Las series para $1/\pi$ de S. Ramanujan

por

Jesús Guillera

A la memoria de Srinivasa Ramanujan (1887–1920),
uno de los más grandes genios matemáticos de todos los tiempos

Resumen. En 1914, año en que llegó a Inglaterra, Ramanujan escribe su primer artículo fuera de la India. Es hoy un artículo famoso, especialmente por su lista de 17 series impresionantes para el número $1/\pi$. En 1985 despertó un gran interés al batirse con una de esas series un récord mundial de cálculo de decimales de π. Desde entonces la teoría se ha completado y generalizado, y además se han descubierto series de aspecto parecido pero que desafían por ahora todo intento de demostración.

1. Introducción

En 1914, año en que llegó a Inglaterra, Ramanujan escribe su primer artículo fuera de la India bajo la presión de Hardy, que le exige rigor. Se esfuerza en ello y consigue que finalmente se lo publiquen [33]. Es hoy un artículo famoso, especialmente por su lista de 17 series impresionantes para el número $1/\pi$, entre las cuales se encuentran las siguientes [33, ecs. 29, 32, 34, 44]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} \frac{42n+5}{64^n} = \frac{16}{\pi}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n}{(1)_n^3} (33n+4) \left(\frac{4}{125}\right)^n = \frac{15\sqrt{3}}{2\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^3} (133n+8) \left(\frac{4}{85}\right)^{3n} = \frac{85\sqrt{255}}{54\pi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} \frac{26390n+1103}{99^{4n+2}} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}, \tag{2}$$

donde $(c)_n = c(c+1)\cdots(c+n-1)$ es el factorial ascendente o símbolo de Pochhammer. Ramanujan las había descubierto en la India y, lógicamente, en el artículo tuvo que incluir algunas demostraciones, no sólo los resultados como hacía en sus cuadernos. Todas las series de la lista escrita por Ramanujan son racionales (suma de números racionales), excepto la siguiente (en la cual ϕ denota la razón áurea):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} \frac{(42\sqrt{5}+30)n+(5\sqrt{5}-1)}{2^{6n}\phi^{8n}} = \frac{32}{\pi}.$$

Creemos que esto simplemente se debe a una preferencia de Ramanujan por las series racionales, preferencia que también comparte el autor.

Sin embargo, no se prestó suficiente atención a estas series y cayeron en el olvido hasta que, en noviembre de 1985, William Gosper, con la fórmula (2), que también se puede escribir en la forma

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{26390n+1103}{396^{4n}},$$

calculó 17 526 100 dígitos del número π, batiendo un récord mundial [7, Sección 5]. Pero había un problema: Ramanujan no había aportado una prueba completa.

Las series de Ramanujan pertenecen a una familia de fórmulas para $1/\pi$ cuya forma más general se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{bn+a}{J^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\rho^n}(bn+a)z^n = \frac{1}{\pi}, \tag{3}$$

siendo $A_n \sim \rho^n$ una sucesión de enteros que satisfacen cierto tipo de recurrencias de orden 3 y (J, b, a) una terna de números algebraicos. Como $A_n \sim \rho^n$, la velocidad de convergencia de la serie será, aproximadamente, $\log_{10}(J/\rho) = \log_{10}(1/z)$ dígitos correctos de la suma por cada término sumado.

Ramanujan determinó con rigor los valores

$$J = 396^4, \quad b = \frac{26390\sqrt{8}}{99^2}$$

de la fórmula (2), y comentó en su artículo que se trata de una serie extremadamente rápida. Como $\rho = 4^4$, el cálculo

$$\log_{10} \frac{396^4}{4^4} = \log_{10} 99^4 = 4 \log_{10} 99 = 7.98254\ldots$$

nos muestra que da aproximadamente 8 dígitos correctos de la suma por cada término sumado. La duda es con el 1103 que aparece en la fórmula. ¿Determinó Ramanujan ese valor 1103 o simplemente lo intuyó? Los hermanos Jonathan y Peter Borwein, que en 1987 demostraron las 17 series para $1/\pi$ de Ramanujan, y posteriormente otras similares [12, 13], piensan que no lo obtuvo de forma rigurosa sino como explican en [14, Sección 8]. Otra posibilidad es que podría haber sustituido en (3) los valores hallados para J y b y una aproximación de π suficientemente buena. Como la serie es muy rápida (da casi 8 dígitos por término sumado), sólo con tomar el término $n = 0$ o los términos $n = 0$ y $n = 1$ se tiene, respectivamente,

$$(n = 0): \quad a \simeq \frac{99^2}{\sqrt{8}\,\pi} \simeq 1103.00002683,$$
$$(n = 0, 1): \quad a \simeq 1103.0000000000002245.$$

Del primer cálculo sólo son válidos los 8 primeros dígitos y del segundo los 16 primeros. Esto pudo convencer a Ramanujan de que se trataba del número 1103, pero naturalmente eso no se puede aceptar como demostración. No está claro, sin embargo, que no lo hallase de forma rigurosa de alguna manera, pues de hecho Ramanujan tenía fórmulas con las que podría haberlo determinado, aunque parece imposible hacer a mano los cálculos necesarios. Creo que es justo darle el beneficio de la duda, porque *¡con los genios nunca se sabe!*

2. ¿De dónde provienen estas series?

Existen ciertas funciones definidas en el semiplano superior complejo que se denominan *funciones modulares* —aunque Ramanujan nunca las definió ni empleó ese nombre, y tampoco necesitamos aquí saber qué son exactamente— que tienen la siguiente maravillosa propiedad: *satisfacen ecuaciones modulares de todos los grados.* Lo explico: si $f(q)$ es una función modular y denotamos $f(q) = y$ y $f(q^d) = x$, entonces una ecuación modular de grado d es una relación algebraica $A(x, y) = 0$, que sabemos que tiene que existir. Pues bien, en la fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{bn + a}{J^n} = \frac{1}{\pi},$$

J se puede parametrizar con una función modular $J_2(q)$ que se puede definir así:

$$\begin{aligned} J_2(q) &= q^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^{-24} + 128 + 4096q \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n)^{24} \\ &= q^{-1} + 104 + 4372q + 96256q^2 + \cdots . \end{aligned}$$

Ramanujan, en su artículo [33], deduce rigurosamente la igualdad

$$e^{\pi\sqrt{58}} + 104 + 4372e^{-\pi\sqrt{58}} + 96256e^{-2\pi\sqrt{58}} + \cdots = 64(g_{58}^{24} + g_{58}^{-24}) + 128 = 396^4, \quad (4)$$

siendo g_{58} uno de los invariantes introducidos por él mismo mediante

$$(1 - e^{-\pi\sqrt{n}})(1 - e^{-3\pi\sqrt{n}})(1 - e^{-5\pi\sqrt{n}}) \cdots = 2^{1/4} e^{-\pi\sqrt{n}} g_n.$$

