

Sobre el problema número 7 de Smale*

por

Carlos Beltrán Álvarez[†]

RESUMEN. En este artículo describimos la situación de la investigación sobre el conocido como *Problema número 7 de Smale*, propuesto originalmente por Mike Shub y Steve Smale en 1993, y posteriormente añadido a la lista de Smale de *Problemas para el Siglo XXI*. Tratamos de describir las diferentes facetas del problema, así como muchos de los resultados que se conocen, evitando tecnicismos innecesarios.

1. INTRODUCCIÓN

A finales del siglo pasado el prestigioso matemático y medalla Fields Stephen Smale publicó, a instancias de Vladimir Arnold en representación de la International Mathematical Union, una lista de 18 problemas para servir de inspiración a los investigadores en matemáticas. Smale llamó a su lista *Mathematical Problems for the Next Century*, y la elaboró de acuerdo con tres criterios: que los problemas tuvieran enunciados sencillos, que se adaptasen a su gusto y a su historia personal, y que, en su opinión, los intentos para resolverlos generasen resultados importantes para las matemáticas en el siglo XXI. Solo tres de estos problemas (el n.º 2, el n.º 14 y el n.º 17) están resueltos hoy en día. Entre los quince restantes, sin duda muchos matemáticos tendrán su favorito. En estas páginas describiré el estado actual de nuestro conocimiento sobre el problema abierto, a mi juicio, más bonito de la lista de Smale: el problema número 7 o la distribución de puntos en la esfera. Hay tratados enteros, y largos y numerosos artículos sobre este tema, de modo que en este trabajo adoptaré un punto de vista particular, criticable acaso por subjetivo, poniendo el énfasis tal vez en algunos detalles donde no se pone en otros trabajos, y dejándome ocasionalmente llevar por la impronta personal que me han dejado muchos años de estudio (incluso de obsesión) dedicados a buscar la solución de este problema. Ruego al lector me disculpe por esta licencia.

*Este artículo se escribió originalmente para conmemorar el 50 aniversario de los estudios de Matemáticas en la Universidad de La Laguna, y con ese motivo iba a publicarse en la *Revista de la Academia Canaria de Ciencias*. Solo posteriormente aparecería en *La Gaceta*. Por desgracia, la pandemia de COVID ha retrasado las celebraciones del aniversario, por lo que tanto el autor como la Real Academia Canaria de Ciencias nos han autorizado a adelantar la publicación. Agradecemos a ambos su generosidad.

[†]El autor está financiado por los proyectos MTM2017-83816-P y MTM2017-90682-REDT del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, y por el proyecto 21.SI01.64658 del Banco Santander en colaboración con la Universidad de Cantabria.

1.1. HISTORIA DEL PROBLEMA

El problema n.º 7 de Smale consiste en describir una serie de puntos en la esfera que cumplan buenas propiedades de distribución. Es de hecho una versión computacional de un problema cuyo enunciado en tiempos modernos se atribuye a J. J. Thomson (descubridor del electrón). Como proponente de un modelo atómico pre-cuántico que aún se estudia en los cursos de bachillerato, Thomson creía que el átomo podía ser una suerte de bola de carga positiva en cuyo interior o en cuya superficie se encontrasen incrustados un número de «corpúsculos» (electrones) de carga negativa. Intrigado por la distribución espacial que adquirirían dichos corpúsculos en un átomo dado, propuso en [69], muy poco antes del advenimiento de la mecánica cuántica, el que hoy en día es conocido como el problema de Thomson: ¿cómo se distribuirían un número de partículas que se repelen de acuerdo con la ley electrostática, si se confinan a un lugar determinado como una bola o una esfera? Más concretamente, supongamos que tenemos N partículas confinadas a la superficie de la esfera unidad \mathbb{S} , pongamos en posiciones dadas por $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}$. En lo que sigue llamaremos ω_N a un tal conjunto de partículas, identificadas con sus posiciones. El potencial electrostático de dichas partículas es (salvo por una constante multiplicativa que no será importante para nosotros)

