en grafos [18], el juego Hackenbush —y sus variantes blue-red y blue-red-green hackenbush—, el criterio de Conway sobre teselaciones [38], el algoritmo de Conway en teoría de probabilidades, la función siempre sobreyectiva de Conway, el método Lozenge de construcción de cuadrados mágicos impares o el método LUX de construcción de cuadrados mágicos pares [1], el invento del FRACTRAN, un lenguaje esotérico de programación [12], etc.

Fue necesario inventar los números surreales para enumerar la infinitud de intereses matemáticos que colmaron la vida de John Conway.

7. Selección de bibliografía seleccionada

Ya hemos citado a lo largo del artículo algunos de los libros publicados por John Conway en el contexto correspondiente. Recopilamos a continuación la lista de sus obras más significativas.

1. *Regular Algebra and Finite Machines*, Chapman and Hall, London, 1971.
2. *On Numbers and Games*, Academic Press, New York, 1976.
3. (junto con Elwyn Berlekamp y Richard Guy) *Winning Ways for your Mathematical Plays*, Academic Press, New York, 1982.

   Entre 2001 y 2004, AK Peters publica la segunda edición, añadiendo contenidos suplementarios.
4. (junto con Robert Curtis, Simon Norton, Richard Parker y Robert Wilson) *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, New York, Oxford University Press, 1985.
5. (junto con Neil Sloane) *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer Verlag, New York, 1988.
6. (junto con Richard Guy) *The Book of Numbers*, Copernicus, New York, 1996.
7. (junto con Francis Fung) *The Sensual (Quadratic) Forms*, Mathematical Association of America, Washington, 1997.
8. (junto con Derek Smith) *On Quaternions and Octonions*, AK Peters, Natick, 2003.
9. (junto con Heidi Burgiel y Chaim Goodman-Strauss) *The Symmetries of Things*, AK Peters, Wellesley, 2008.

El libro «The triangle book», escrito por Conway y Steve Sigur con la intención de que tuviera forma triangular, no llegó a publicarse en su momento y está previsto que aparezca en enero de 2021, publicado por A K Peters.

Referencias

[1] PEDRO ALEGRÍA, La magia de los cuadrados mágicos, *Sigma* **34** (2009), 107–128.

[2] CARTER BAYS, Candidates for the Game of Life in three fimensions, *Complex Systems* **1** (1987), 373–400.

[3] CARTER BAYS, A note on the game of life in hexagonal and pentagonal tessellations, *Complex Systems* **15** (2005), 245–252.

[4] ALEX BELLOS, The 10 best mathematicians, *The Guardian*, 11 de abril de 2010, `https://www.theguardian.com/culture/2010/apr/11/the-10-best-mathematicians`

[5] Colin Beveridge, Conway's circle, a proof without words, https://aperiodical.com/2020/05/the-big-lock-down-math-off-match-14/

[6] Alan Blackwell y David MacKay, *Power*, Cambridge University Press, 2006.

[7] John Conway, Mrs. Perkins's quilt, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 363–368.

[8] John Conway, A group of order 8,315,553,613,086,720,000, *Bull. Lond. Math. Soc.* **1** (1969), 79–88.

[9] John Conway, An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties, *Computational Problems in Abstract Algebra* (D. Welsh, ed.), 329–358, Pergamon Press, New York, 1970.

[10] John Conway, Tomorrow is the day after doomsday, *Eureka* **36** (1973), 28–31.

[11] John Conway, The weird and wonderful chemistry of audioactive decay, *Eureka* **45** (1985), 5–18.

[12] John Conway, FRACTRAN: A simple universal programming language for Arithmetic, *Open Problems in Communication and Computation* (T. M. Cover y B. Gopinath, eds.), 4–26, Springer, 1987.

[13] John Conway, The angel problem, *Games of No Chance* (Berkeley, CA, 1994), 3–12, MSRI Publications, 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.