Observamos que (4) es lo mismo que $J_2(e^{-\pi\sqrt{58}})$, es decir, el valor de J_2 en un punto q_0 de la forma $q_0 = e^{-\pi\sqrt{r}}$ con $r \in \mathbb{Q}$ (puntos singulares). Pues bien, se ha demostrado que si en la ecuación modular hacemos $y = x$, una solución de $A(x, x) = 0$ es

$$x_0 = J_2\big(e^{-\pi\sqrt{4d/\ell}}\big),$$

siendo d el grado y ℓ un entero positivo que denominamos nivel. Como $A(x,x)=0$ es una ecuación algebraica, esto explica que x_0 tiene que ser un número algebraico. El nivel sólo depende de los coeficientes A_n y en el caso que nos concierne es $\ell=2$ (que hemos indicado como subíndice de J). Como queremos hallar el valor de $J_2(e^{-\pi\sqrt{58}})$, el grado d de la ecuación modular que tenemos que usar es $d=29$, es decir, una ecuación modular del tipo

$$J_2(q^{29})=x, \quad J_2(q)=y, \qquad A(x,y)=0.$$

Resolviendo $A(x,x)=0$ se obtendría $x_0=396^4$. Por otra parte se sabe que el valor de b viene dado por una fórmula muy sencilla,

$$b=\sqrt{\frac{4d}{\ell}}\sqrt{1-\frac{\rho}{J}}.$$

Como $\rho=4^4$, $\ell=2$, $d=29$ y $J=396^4$, obtenemos

$$b=\frac{26390\sqrt{8}}{99^2}.$$

Falta hallar el valor de a. Los hermanos Borwein encuentran la forma modular $a(q)$ que parametriza a en términos de una forma modular α que ellos definen [11, Capítulo 5], pero lo más difícil es evaluarla en los puntos singulares, especialmente si el grado d es muy alto (de ahí el comentario que hacen sobre el número 1103 en la fórmula de Ramanujan).

3. Funciones modulares elípticas

Los libros de Cayley y Greenhill estaban disponibles en la biblioteca de la Universidad de Madras y Ramanujan pudo haber aprendido mucho de ellos sobre la teoría de las funciones elípticas y ecuaciones modulares. De hecho, Hardy escribe el siguiente comentario de Littlewood:

> *Ramanujan, de alguna manera, adquirió un conocimiento completo y efectivo de la teoría de las funciones elípticas, aunque su ignorancia de la teoría de funciones complejas y del teorema de Cauchy parece difícil de reconciliar con esto. Una suficiente, y creo que necesaria explicación sería que Greenhill es un libro raro y singular que apenas trata la teoría de variable compleja.*

Hardy concluye que es en este tema donde las limitaciones de los conocimientos de Ramanujan, pero sobre todo su profundidad, se manifiestan de forma más notable.

3.1. Ramanujan y la teoría clásica

Para desarrollar su propia teoría de las funciones elípticas, Ramanujan define

$$f(a,b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}}, \tag{5}$$

y a partir de ella algunas funciones especialmente interesantes, como, por ejemplo:

$$\varphi(q) = f(q,q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}, \qquad \psi(q) = f(q,q^3) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{k(k+1)}{2}}.$$

Bruce Berndt comenta que la función (5) tiene la misma generalidad que la función $\vartheta_3(z,q)$ de Jacobi (superior en muchos aspectos), pero que para los intereses y teoría de Ramanujan (5) resultó ser muy instrumental y ventajosa para ayudarle a descubrir muchas identidades nuevas que luego necesitaría.

La notación concisa para las series hipergeométricas fue introducida por Pochhammer en 1870, y Barnes, en 1908, extiende su significado para que represente la extensión analítica de las correspondientes series. En particular,

$$F(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, z\right)$$

denota la extensión analítica de la serie hipergeométrica de Gauss

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \qquad |z| < 1,$$

que viene dada por la integral de Barnes

$$F(z) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a,\, b \\ c \end{matrix} \,\middle|\, z\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s} \Gamma(-s)(-z)^s \, ds,$$

donde $(a)_s = \Gamma(a+s)/\Gamma(a)$ es una generalización del símbolo de Pochhammer.

Ramanujan nunca habla de funciones modulares sino de q-series y sus propiedades [4], utiliza las funciones $\varphi(q)$ y $\psi(q)$, y demuestra que la serie hipergeométrica de Gauss

$$F(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, x\right)$$

se puede parametrizar de la siguiente forma (equivalente a la de Jacobi) [7, Sección 3]:

$$F(q) := F(x(q)) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, x(q)\right),$$

siendo

$$x(q) = 16q \frac{\psi^4(q^2)}{\varphi^4(q)}, \quad F(q) = \varphi^2(q).$$

Es decir,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{1}{2},\, \frac{1}{2} \\ 1 \end{matrix} \,\middle|\, 16q \frac{\psi^4(q^2)}{\varphi^4(q)}\right) = \varphi^2(q).$$

Para llegar a sus series para $1/\pi$ combina los siguientes ingredientes [7, Sección 3]: las ecuaciones modulares que satisface la función $x(q)$, la fórmula de Clausen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} z^n = F^2(x), \qquad z = 4x(1-x),$$

y las identidades

$$P(q^2) = (1-2x(q))F^2(x(q)) + 6(1-x(q))F(x(q))G(x(q)), \qquad G(x) = x\,\frac{dF(x)}{dx},$$

y

$$P(e^{-2\pi/\sqrt{n}}) + nP(e^{-2\pi\sqrt{n}}) = \frac{6\sqrt{n}}{\pi}$$

que satisface la función $P(q)$ de Eisenstein

$$P(q) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1-q^n}, \quad |q| < 1,$$

y que explican el origen de π en las series de tipo Ramanujan. Es precisamente en el uso de las series de Eisenstein y en su habilidad para hallar muchas ecuaciones modulares escritas en forma concisa donde Ramanujan muestra una inigualable profundidad de razonamiento y destreza de cálculo. Como $x(q)$ es modular, si $\alpha = x(q^d)$ y $\beta = x(q)$, entonces existe una relación algebraica $A(\alpha, \beta) = 0$ (ecuación modular de grado d). Los valores singulares corresponden a hacer $\beta = 1 - \alpha$ (fijémonos que, entonces, $z = 4x(1-x)$ permanece invariante). Pues bien, en los cuadernos de Ramanujan hay entradas con ecuaciones modulares correspondientes a los siguientes grados:

$$d = 2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37,\ 47,\ 71.$$

Además Ramanujan define el multiplicador $m(\alpha, \beta) = F(\alpha)/F(\beta)$, para el cual da también expresiones explícitas para muchos valores de d.