$$E_1(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|},$$

donde $\|\cdot\|$ denota la norma usual en \mathbb{R}^3 . La pregunta de Thomson quedaría respondida si para cada N supiésemos dar exactamente las posiciones de las partículas que minimizan este potencial, esto es, si supiésemos resolver el problema de minimización

$$\arg \min_{\omega_N \subseteq \mathbb{S}} E_1(\omega_N)$$

(la notación $\arg \min f$ alude al argumento que minimiza f). Esta tarea hoy en día es considerada por muchos imposible, salvo para valores muy concretos de N . No obstante, se ha conseguido hacer muchos progresos parciales (entre ellos, los que mencionaremos en las siguientes páginas) que han supuesto grandes avances en áreas como Teoría del Potencial y Teoría de Aproximación. Resultará útil considerar el problema generalizado

$$\arg \min_{\omega_N \subseteq \mathbb{S}} E_s(\omega_N), \quad E_s(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}, \quad (1.1)$$

donde $s > 0$ es un número real arbitrario y E_s recibe el nombre de potencial de Riesz.

El modelo atómico de Thomson quedó pronto descartado, pero su pregunta siguió intrigando a los científicos. Tres décadas después, el botánico inglés P. L. M. Tammes se encontraba analizando partículas microscópicas de polen cuando descubrió que los extraños patrones (en forma de agujeros o de cúspides) que tienen dichas partículas en su superficie correspondían, de manera muy precisa y sorprendente, a la forma

que tendrían un número fijo de puntos repartidos por su superficie de modo que la mínima distancia entre ellos fuese lo más grande posible. Dicho con otras palabras, si para una colección de puntos ω_N consideramos su distancia de separación

$$d_{\text{sep}}(\omega_N) = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|,$$

la posición de las estudiadas por Tammes resolvía (al menos de forma aproximada) el problema de optimización

$$\arg \max_{\omega_N \subseteq S} d_{\text{sep}}(\omega_N). \quad (1.2)$$

El lector puede admirar las fotografías realizadas con microscopio electrónico de este tipo de partículas en un precioso volumen [46] dedicado exclusivamente a esta fascinante cuestión. Como curiosidad, Tammes observó que existían partículas de polen de forma aproximadamente esférica que tenían en su superficie dos agujeros (situados aproximadamente en polos opuestos), tres agujeros (situados aproximadamente en los vértices de un triángulo equilátero), cuatro agujeros (situados aproximadamente en los vértices de un tetraedro regular), seis agujeros (situados aproximadamente en los vértices de un octaedro regular), etc. Pero no encontró partículas con cinco agujeros. Tammes [68] realizó un estudio geométrico exhaustivo aunque informal, concluyendo la notable propiedad de que si en una esfera se pueden colocar 5 partículas separadas por una distancia d , entonces también se pueden colocar 6 partículas separadas por la misma distancia. Una reflexión parecida le llevó a la misma conclusión con 11 agujeros: si caben 11 entonces caben 12, y de nuevo no encontró, o no encontró apenas, granos de polen con 11 agujeros. Así, postuló que las irregularidades de los granos de polen van saliendo siempre que haya una cierta cantidad de superficie libre (característica de cada especie), acomodándose con los ya existentes hasta expandirse por todo el espacio disponible, lo que concordaba con sus observaciones. La relación de este problema de Tammes con la energía de Riesz viene de observar que si hacemos $s \rightarrow \infty$ en (1.1), el problema de minimización dará importancia únicamente a los pares de puntos más cercanos entre sí. En efecto, sucederá entonces que, en algún sentido, una solución de (1.1) con $s \rightarrow \infty$ proporciona una solución de (1.2).