[14] John Conway, Universal quadratic forms and the fifteen theorem, *Contemp. Math.* **272** (2000), 23–26.

[15] John Conway, Five $1000 problems (Update 2017), https://oeis.org/A248380/a248380.pdf

[16] John Conway, Hallard Croft, Paul Erdős y Michael Guy, On the distribution of values of angles determined by coplanar points, *J. London Math. Soc. (2)* **19** (1979), 137–143.

[17] John Conway y Cameron Gordon, A group to classify knots, *Bull. Lond. Math. Soc.* **7** (1975), 84–86.

[18] John Conway y Cameron Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.

[19] John Conway y Michael Guy, Four-dimensional Archimedean polytopes, *Proceedings of the Colloquium on Convexity at Copenhagen* (W. Fenchel, ed.), 38–39, Københavns Universitets Matematiske Institut, Copenhagen, 1965.

[20] John Conway y Richard Guy, Sets of natural numbers with distinct sums, *Notices Amer. Math. Soc.* **15** (1968), 345.

[21] John Conway y Simon Kochen, The free will theorem, *Found. Phys.* **36** (2006), 1441–1473.

[22] John Conway y Simon Norton, Monstruous moonshine, *Bull. Lond. Math. Soc.* **11** (1979), 308–339.

[23] Shalosh Ekhard y Doron Zeilberger, Proof of Conway's lost cosmological theorem, *Electronic Research Announcement of the Amer. Math. Soc.* **3** (1997), 78–82.

[24] MARTIN GARDNER, The problem of Mrs. Perkins' quilt, and answers to last month's puzzles, *Scientific American* **215** (septiembre 1966), 264–276.

[25] MARTIN GARDNER, Of sprouts and Brussels sprouts, games with a topological flavor, *Scientific American* **217** (julio 1967), 112–117.

[26] MARTIN GARDNER, The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game "life", *Scientific American* **223** (octubre 1970), 120–123.

[27] MARTIN GARDNER, *Mathematical Carnival*, A. Knopf Inc., 1975.

[28] RICHARD GUY, TANYA KHOVANOVA Y JULIAN SALAZAR, Conway's subprime Fibonacci sequences, *Math. Mag.* **87** (2014), 323–337.

[29] DONALD KNUTH, *Surreal Numbers*, Addison Wesley, 1974.

[30] TAL KUBO Y RAVI VAKIL, On Conway's recursive sequence, *Discrete Mathematics* **152** (1996), 225–252.

[31] COLIN MALLOWS, Conway's challenge sequence, *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 5–20.

[32] MATHOVERFLOW, Conway's lesser-known results, `https://mathoverflow.net/questions/357197/conways-lesser-known-results`

[33] RANDALL MUNROE, RIP John Conway, `https://xkcd.com/2293/`

[34] PAUL RENDELL, Turing machine in Conway game of life, *Designing Beauty: The Art of Cellular Automata* (A. Adamatzky y G. Martínez, eds.), 149–154, Emergence, Complexity and Computation, 20, Springer, 2016.

[35] JEAN-PHILIPPE RENNARD, Implementation of logical functions in the Game of Life, *Collision-Based Computing* (A. Adamatzky, ed.), 491–512, Springer, 2002.

[36] SIOBHAN ROBERTS, *Genius at play: The curious mind of John Horton Conway*, Bloomsbury Publishing, 2015.

[37] VILLE SALO E ILKKA TÖRMÄ, Gardens of Eden in the Game of Life, arXiv:1912.00692, 2019.

[38] DORIS SCHATTSCHNEIDER, Will it tile? Try the Conway criterion!, *Math. Mag.* **53** (1980), 224–233.

PEDRO ALEGRÍA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DEL PAÍS VASCO / EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA

Correo electrónico: `pedro.alegria@ehu.eus`

Página web: `http://go.ehu.es/pedroalegria`

FERNANDO BLASCO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Correo electrónico: `fernando.blasco@upm.es`

Página web: `http://fblasco.net`