Bruce Berndt comenta que no parece exagerado decir que Ramanujan dedujo más ecuaciones modulares que entre todos sus predecesores juntos. Aquí mostramos unas pocas muy sencillas que escribimos en la forma de R. Russell (no confundir con Bertrand Russell)

$$u^h = \alpha\beta, \quad v^h = (1-\alpha)(1-\beta), \qquad P(u,v) = 0,$$

donde h es un entero positivo y $P(u, v)$ un polinomio en u y v:

$$\begin{aligned} &\text{grado } 3, && h = 4, && P(u,v) = u + v - 1,\\ &\text{grado } 5, && h = 6, && P(u,v) = u^3 + v^3 + 2\sqrt[3]{4}\,uv - 1,\\ &\text{grado } 7, && h = 8, && P(u,v) = u + v - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Berndt, con ayuda de algunos de sus mejores estudiantes, consiguió demostrar todas las ecuaciones modulares de Ramanujan, ver [8] y [9], aunque lamenta haber tenido que utilizar, en algunos casos, métodos no conocidos por Ramanujan.

En [5], Baruah y Berndt siguen de cerca las ideas de Ramanujan tal como están expresadas en [33, Sección 13], y usando ciertas representaciones de las series de Eisenstein escritas sin demostración en [33, Sección 10] derivan varias series de tipo Ramanujan para $1/\pi$. Sin embargo, no hacen uso de teorías alternativas.

3.2. Las teorías alternativas

Ramanujan menciona en su artículo [33] que existen teorías alternativas correspondientes a las series hipergeométricas de Gauss

$$F_s(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{s},\ 1-\frac{1}{s}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, x\right)$$

para $s = 3, 4, 6$ (el caso $s = 2$ es la teoría clásica). Sin embargo, y desafortunadamente, no desarrolla estas teorías. Las series de Ramanujan para $1/\pi$ quedaron establecidas por los hermanos Borwein en 1987, que sólo necesitaron una muy pequeña porción de las teorías a las que se refiere Ramanujan: la fórmula de Clausen en su versión general e identidades relacionando las funciones $F_s(x)$. El caso $s = 3$ era más difícil de relacionar con los otros. Finalmente, encontraron la parametrización

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, \frac{c^3(q)}{a^3(q)}\right) = a(q),$$

con

$$a(q) = \varphi(q)\varphi(q^3) + 4q\psi(q^2)\psi(q^6), \quad c(q) = \frac{1}{2}\big(a(\sqrt[3]{q}) - a(q)\big),$$

que hemos escrito con las funciones φ y ψ de Ramanujan en vez de con las funciones *theta* de Jacobi utilizadas por los Borwein [7].

En el año 1995 Berndt, Bhargava y Garvan desarrollan ampliamente las teorías alternativas [10]. Por ejemplo, obtienen la parametrización

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\, x(q)\right) = F(q),$$

donde

$$x(q) = \frac{64q\psi^8(q)}{\varphi^8(-q) + 64q\psi^8(q)}, \qquad F(q) = \left(\varphi^8(-q) + 64q\psi^8(q)\right)^{1/4},$$

demuestran ecuaciones modulares para las signaturas $s = 4$ y $s = 3$ y desarrollan la teoría correspondiente a $s = 6$ relacionándola con la teoría clásica. Mostramos a continuación en la forma de R. Russell unas pocas (entre las más sencillas) de estas ecuaciones modulares:

$$\begin{aligned}
&s = 4,\ d = 3: && h = 4, && P(u,v) = u^2 + v^2 + 4uv - 1, \\
&s = 4,\ d = 5: && h = 6, && P(u,v) = u^3 + v^3 + 8(u^2v + uv^2) - 1, \\
&s = 3,\ d = 2: && h = 3, && P(u,v) = u + v - 1, \\
&s = 3,\ d = 5: && h = 6, && P(u,v) = u^2 + v^2 + 3uv - 1.
\end{aligned} \tag{7}$$

En [6] Baruah y Berndt, siguiendo de cerca las ideas expresadas por Ramanujan en su segundo cuaderno [34, pgs. 257–262], utilizan las teorías alternativas de signaturas 4 y 3 para derivar varias series de tipo Ramanujan para $1/\pi$.

4. Las cuatro teorías hipergeométricas

De acuerdo con la notación de los artículos [27] y [29] del autor, definimos

$$F_\ell(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{s}, 1-\frac{1}{s} \\ 1\end{matrix} \,\middle|\, x\right), \qquad G_\ell(x) = x\frac{dF_\ell(x)}{dx},$$

donde $s = 2, 3, 4, 6$ (signatura). El nivel ℓ de la serie [27] viene dado por

$$\frac{\sqrt{\ell}}{2\pi} = \lim_{z\to 1^-} \sqrt{1-z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{s}\right)_n \left(1-\frac{1}{s}\right)_n}{(1)_n^3} z^n,$$

límite que se puede hallar usando la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(1)_n} z^n$$

y el teorema de Stolz-Cesàro. De esta forma se llega al resultado

$$\frac{\sqrt{\ell}}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{s}, \qquad \text{o sea,} \qquad \ell = 4\sin^2\frac{\pi}{s}.$$

Se puede demostrar (ver [2]) que existe una única función $x = x(q)$ que satisface

$$F_\ell^2(x) = \frac{q}{x(1-x)}\frac{dx}{dq}, \tag{8}$$

y esa función, que denotamos $x_\ell(q)$, es una función modular de nivel ℓ tal que $F_\ell(q) := F_\ell(x_\ell(q))$ es una forma modular de nivel ℓ y peso 2. Ya hemos comentado que las funciones modulares satisfacen ecuaciones modulares de todos los grados. Si $\beta = x_\ell(q)$ y $\alpha = x_\ell(q^d)$, entonces una ecuación modular de nivel ℓ y grado $1/d$ (β respecto de α) o d (α respecto de β) es una relación algebraica $A(\alpha,\beta) = 0$. De (8) se deduce

$$F_\ell^2(\alpha) = \frac{q^d}{\alpha(1-\alpha)}\frac{d\alpha}{dq^d}, \qquad F_\ell^2(\beta) = \frac{q}{\beta(1-\beta)}\frac{d\beta}{dq},$$

y dividiendo tenemos

$$m^2 = \frac{1}{d}\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}\frac{d\alpha}{d\beta} = \frac{1}{d}\frac{\beta(1-\beta)}{\alpha(1-\alpha)}\frac{\alpha'}{\beta'} \tag{9}$$

(de hecho, como α'/β' es un cociente de derivadas, da igual respecto a qué variable derivemos). Ramanujan escribe esta fórmula para el multiplicador en una entrada de sus cuadernos, pero sólo para la teoría clásica (fórmula que ya era conocida por Jacobi).