A partir de la década de 1950, el problema adquiere importancia en la comunidad matemática, y aparece un artículo de Whyte [71] que acercaría al lenguaje matemático moderno la formulación del problema. Whyte proponía estudiar otra versión natural del problema de Thomson que ya había sido de alguna forma considerada por Fekete: tratar de minimizar la energía logarítmica

$$\arg \min_{\omega_N \subseteq S} E_{\log}(\omega_N), \quad E_{\log}(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{\|x_i - x_j\|},$$

que será de hecho nuestra principal ocupación en estas páginas. Siguiendo la estela de estos precursores, un buen número de físicos y matemáticos se han visto involucrados en el estudio de las colecciones de puntos con propiedades especiales. Hoy en día, una

gran comunidad internacional se interesa por el problema, proliferando los textos recopilatorios como [25, 27, 49], así como los congresos y escuelas sobre el tema, entre ellas una Escuela Lluís Santaló en la UIMP que será organizada por el autor de este artículo y por Jordi Marzo bajo el paraguas de la Real Sociedad Matemática Española, y cuya celebración tendrá lugar cuando lo permita la pandemia mundial que vivimos hoy en día.

1.2. EL PROBLEMA EN LA MITOLOGÍA CLÁSICA

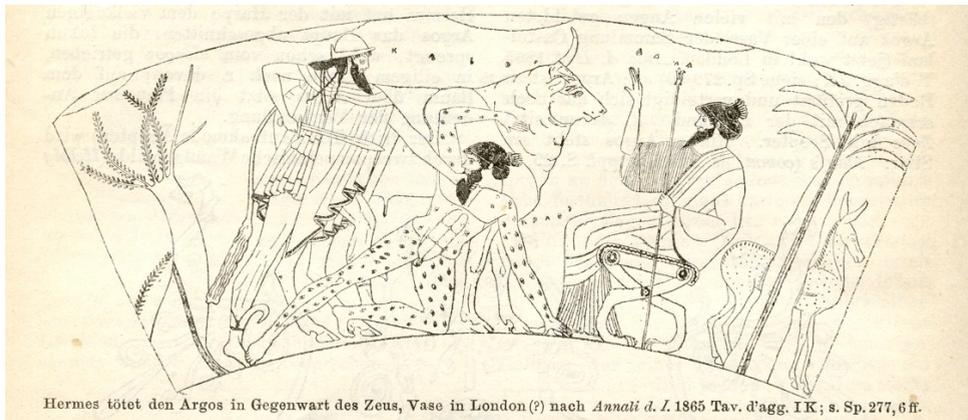
Podemos remontarnos más en el tiempo y aún encontramos, de alguna manera más o menos velada, referencias a este problema. En sus *Metamorfosis* [56], Ovidio cuenta la historia de la ninfa Ío, observada por Júpiter mientras caminaba por un espeso bosque. Fascinado por su belleza, el dios la asalta mientras cubre la zona con una espesa niebla para no ser observado por su esposa Juno. Pero la diosa, sospechando (con razón) de su marido, corre hacia allí en su carro tirado por su animal predilecto, el pavo real, cuya cola por aquel entonces no tenía los bonitos adornos llenos de círculos multicolor que hoy en día ostenta.

Para evitar ser descubierto, y en el último momento antes de la llegada de Juno, Júpiter convierte a Ío en una hermosa y blanca vaca, simulando estar admirando a tan fabuloso animal. Pero Juno no se da por satisfecha, y le exige a su marido que se la entregue para custodiarla. Por miedo a ser descubierto, el caprichoso dios del Olimpo decide entregar a la desdichada Ío a su consorte, y esta, convencida de que se trata en realidad de una doncella, la pone al cuidado de su querido Argos Panoptes, un gigante que, según Ovidio, tenía cien ojos distribuidos por todo su cuerpo de forma que, aunque muchos de ellos estuviesen cerrados, pudiese seguir viendo en todas las direcciones. Un guardián perfecto.