Como ya hemos dicho, las funciones $x_\ell(q)$ son funciones modulares de nivel ℓ. Las funciones $x_4(q)$, $x_2(q)$ y $x_3(q)$ se pueden también expresar usando un producto infinito de la siguiente manera [22, p. 244 y p. 261]:

$$x_4(q) = 16q \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}} \right)^8, \qquad x_2(q) = \frac{64q}{64q + \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n)^{-24}},$$

$$x_3(q) = \frac{27q}{27q + \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^n+q^{2n})^{-12}}.$$

Un teorema bien conocido establece que todas las funciones modulares se relacionan algebraicamente. Por ejemplo, se tiene [22, p. 274]

$$J = \frac{432}{x_1(1-x_1)} = \frac{64(1+3x_2)^3}{x_2(1-x_2)^2} = \frac{27(1+8x_3)^3}{x_3(1-x_3)^3} = \frac{16(1+14x_4+x_4^2)^3}{x_4(1-x_4)^4},$$

donde J es el celebrado invariante modular de Klein:

$$J(q) = q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \cdots. \tag{10}$$

El coeficiente 196884 tiene una historia muy interesante [35, Capítulo 15]. Era el año 1978 y el matemático inglés John McKay, especialista en teoría de grupos, tuvo curiosidad en ver qué se estaba haciendo en otras áreas de investigación y se le ocurrió leer un artículo de teoría de números. En ese artículo se estudiaba la función J y se podía ver la serie (10). McKay no podía dar crédito a lo que estaba viendo, el valor 196884 disminuido en una unidad era el número más pequeño de dimensiones en las que el *grupo monstruo* (el grupo esporádico más grande) actúa de forma no trivial. McKay estaba asombrado. ¿Cómo era posible que ese número apareciera en dos teorías tan diferentes? Siguiendo con sus observaciones descubrió que no sólo ese coeficiente, sino también todos los que le siguen, guardaban relación con el grupo monstruo. Esto abrió una nueva área de investigación denominada *Monstruous Moonshine*.

Como $J = \rho/z = \rho/(4x(1-x))$ obtenemos las otras funciones J:

$$J_2(q) = \frac{64}{x_2(1-x_2)}, \quad J_3(q) = \frac{27}{x_3(1-x_3)}, \quad J_4(q) = \frac{16}{x_4(1-x_4)},$$

cuyos desarrollos en serie de potencias empiezan así:

$$\begin{aligned} J_2(q) &= q^{-1} + 104 + 4372q + 96256q^2 + 1240002q^3 + 10698752q^4 + \cdots, \\ J_3(q) &= q^{-1} + 42 + 783q + 8672q^2 + 65367q^3 + 371520q^4 + \cdots, \\ J_4(q) &= q^{-1} + 24 + 276q + 2048q^2 + 11202q^3 + 49152q^4 + \cdots. \end{aligned}$$

Y también los coeficientes de q^j con $j \geq 1$ de todas estas funciones J guardan relación con las representaciones irreducibles del grupo monstruo (hecho que también McKay observó).

5. El método del autor

En [27] ideé un método nuevo y sencillo para demostrar las series de Ramanujan para $1/\pi$ inspirado en una idea de James Wan [37] que evita tener que utilizar formas modulares, tales como $a(q)$, y que a su vez se inspira en [20]. Los tres ingredientes del método son: la identidad de Legendre expresada en su versión

$$\alpha F_\ell(\alpha)G_\ell(\beta) + \beta F_\ell(\beta)G_\ell(\alpha) = \frac{\sqrt{\ell}}{2\pi}, \qquad \beta = 1-\alpha,$$

que explica por qué aparece π en las series de Ramanujan (usamos esta identidad en vez de series de Eisenstein), una transformación de origen modular

$$F_\ell(\alpha) = m(\alpha,\beta)F_\ell(\beta),$$

donde $m(\alpha,\beta)$ es el multiplicador de Ramanujan, y la identidad de Clausen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{s}\right)_n \left(1-\frac{1}{s}\right)_n}{(1)_n^3} z^n = F_\ell^2(x), \quad z = 4x(1-x).$$

Combinando adecuadamente estos ingredientes pudimos demostrar que, a partir de una ecuación modular de nivel ℓ y grado d (α respecto de β), se pueden obtener dos series reales para $1/\pi$ de tipo Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{s}\right)_n \left(1-\frac{1}{s}\right)_n}{(1)_n^3}(a+bn)z^n = \frac{1}{\pi}, \qquad \ell = 4\sin^2\frac{\pi}{s},$$

una de términos positivos ($z>0$) y la otra alternada ($z<0$). En [27] demostramos que corresponden respectivamente a los siguientes conjuntos de fórmulas:

$$q = e^{-\pi\sqrt{\frac{4d}{\ell}}}, \;\; z = 4\alpha_0\beta_0, \;\; b = (1-2\alpha_0)\sqrt{\frac{4d}{\ell}}, \;\; a = -2\alpha_0\beta_0\frac{m_0'}{\alpha_0'}\frac{d}{\sqrt{\ell}}, \qquad (11)$$

$$q = -e^{-\pi\sqrt{\frac{4d}{\ell}-1}}, \;\; z = 4\alpha_0\beta_0, \;\; b = (1-2\alpha_0)\sqrt{\frac{4d}{\ell}-1}, \;\; a = -2\alpha_0\beta_0\frac{m_0'}{\alpha_0'}\frac{d}{\sqrt{\ell}}, \qquad (12)$$

donde $\beta_0 = 1-\alpha_0$ y $m(\alpha,\beta)$ es el multiplicador (9) de Ramanujan (al escribir α_0 y β_0 nos estamos refiriendo a la solución de la ecuación modular, así como $m_0 = m(\alpha_0,\beta_0)$, y α_0', β_0', m_0' son las correspondientes derivadas, en las que no hace falta detallar la variable pues sólo aparecen en forma de cociente m_0'/α_0' o similar). Además [28], se tienen las fórmulas

$$\frac{\beta_0'}{\alpha_0'} = \frac{1}{dm_0^2}, \qquad \frac{m_0'}{\alpha_0'} = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{1}{dm_0}\right)\frac{\alpha_0-\beta_0}{\alpha_0\beta_0} + \frac{m_0}{2\alpha_0'}\left(\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'} - \frac{\beta_0''}{\beta_0'}\right). \qquad (13)$$

Por lo tanto, para demostrar una serie de tipo Ramanujan para $1/\pi$ de grado d lo único que necesitamos conocer es la ecuación modular correspondiente a ese grado.

Empezamos haciendo $\beta = 1 - \alpha$ en la ecuación modular y elegimos una solución α_0. Si con esa solución obtenemos $|m_0| \neq 1/\sqrt{d}$ entonces no es de grado d y tenemos que intentar otra. Un test para seleccionar la solución correcta se explica en [27] y fue usado en [29] y en [30]. Las fórmulas correspondientes al caso $z > 0$ son equivalentes a las dadas por otros autores, en cambio las correspondientes al caso $z < 0$ son novedosas y permiten demostrar las series a partir de ecuaciones modulares de grados muy inferiores a los requeridos por los otros métodos (ver [27]).

A continuación mostramos ejemplos en los que, a partir de una ecuación modular de grado d, y mediante las fórmulas (11) y (12), hallamos las dos series reales de tipo Ramanujan correspondientes a dicho grado.

5.1. Ejemplo de nivel 4

Partimos de la siguiente ecuación modular de grado 7 que ya hemos visto en (6):

$$u^8 = \alpha\beta, \quad v^8 = (1-\alpha)(1-\beta), \qquad u + v - 1 = 0.$$

Recordemos que ser de grado 7 quiere decir que relaciona $\beta = x_4(q)$ con $\alpha = x_4(q^7)$, donde el subíndice 4 es el nivel de la función modular. El grado d aparece en $|m_0| = 1/\sqrt{d}$.

Comenzamos haciendo $\beta = 1 - \alpha$, lo cual implica $u^8 = v^8$. Consideramos en primer lugar la solución $v_0 = u_0$ y obtenemos $u_0 = 1/2$ y $v_0 = 1/2$, y por lo tanto

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{16}, \quad \beta_0 = \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{7}}{16}.$$

Elegimos u como variable independiente. Como $v' = -1$ y $v'' = 0$, tenemos $v_0' = -1$ y $v_0'' = 0$ (por supuesto, estamos usando v_0' para denotar $v'(u)$ evaluado en u_0, y análogamente con v_0''). Diferenciando $u^8 = \alpha\beta$ y $v^8 = (1-\alpha)(1-\beta)$ respecto de u en u_0 obtenemos

$$\alpha_0' = \frac{1}{16}, \quad \beta_0' = \frac{1}{16}.$$

Entonces tenemos que verificar que $|m_0| = 1/\sqrt{d}$ (si no fuera así tendríamos que elegir otra solución u_0, v_0):

$$m_0 = \sqrt{\frac{1}{d}\frac{\alpha_o'}{\beta_0'}} = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \text{¡perfecto!}$$

Diferenciando dos veces $u^8 = \alpha\beta$ y $v^8 = (1-\alpha)(1-\beta)$ respecto de u en u_0 y sustituyendo los valores ya hallados, obtenemos

$$\alpha_0'' = \frac{-37\sqrt{7}}{112}, \quad \beta_0'' = \frac{-37\sqrt{7}}{112}.$$

Finalmente usando las fórmulas (11) y (13) hallamos los valores que demuestran (1).

De la misma forma pero eligiendo la solución $v_0/u_0 = (1-i)/\sqrt{2}$ (una de las raíces octavas de la unidad) de $v^8/u^8 = 1$, obtenemos

$$u_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2} i, \quad v_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} i,$$

y los valores de α_0 y β_0:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} - \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right), \quad \beta_0 = \frac{1}{2} + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right).$$

Procediendo como antes, para el multiplicador se obtiene el valor

$$m_0 = \frac{\sqrt{6}}{7} + \frac{1}{7} i, \quad |m_0| = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad \text{¡perfecto!}$$

Al lector le puede sorprender que el valor de m_0 sea un número complejo, pero $m_0 = F(\alpha_0)/F(\beta_0)$ y como $\beta_0 > 1$ el valor de $F(\beta_0)$ se obtiene por extensión analítica (fórmula de Barnes) lo que puede llevar a valores aparentemente sorprendentes, en este caso (y en general si $z_0 < 0$) a un valor complejo.

Finalmente, usando las fórmulas (12) y (13) deducimos la siguiente serie alternada para $1/\pi$ de tipo Ramanujan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{(1)_n^3} \left((6\sqrt{2}-6)n + 2\sqrt{2} - \frac{5}{2}\right) \left(-17 + 12\sqrt{2}\right)^n = \frac{1}{\pi}.$$

5.2. Ejemplo de nivel 2

Partimos de la siguiente ecuación modular de grado 3 que ya hemos visto en (7):

$$u^4 = \alpha\beta, \quad v^4 = (1-\alpha)(1-\beta), \qquad u^2 + v^2 + 4uv - 1 = 0.$$

A partir de la solución $u_0 = v_0 = 1/\sqrt{6}$ del sistema de ecuaciones formado por

$$u^4 = v^4, \quad u^2 + v^2 + 4uv - 1 = 0,$$

se obtiene la siguiente serie de términos positivos debida a Ramanujan [33, ec. 40]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} (8n+1) \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}.$$

Y a partir de la solución $u_0 = 4^{-1}\sqrt{2}\,(1+i)$, $v_0 = 4^{-1}\sqrt{2}\,(1-i)$, se obtiene la siguiente serie alternada también debida a Ramanujan [33, ec. 35]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^3} (20n+3) \left(\frac{-1}{4}\right)^n = \frac{8}{\pi}.$$

5.3. Otros ejemplos

En [29] dimos una demostración completa de la serie[1] 3A23 de Chan, Liaw y Tan [17],

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!(2n)!}{(n!)^5} \frac{14151n + 827}{(-300)^{3n}} = \frac{1500\sqrt{3}}{\pi},$$

y que no pudieron demostrar dado que con su método se necesitaba una ecuación modular de grado 89 y no se conocía ninguna de ese grado. En cambio, con el método del autor sólo hace falta una ecuación modular de grado $d = 23$ y, curiosamente, Chan y Liaw habían demostrado una de este grado [16], que es, claro está, la que utilizó el autor. Poco después, en [30], dimos una demostración completa de la serie[2] 2P29 que ya vimos en (2) (la serie de convergencia más rápida debida a Ramanujan). Nos costó más aplicar el método para demostrar las series para $1/\pi$ de tipo Ramanujan de nivel $\ell = 1$ [28] debidas a los hermanos David y Gregory Chudnovsky [21], incluida su celebrada fórmula

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(3n)!\,(n!)^3} \frac{545140134n + 13591409}{(-640320)^{3n}} = \frac{\sqrt{640320^3}}{12\pi},$$

con la cual en 2019 se batió un récord de más de 31 billones de dígitos de π, pero al final lo conseguimos haciendo uso de polinomios modulares de Weber [36]. En [32] y en [38] se dan también demostraciones completas de las fórmulas de los hermanos Chudnovsky.