Júpiter, carcomido por la culpa, finalmente envía a su mensajero a rescatar a Ío, y Mercurio lo consigue contándole a Argos una larga historia pastoril mientras le acaricia uno a uno los ojos con una varita mágica. Cuando finalmente el gigante se duerme, Mercurio lo asesina y libera a Ío. Aún en su forma animal, esta recorre todo el mundo e incluso consigue revelar a su familia su verdadera identidad, hasta que finalmente la ira de Juno se aplaca y la ninfa es devuelta a su forma humana.

Un último detalle colorido de la inagotable imaginación de los cuentacuentos antiguos: tras asesinar a Argos, Mercurio recoge todos sus ojos, dándoselos a Juno para que los coloque en la cola de su ave favorita y le dé el aspecto con el que la conocemos hoy en día.

Los artistas griegos que dibujaron la escena hace 25 siglos colocaron un gran número de ojos distribuidos por el cuerpo de Argos, posiblemente con el criterio de mantener entre uno y otro ojo una distancia razonable, a la vez que vigilaban que no quedaran espacios demasiado grandes sin rellenar en el dibujo del gigante. Una vasija con tal pintura ha llegado hasta nuestros días y se puede encontrar en el Kunsthistorisches Museum en Viena, véase la figura 1. Así, antes de plantearse distribuir puntos en objetos como la esfera, se consideró el problema (sin duda, mucho más difícil desde el punto de vista matemático) de distribuir puntos en la figura humana.



Hermes tötet den Argos in Gegenwart des Zeus, Vase in London (?) nach *Annali d. I.* 1865 Tav. d'agg. I K; s. Sp. 277, 6 ff.

Figura 1: Reproducción de un vaso ateniense del siglo V a. C. Hermes (Mercurio) asesina a Argos Panoptes bajo la mirada de Zeus (Júpiter) mientras Ío, convertida en vaca, contempla la escena desde el fondo. Obsérvense los ojos distribuidos uniformemente en el cuerpo de Argos. La vasija original se puede encontrar en el Kunsthistorisches Museum en Viena. (Fotografía de Wilhelm Heinrich Roscher, 1890.)

1.3. ORGANIZACIÓN DEL ARTÍCULO

He optado por escribir muchas secciones cortas describiendo las distintas facetas del problema 7 de Smale. En algunos puntos he respetado la estructura de un artículo [8] que escribí sobre este tema en 2011, y que ha quedado obsoleto desde entonces debido a los avances realizados por mucha gente en los últimos años.

1.4. AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a mis colegas Nuria Corral, Juan G. Criado del Rey, Ujué Etayo, Fátima Lizarte, Jordi Marzo y Quim Ortega-Cerdà: por las muchas horas que hemos pasado discutiendo de este problema (¡y fantaseando con resolverlo!), y también por vuestra lectura crítica de versiones previas de este escrito. Y muchas gracias a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de La Laguna y a las personas que organizaron los actos del 50 aniversario: imposible superar vuestra hospitalidad, me encantó compartir con vosotros esos momentos de celebración... ¡que cumpláis muchos más! Gracias también a un revisor anónimo del artículo de la *Revista de la Academia Canaria de Ciencias* y a LA GACETA, por sus sugerencias y comentarios.

2. DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

El problema 7 de Smale fue originalmente planteado por Shub y Smale en [63]. Para dar su enunciado exacto recordemos la notación de la introducción: denotaremos por ω_N una colección de N puntos diferentes $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}$, donde \mathbb{S} es la

esfera unidad en \mathbb{R}^3 . La *energía logarítmica* o *potencial logarítmico* de ω_N se define por

$$E_{\log}(\omega_N) = E_{\log}(x_1, \dots, x_N) = - \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|. \quad (2.1)$$

El mínimo valor posible de E_{\log} es entonces

$$m_N = \min_{\omega_N \subseteq \mathbb{S}} E_{\log}(\omega_N).$$

Una colección de puntos ω_N cuya energía es precisamente igual a m_N se llama una colección de *puntos de Fekete* (a veces, se les pone el apellido *elípticos*, pero nosotros lo omitiremos), y existe al menos una tal colección para cada valor de N . Nótese que una definición alternativa pero equivalente es: ω_N es una colección de puntos de Fekete si y solamente si el producto de sus distancias mutuas es tan grande como sea posible.