6. Series de Ramanujan-Sato

Takeshi Sato sorprendió a la audiencia al presentar en una conferencia que dio en Japón en el año 2002 una serie para $1/\pi$ cuya sucesión de coeficientes A_n no era hipergeométrica, es decir, A_{n+1}/A_n no era una función racional. Esa serie para $1/\pi$ tenía como coeficientes los números de Apéry[3] y era la siguiente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \right\} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{12n} (20n + 10 - 3\sqrt{5}) = \frac{20\sqrt{3} + 9\sqrt{15}}{6\pi}.$$

Yifan Yang encontró otro ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4 \right\} \frac{4n+1}{36^n} = \frac{18}{\pi\sqrt{15}}.$$

Estas series fueron después bien comprendidas por Chan, Chan y Liu, que elaboraron una teoría independiente de fórmulas de Clausen [18]. A la nueva familia de

[1] La notación 3A23 alude a nivel 3, alternada y grado 23.

[2] La notación 2P29 alude a nivel 2, de términos positivos y grado 29.

[3] En 1978 Apéry utilizó estos números en su famosa demostración de la irracionalidad de la constante $\zeta(3)$.

series la denominaron *series de tipo Ramanujan-Sato* dado que incluía a las de tipo Ramanujan.

Tienen un origen modular elíptico y, por lo tanto, $z(q)$ es una función modular; hay una fórmula muy sencilla que relaciona $b(q)$ con $z(q)$, y $a(q)$ es una forma modular de peso 2. Naturalmente el nivel sólo depende de la sucesión de números enteros A_n. Por ejemplo, se tiene

$$\text{Takeshi Sato:} \qquad \ell = 6, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2,$$

$$\text{Yifan Yang:} \qquad \ell = 10, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^4.$$

Otros ejemplos son

$$\ell = 5, \qquad \binom{2n}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k},$$

$$\ell = 7, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{2n}{k} \binom{n+k}{k}.$$

En [19], Chan Heng Huat y Shaun Cooper aportan una lista de 93 series racionales de tipo Ramanujan-Sato. En [31] se demuestran algunas series de tipo Ramanujan-Sato mediante un método de traslación.

6.1. Relación con la teoría de Calabi-Yau

La serie

$$w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$$

es la solución holomorfa de una ecuación diferencial de tercer orden con soluciones fundamentales w_0, w_1, w_2, que es el cuadrado simétrico de una ecuación diferencial de segundo orden. Estas ecuaciones son muy interesantes por sus buenas propiedades aritméticas, y se dice que son de Calabi-Yau. Haciendo $q = \exp(w_1(z)/w_0(z))$ e invirtiendo se obtiene la función $z = z(q)$ que se denomina *mirror map* (aplicación espejo) [2]. En este caso, es decir para orden 3, la función $z(q)$ resulta ser una función modular. En [40], Zudilin explica la relación entre las series de Ramanujan-Sato para $1/\pi$ y la definición de formas y funciones modulares elípticas. Como todavía no hemos dado esta definición, lo hacemos a continuación.

6.2. Formas y funciones modulares elípticas

Sea Γ el denominado grupo modular,

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ ad - bc = 1 \right\}.$$

Las matrices γ del grupo Γ proporcionan una simetría al retículo $\Lambda(\omega_1,\omega_2)=\{m\omega_1+n\omega_2 \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$ del plano complejo, donde[4] $(\omega_1,\omega_2)^T$ con $\omega_1/\omega_2\notin\mathbb{R}$ es un vector de números complejos, de forma que otro vector $(\nu_1,\nu_2)^T$ genera el mismo retículo si y sólo si es la imagen del primero dada por una matriz de Γ. *Módulo*[5] la relación de equivalencia inducida por $\Lambda(\omega_1,\omega_2)\sim\Lambda(\omega_1/\omega_2,1)$, vemos que cada retículo es de la forma $\Lambda(\tau,1)$. Como $\Lambda(\tau,1)=\Lambda(1,\tau)\sim\Lambda(\tau^{-1},1)$ podemos elegir τ en el semiplano superior complejo [15]. Entonces, con un pequeño abuso de lenguaje, escribimos ξ en vez del vector $(\xi,1)^T$ y tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}.$$

Una función $f(\tau)$ decimos que es una forma modular elíptica[6] de peso k y nivel ℓ para el grupo $\Gamma_0(\ell)=\{\gamma\in\Gamma \mid c\equiv 0 \pmod{\ell}\}$ de congruencias de Hecke si f es holomorfa en el semiplano superior complejo y en la cúspide (es decir, cuando $\tau\to i\infty$), y satisface

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^k f(\tau).$$

Si $k=0$ entonces decimos que $f(\tau)$ es una función modular elíptica[7]. Tomando $a=b=d=1$ y $c=0$ deducimos que, si f es una forma modular, $f(\tau+1)=f(\tau)$, y por lo tanto admite un desarrollo de Fourier

$$f(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}h_n e^{2\pi i\tau n}=\sum_{n=0}^{\infty}h_n q^n, \quad q=e^{2\pi i\tau};$$

con un pequeño abuso de notación es habitual usar $f(q):=f(q(\tau))$. Si $\ell=1$, la condición $c\equiv 0 \pmod{1}$ es superflua, y $\Gamma_0(1)=\Gamma$.

Los valores algebraicos de las ternas (z,b,a) de las series reales de Ramanujan (3) corresponden a valores de τ de la forma $2\tau=i\sqrt{r}$ con r racional (series de términos positivos) o $2\tau=1+i\sqrt{r}$ con r racional (series alternadas).

7. Series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$

En el año 2003 descubrí la siguiente fórmula ([25] y [26]):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{8n}2^{4k}}\frac{\binom{2n}{n}^3\binom{2k}{k}^2}{\binom{n+k}{n}^2}(6n+4k+1)=\frac{4}{\pi}. \tag{14}$$

[4] El exponente T denota el vector traspuesto.

[5] De ahí el nombre *modular*.

[6] El nombre de *elípticas* viene de su relación con las funciones elípticas, que son funciones complejas doblemente periódicas, con periodos ω_1 y ω_2.

[7] Las funciones $x_\ell(q)$, aunque modulares en un sentido amplio, no lo son con esta definición. Pero las funciones $z_\ell(q)$, por ejemplo $z_3(q)=4x_3(q)(1-x_3(q))$, sí lo son.

El caso particular $k = 0$ es la fórmula de Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{6n+1}{2^{8n}} = \frac{4}{\pi}. \tag{15}$$

¿Por qué es interesante la fórmula (14)? Podría pensarse que es más difícil de demostrar que (15). Pero no es así. El hecho de que la suma sea independiente del parámetro k permite una demostración automática con el algoritmo WZ de Wilf-Zeilberger, que está implementado en Maple por Doron Zeilberger. Lo difícil es atinar en la forma de introducir el parámetro libre k para que la suma no varíe, pero cuando lo conseguimos el algoritmo la certifica y nos devuelve una función que nos da la llave de la demostración. El algoritmo realiza muchos cálculos simbólicos para encontrar la función llave. ¿Podemos entonces escribir la demostración completa en un papel? Sí, y es muy corta, utilizando la función llave se reduce a una comprobación rutinaria.