Con estas notaciones ya podemos escribir el enunciado exacto del principal problema abierto del área:

PROBLEMA NÚMERO 7 DE SMALE (véase [64] o [65]). *Encontrar ω_N tal que*

$$E_{\log}(\omega_N) - m_N \leq c \log N, \quad c \text{ una constante universal.} \quad (2.2)$$

Por *encontrar* Smale se refiere a dar una descripción simple y eficiente de los N puntos, o, en su defecto, a describir un algoritmo que en «input N » produzca ω_N . Técnicamente, el algoritmo ha de ser una máquina BSS que requiera tiempo polinomial en N (una máquina BSS, llamada así por Blum-Shub-Smale, véase [23] o [22], es, básicamente, un algoritmo como cualquiera que podamos programar en nuestro lenguaje favorito, en el que suponemos que las operaciones con números reales se hacen sin pérdida de precisión). Aclaremos el significado de la constante universal: si, por ejemplo, alguien encuentra una forma de generar, para cada N dado, N puntos en la esfera tales que su energía logarítmica es a lo sumo $m_N + 7 \log N$, entonces habrá resuelto el problema de Smale. Pero si alguien encuentra una forma de generar, para cada N dado, N puntos en la esfera tales que su energía logarítmica es a lo sumo $m_N + 7000 \log N$, entonces también habrá resuelto el problema de Smale.

NOTA 2.1. En la notación de [64] y [65], la suma en (2.1) se toma para $i < j$ en lugar de para $i \neq j$. Obviamente ambos problemas son equivalentes pues la energía simplemente se multiplica por 2 al tomar todos los pares (i, j) con $i \neq j$ en lugar de con $i < j$. En este artículo adoptamos la convención de (2.1) que es la que utilizan la mayoría de los trabajos en la actualidad.

El problema de encontrar colecciones de puntos de Fekete, entendidos como colecciones de puntos en cualquier conjunto compacto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ que minimizan la energía logarítmica, ha sido estudiado en casos muy generales, pero para muy pocos se conocen las respuestas exactas: el caso de que A sea una circunferencia es uno de ellos (la solución: N raíces de la unidad, giradas por una fase arbitraria). El caso de que $A = [a, b]$ sea un intervalo ya no es trivial, pero fue establecido por Fejér en [39]: llevando $[a, b]$ a $[-1, 1]$, resulta que los puntos de Fekete son los extremos del intervalo,

más las raíces de un cierto polinomio de Gegenbauer. Los polinomios de Gegenbauer son generalizaciones de los polinomios clásicos de Chebyshev. No queremos extendernos en esta cuestión, pero remitimos al lector a la sección 4 de [17], donde se deduce este hecho a partir de la interpretación electrostática de los ceros de un polinomio de dicha familia. También se comprende hasta cierto punto la situación si se consideran n partículas en intervalos no acotados y suponemos la presencia de un campo externo suficientemente bueno, véanse los trabajos de Szegő [67], Ismail [45] y Marcellán, Martínez-Finkelshtein y Martínez-González [51], o los de Orive y Sánchez-Lara [55] para otro tipo de extensiones, y se han encontrado interpretaciones electrostáticas de ceros de polinomios de Jacobi (una generalización de los polinomios de Gegenbauer), avance en el que ha tenido una gran importancia la escuela española de Teoría del Potencial y Polinomios Ortogonales, véanse los trabajos de Martínez-Finkelshtein, Martínez-González y Orive [52] y Castillo, Marcellán y Rebocho [29]. Después de haberse cosechado estos éxitos en el caso de conjuntos unidimensionales, podríamos esperar que el caso de dimensión 2 fuese accesible. Sin embargo, como veremos en las próximas páginas, el estudio de los puntos de Fekete en la esfera unidad resulta ser ya un reto titánico.