Pero lo más interesante es que también descubrí la fórmula ([25] y [26])

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{12n}2^{8k}} \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2k}{k}^4}{\binom{n+k}{n}^4} (20n^2 + 8n + 1 + 24kn + 8k^2 + 4k) = \frac{8}{\pi^2}, \tag{16}$$

cuyo caso particular $k = 0$ no es una serie de tipo Ramanujan para $1/\pi$ sino un nuevo tipo de serie, de aspecto similar, pero para $1/\pi^2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^5 \frac{20n^2+8n+1}{2^{12n}} = \frac{8}{\pi^2}.$$

Las generalizaciones pueden ser muy complicadas, como, por ejemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{2n}{n}^5 \binom{2n+2k}{n+k}^4}{\binom{2n+k}{n}^4} \frac{1}{2^{20n}2^{8k}} \left(52n^2 + 12n + 1 + k\,(40n + 8k + 4) - \frac{(2n+1)^5(6n+3+4k)}{16(2n+1+k)^4} \right) = \frac{8}{\pi^2},$$

cuyo caso particular $k = 0$ es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{2n}{n}^5 \frac{820n^2+180n+13}{2^{20n}} = \frac{128}{\pi^2}.$$

Pero ¿cómo se nos puede ocurrir esa fórmula general? Resulta que, aunque no lo parezca, es una transformación sencilla de la fórmula (16). Si no hubiera sido por eso difícilmente se nos hubiera ocurrido. Esto nos hace reflexionar sobre lo difícil que puede llegar a ser descubrir este tipo de generalizaciones. Y tal vez por esto (se desconoce si existen siempre generalizaciones con k), aunque se conocen ya 11 series hipergeométricas convergentes para $1/\pi^2$, la mayoría sólo se han podido conjeturar [24], como, por ejemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^5} \frac{(-1)^n}{48^n}(252n^2 + 63n + 5) \stackrel{?}{=} \frac{48}{\pi^2} \tag{17}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{6}\right)_n \left(\frac{5}{6}\right)_n}{(1)_n^5} \frac{(-1)^n}{80^{3n}}(5418n^2 + 693n + 29) \stackrel{?}{=} \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}.$$

La última escrita con factoriales tiene una forma muy concisa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{5418n^2 + 693n + 29}{(-2880)^{3n}} \stackrel{?}{=} \frac{128\sqrt{5}}{\pi^2}.$$

Además, en colaboración con Gert Almkvist descubrimos la siguiente fórmula similar pero de convergencia más lenta [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n)!}{(n!)^6} \frac{532n^2 + 126n + 9}{10^{6n}} \stackrel{?}{=} \frac{375}{4\pi^2},$$

que tiene la curiosa propiedad de que, como los coeficientes son números enteros, todos los denominadores son potencias de 10. Al poco tiempo de ver mis primeras fórmulas para $1/\pi^2$, Boris Gourevitch encontró (con el algoritmo PSLQ) una para $1/\pi^3$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^7}{(1)_n^7}(168n^3 + 76n^2 + 14n + 1)\frac{1}{2^{6n}} \stackrel{?}{=} \frac{32}{\pi^3}.$$

En 2010 James Cullen (con el algoritmo PSLQ) encontró una para $1/\pi^4$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^7 \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^9} \frac{1}{2^{12n}}(43680n^4 + 20632n^3 + 4340n^2 + 466n + 21) \stackrel{?}{=} \frac{2048}{\pi^4},$$

y en 2017 Yue Zhao descubrió otra (con la teoría de motivos hipergeométricos para encontrar valores algebraicos posibles de z y el algoritmo PSLQ para encontrar los coeficientes del polinomio):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^5 \left(\frac{1}{3}\right)_n \left(\frac{2}{3}\right)_n \left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(1)_n^9} \left(\frac{-27}{256}\right)^n (4528n^4 + 3180n^3 + 972n^2 + 147n + 9) \stackrel{?}{=} \frac{768}{\pi^4}.$$

7.1. Relación con la teoría de Calabi-Yau

Wadim Zudilin introdujo el concepto de ecuaciones diferenciales de Calabi-Yau para investigar la simetría de espejo (*mirror simmetry*) desde el punto de vista de la teoría de números [39]. Almkvist, al ver las fórmulas para $1/\pi^2$ en [24], inmediatamente se dio cuenta de la relación que tenían con las de ecuaciones diferenciales de Calabi-Yau de orden 5, que a su vez se relacionan con las de orden 4, e informó a Zudilin sobre dichas fórmulas. La aplicación espejo (*mirror map*) $z(q)$ generaliza el concepto de función modular de las de orden 2 y 3, pero deja de ser una función modular [3]. Aunque la teoría de las ecuaciones diferenciales de Calabi-Yau permite hallar las funciones que parametrizan las series para $1/\pi^2$, el problema que no sabemos resolver es el de evaluar de forma exacta dichas funciones en los puntos singulares (que ahora son mucho más complicados y muy escasos). Así que las fórmulas siguen sin estar establecidas, ver [1] y [2].

7.2. ¿Teoría modular? Sí, pero de dos o más variables complejas

Un avance prometedor es el conseguido por L. Dembélé, A. Panchishkin, J. Voight y W. Zudilin en 2019 [23]. Estos autores han observado y reconocido la relación de las series de tipo Ramanujan para $1/\pi^2$ con ciertas formas modulares de Hilbert de peso $(2,4)$. Por ejemplo, los autores sugieren que la fórmula (17) se explica por la existencia de una forma modular f de Hilbert sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{12})$ de peso $(2,4)$ y nivel 81. Sus investigaciones continúan y además piensan extenderlas a todas las fórmulas para $1/\pi^k$ con $k \geq 2$.

Agradecimientos. El autor está muy agradecido al profesor Antonio Durán, de la Universidad de Sevilla, por su invitación a dar una charla sobre las series de Ramanujan para $1/\pi$ en una jornada especial dedicada a Srinivasa Ramanujan (1887–1920), el 19 de febrero de 2020. Y a La Gaceta por sugerirme la posible preparación de un artículo basado en dicha conferencia.

Referencias

[1] G. Almkvist y J. Guillera, Ramanujan-like series for $1/\pi^2$ and string theory, *Exp. Math.* **21** (2012), 223–234.

[2] G. Almkvist y J. Guillera, Ramanujan-Sato-like series, *Number theory and related fields: in memory of Alf van der Poorten*, 55–74, Springer Proc. Math. Stat., 43, Springer, 2013.