3. EL VALOR DE m_N

El primer escollo que nos encontramos cuando estudiamos el problema 7 de Smale es que el valor de m_N no es lo suficientemente bien comprendido. La Teoría Clásica del Potencial ha estudiado este problema desde hace cien años, desarrollando potentes técnicas que permiten demostrar mucho de lo que diremos a continuación para conjuntos compactos cualesquiera, siendo el caso de la esfera unidad \mathbb{S} uno de máximo interés. Para mantener un nivel más accesible en la exposición nosotros nos restringiremos, salvo ocasionalmente, a la esfera unidad. En 1923, Fekete demostró [40] que la sucesión

$$\frac{m_N}{N(N-1)}$$

es no decreciente. En particular, tiene límite superior $\tau_{\mathbb{S}}$ (que en el caso de que en lugar de la esfera tratemos otro conjunto A , denotaríamos τ_A y podría ser infinito). Este límite superior se llama el *diámetro transfinito* de la esfera \mathbb{S} . Por otro lado, podríamos tratar de sustituir la suma doble (2.1) por una integral doble, considerando la cantidad

$$\kappa = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{x,y \in \mathbb{S}} \log \frac{1}{\|x-y\|} d(x,y) = \frac{1}{2} - \log 2, \quad (3.1)$$

donde consideramos la medida usual que la esfera hereda de \mathbb{R}^3 (resulta que κ se puede calcular de forma exacta, por eso incluimos su valor en la expresión de arriba). Si (2.1) es la energía discreta de una colección de puntos, pensamos en κ como la energía continua de la esfera. Técnicamente, podríamos considerar otras formas de medir conjuntos en la esfera, dadas por otras medidas con o sin signo cualesquiera. Pues bien, la Teoría del Potencial nos garantiza que,elijamos la medida que elijamos, la que proporciona menor valor para la energía continua es precisamente la medida

uniforme natural en la esfera. Este número κ se llama *constante de Wiener*, $W(\mathbb{S})$, de la esfera (y, como el diámetro transfinito, se puede definir de forma similar para cualquier conjunto compacto). El siguiente es un resultado fundamental de Teoría del Potencial (véase el magnífico libro de Borodachov, Hardin y Saff [25, teorema 4.2.2] para una versión general):

TEOREMA 3.1. *Se tiene $\tau_{\mathbb{S}} = \kappa = W(\mathbb{S})$. En particular,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_N}{N^2} = \kappa = \frac{1}{2} - \log 2 \approx -0.193 \dots$$

Es más, la igualdad $\tau_A = W(A)$ se cumple también si cambiamos la esfera por un conjunto compacto infinito cualquiera A (con las definiciones para conjuntos generales que hemos esbozado arriba y en cuyos detalles no entramos por claridad de la exposición).

Dicho de otra forma, respecto a lo que a nosotros nos ocupa,

$$m_N = \left(\frac{1}{2} - \log 2 \right) N^2 + o(N^2).$$

Si queremos resolver el problema 7 de Smale ciertamente necesitaremos conocer algo más del valor de m_N . Una técnica general debida a Elkies y descrita por Lang en [50, lema 5.2, pp. 149–154] permite calcular cotas inferiores para la energía logarítmica de la esfera y de otros conjuntos (por ejemplo, junto a Ferizović [16] lo hemos adaptado al grupo de rotaciones del espacio), y proporciona la desigualdad

$$m_N \geq \kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} + O(N).$$

Wagner [70] fue más allá, y con un elegante argumento basado en la proyección estereográfica y la desigualdad de Hadamard calculó una constante C tal que