[3] G. Almkvist y W. Zudilin, Differential equations, mirror maps and zeta values, *Mirror Symmetry V* (N. Yui, S.-T. Yau y J. D. Lewis, eds.), 481–515, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, International Press & Amer. Math. Soc., 2006.

[4] R. Álvarez Nodarse, Ramanujan y las q-series, *La Gaceta de la RSME* **23** (2020), 263–302.

[5] N. D. Baruah y B. Berndt, Eisenstein series and Ramanujan-type series for $1/\pi$, *Ramanujan J.* **23** (2010), 17–44.

[6] N. D. Baruah y B. Berndt, Ramanujan's series for $1/\pi$ arising from his cubic and quartic theory of elliptic functions, *J. Math. Anal. Appl.* **341** (2010), 357–371.

[7] N. D. Baruah, B. C. Berndt y H. H. Chan, Ramanujan's series for $1/\pi$: A survey, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 567–587.

[8] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] B. C. Berndt, *Ramanujan's Notebooks, Part V*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[10] B. C. Berndt, S. Bhargava y F. G. Garvan, Ramanujan's theories of elliptic functions to alternative bases, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 4163–4244.

[11] J. M. Borwein y P. B. Borwein, *Pi and the AGM: A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley, New York, 1987.

[12] J. M. Borwein y P. B. Borwein, More Ramanujan-type series for $1/\pi$, *Ramanujan Revisited* (G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan y R. A. Rankin, eds.), 359–374, Academic Press, Boston, 1988.

[13] J. M. Borwein y P. B. Borwein, Class number three Ramanujan type series for $1/\pi$, *J. Comput. Appl. Math.* **46** (1993), 281–290.

[14] J. M. Borwein, P. B. Borwein y D. H. Bailey, Ramanujan, modular equations, and approximations to pi, or How to compute one billion digits of pi, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 201–219.

[15] F. Chamizo y D. Raboso, Formas modulares y números casi enteros, *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), 539–555.

[16] H. H. Chan y W.-C. Liaw, On Russell-type modular equations, *Canad. J. Math.* **52** (2000), 31–36.

[17] H. H. Chan, W.-C. Liaw y V. Tan, Ramanujan's class invariant λ_n and a new class of series for $1/\pi$, *J. London Math Soc.* **64** (2001), 93–106.

[18] H. H. Chan, S.H. Chan y Z. Liu, Domb's numbers and Ramanujan-Sato type series for $1/\pi$, *Adv. Math.* **186** (2004), 396–410.

[19] H. H. Chan y S. Cooper, Rational analogues of Ramanujan's series for $1/\pi$, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **153** (2012), 361–383.

[20] H. H. Chan, J. Wan y W. Zudilin, Legendre polynomials and Ramanujan-type series for $1/\pi$, *Israel J. Math.* **194** (2013), 183–207.

[21] D. Chudnovsky y G. Chudnovsky, Approximations and complex multiplication according to Ramanujan, *Ramanujan Revisited* (G. E. Andrews, R. A. Askey, B. C. Berndt, K. G. Ramanathan y R. A. Rankin, eds.), 375–472, Academic Press, Boston, 1988.

[22] S. Cooper, *Ramanujan's Theta Functions*, Springer, 2017.

[23] L. Dembélé, A. Panchishkin, J. Voight y W. Zudilin, Special hypergeometric motives and their L-functions: Asai recognition, *Exp. Math.*, por aparecer. Prepublicación disponible en `https://arxiv.org/abs/1906.07384`.

[24] J. Guillera, About a new kind of Ramanujan-type series, *Exp. Math.* **12** (2003), 507–510.

[25] J. Guillera, Generators of some Ramanujan formulas, *Ramanujan J.* **11** (2006), 41–48.

[26] J. GUILLERA, Historia de las fórmulas y algoritmos para π, *La Gaceta de la RSME* **10** (2007), 159–178.

[27] J. GUILLERA, A method for proving Ramanujan's series for $1/\pi$, *Ramanujan J.* **52** (2020), 421–431.

[28] J. GUILLERA, Proof of Chudnovskys' hypergeometric series for $1/\pi$ using Weber modular polynomials, *Transient Transcendence in Transylvania* (Trans'19, Braşov, 13 al 17 de mayo de 2019), Springer Proc. Math. Stat., Springer, por aparecer.

[29] J. GUILLERA, Proof of a rational Ramanujan-type series for $1/\pi$: The fastest one in level 3, *Analytic and Combinatorial Number Theory: The Legacy of Ramanujan* (en honor a Bruce Berndt en su 80 cumpleaños, University of Illinois at Urbana-Champaign, 6 al 9 de junio de 2019, G. Andrews, M. Filaseta y Ae Ja Yee, eds.), *Int. J. Number Theory*, por aparecer.

[30] J. GUILLERA, The fastest series for $1/\pi$ due to Ramanujan. (A complete proof using Maple), 2020. `https://arxiv.org/abs/1911.03968`.

[31] J. GUILLERA Y W. ZUDILIN, Ramanujan-type formulae for $1/\pi$: The art of translation, *The Legacy of Srinivasa Ramanujan* (B. C. Berndt y D. Prasad, eds.), 181–195, Ramanujan Math. Soc. Lecture Notes Series, 20, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2013.

[32] L. MILLA, An efficient determination of the coefficients in Chudnovskys' series for $1/\pi$, *Ramanujan J.*, por aparecer.

[33] S. RAMANUJAN, Modular equations and approximations to π, *Quarterly Journal of Mathematics* **45** (1914), 350–372.

[34] S. RAMANUJAN, *Notebooks* (2 volúmenes), Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1957.

[35] M. RONAN, *Symmetry Monster: One of the Greatest Quests of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[36] A. SUTHERLAND, Modular polynomials for Weber's f-function, `https://math.mit.edu/~drew/WeberModPolys.html` (su página personal `https://math.mit.edu/~drew/` tiene muchos más enlaces útiles).

[37] J. WAN, Series for $1/\pi$ using Legendre's relation, *Integr. Transforms Spec. Funct.* **25** (2014), 1–14.

[38] Y. ZHAO, Chudnovsky's formula for $1/\pi$ revisited, 2018, `https://arxiv.org/abs/1807.10125`.

[39] W. ZUDILIN, Number theory casting a look at the mirror, 2000. Disponible en `https://arxiv.org/abs/math/0008237`.

[40] W. ZUDILIN, Ramanujan-type formulae for $1/\pi$: A second wind?, *Modular Forms and String Duality* (Banff, 3 al 8 de junio de 2006, N. Yui, H. Verrill y C. F. Doran, eds.), 179–188, Fields Inst. Commun. Ser., 54, Amer. Math. Soc., 2008.

JESÚS GUILLERA, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, 50009 ZARAGOZA