$$m_N \geq \kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} + CN.$$

Su método fue refinado por Rakhmanov, Saff y Zhou [58], que mejoraron el valor de la constante C . Además de eso, utilizaron una técnica basada en particiones de la esfera, dividiendo esta en conjuntos «regulares» (esto es, contenidos en y continentes de capas esféricas de tamaño aproximado $\text{Constante}/\sqrt{N}$) y tomando un punto en cada una de esas capas elegido al azar: es el llamado *jittered sampling*. Curiosamente, se puede calcular con cierta precisión la energía media de los puntos resultantes, proporcionando una cota superior para m_N que resulta ser igual en forma que la cota inferior de Wagner, pero con otra constante distinta en el término N . Las cotas fueron posteriormente mejoradas por Dubickas y Brauchart [34, 26] y luego por Brauchart, Hardin y Saff [28]. Más recientemente, Bétermin y Sandier [21], basándose en trabajos previos de Sandier y Serfaty [60], demostraron que el término $O(N)$ de hecho es de la forma $\text{Constante} \cdot N + o(N)$, pero no fueron capaces de calcular el valor de la constante. El siguiente resultado resume el conocimiento actual sobre el comportamiento asintótico de m_N :

TEOREMA 3.2. *Existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que*

$$m_N = \kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} + CN + o(N).$$

Es más,

$$-0.2232823 \leq C \leq 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + 3 \log \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0.0556053 \dots \quad (3.2)$$

Uno de los problemas abiertos más importantes del área es la siguiente conjetura, a la que se llegó en dos trabajos distintos utilizando argumentos muy diferentes.

CONJETURA 3.3 ([21, 28]). *La cota superior en (3.2) es, de hecho, una igualdad.*

4. LA DISTANCIA DE SEPARACIÓN

Hemos definido la distancia de separación de una colección ω_N por

$$d_{\text{sep}}(\omega_N) = \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|.$$

Por definición de E_{\log} , está claro que si ω_N es un conjunto de puntos de Fekete entonces $d_{\text{sep}}(\omega_N)$ no puede ser demasiado pequeña. Utilizando herramientas de Teoría del Potencial, Rakhmanov, Saff y Zhou [59, 58] demostraron por primera vez la cota inferior $3/(5\sqrt{N})$ para la distancia de separación de un conjunto de puntos de Fekete. Dubickas [34] mejoró el valor de la constante, obteniendo $7/(4\sqrt{N})$. La mejor cota conocida se debe a Dragnev [32]:

TEOREMA 4.1. *Sea ω_N un conjunto de puntos de Fekete. Entonces,*

$$d_{\text{sep}}(\omega_N) \geq \frac{2}{\sqrt{N-1}}.$$

Podemos preguntarnos cómo de bien separados podrían llegar a estar N puntos en la esfera unidad. Supongamos que N puntos están separados por una distancia d . Entonces, en torno a cada uno de ellos se puede situar una capa esférica de radio $d/2$ sin intersecciones con otras capas, con lo que la suma de las áreas de todas las capas (que a lo sumo puede ser 4π) será N veces el área de una capa, esto es, en números aproximados, $N\pi(d/2)^2$. Concluimos así que, para cualquier colección ω_N de puntos, la distancia de separación ha de ser, como mucho, $4/\sqrt{N}$. Un resultado más preciso en esta dirección es debido a Fejes Tóth y se puede consultar en [25, teoremas 3.3.4 y 3.7.2]: para cualquier $\omega_N \subseteq \mathbb{S}$,

$$d_{\text{sep}}(\omega_N) \leq \sqrt{4 - \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi N}{6(N-2)}} = \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{3^{1/4}\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

y la desigualdad es óptima en el sentido de que existen $\omega_N \subseteq \mathbb{S}$ tales que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_{\text{sep}}(\omega_N) \sqrt{N} = \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{3^{1/4}} = 3.80925 \dots$$

La siguiente es la principal pregunta abierta referente a la distancia de separación y relacionada con el problema 7 de Smale:

PROBLEMA 1. *Calcular*

$$I_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{\omega_N} d_{\text{sep}}(\omega_N) \sqrt{N}, \quad I_2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{\omega_N} d_{\text{sep}}(\omega_N) \sqrt{N},$$

donde el ínfimo y el supremo se toman con ω_N una colección de puntos de Fekete para todo N . Por lo dicho arriba, tenemos $2 \leq I_1 \leq I_2 \leq \frac{2^{3/2} \sqrt{\pi}}{3^{1/4}}$. En particular, desconocemos si $I_1 = I_2$.

Otro problema fundamental en el área es saber si los puntos que minimizan la energía logarítmica en esferas de dimensión $d \geq 3$ están bien separados (en el sentido de que la distancia entre ellos sea mayor que $CN^{-1/d}$ para alguna constante C), y también este es un problema abierto si consideramos la energía de Riesz para parámetros de s entre 0 y $d-2$, véase [25, capítulo 6] para más referencias y comentarios sobre estos problemas de separación.

5. RELACIÓN CON EL NÚMERO DE CONDICIÓN DE UN POLINOMIO UNIVARIADO

El motivo original por el que Shub y Smale plantearon el problema 7 en la forma en la que lo estudiamos hoy en día provenía del estudio de la estabilidad del cálculo de raíces de polinomios. En [61], Shub y Smale definieron, para cada polinomio y cada raíz del mismo, una cierta cantidad (el *número de condición*) que codifica cómo de sensible es dicha raíz ante perturbaciones de los coeficientes del polinomio en cuestión. Comencemos considerando un polinomio homogéneo de dos variables con coeficientes complejos

$$h(z, t) = \sum_{k=0}^N a_k z^k t^{N-k}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_N \neq 0,$$

donde $N \geq 1$ es el grado. Las raíces de h viven de forma natural en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$. Dicho de otra forma, una raíz de h es un punto $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tal que $h(a, b) = 0$ pero, como h es homogéneo, el que un punto (a, b) sea raíz es equivalente a que lo sea cualquier múltiplo no nulo de (a, b) , con lo que es natural considerar las raíces de h como elementos del espacio proyectivo. Si el lector no está familiarizado con la geometría proyectiva, que no tema: $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ resulta ser isométrico a la esfera \mathbb{S} , y es esa isometría la que nos resultará útil. Si ese es su caso, puede pensar por el momento en las raíces de h como vectores complejos.

Así pues, dada una raíz proyectiva $\zeta = (a, b) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ el número de condición de h en ζ es

$$\mu_{\text{norm}}(h, \zeta) = N^{1/2} \|(Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp})^{-1}\| \|h\| \|\zeta\|^{N-1},$$

o $+\infty$ si $Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ no es invertible. Aquí, $Dh(\zeta)|_{\zeta^\perp}$ es la restricción de la derivada $Dh(\zeta)$ al complemento ortogonal de ζ en \mathbb{C}^2 , y

$$\|h\| = \left(\sum_{k=0}^N \binom{N}{k}^{-1} |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

es la llamada norma de Bombieri (también conocida como norma de Weyl o de Kostlan o de Bombieri-Weyl) de h . Si no especificamos ninguna raíz concreta de h , simplemente tomamos el máximo:

$$\mu(h) = \max_{\zeta \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2): h(\zeta)=0} \mu(h, \zeta).$$

Sea ahora un polinomio univariado f con coeficientes complejos,

$$f(X) = \sum_{k=0}^N a_k X^k, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad a_N \neq 0,$$

y sea $z \in \mathbb{C}$ una raíz, en el sentido usual, de f . Definimos entonces

$$\mu(f, z) = \mu(h, (z, 1)), \quad \mu(f) = \max_{z \in \mathbb{C}: f(z)=0} \mu(f, z),$$

donde $h(X, Y) = \sum_{k=0}^N a_k X^k Y^{N-k}$ es el homogeneizado de f . Tomando $\|f\| = \|h\|$ y desarrollando el término de la derivada, se obtiene la expresión

$$\mu(f, z) = \frac{N^{1/2}(1 + |z|^2)^{\frac{N-2}{2}}}{|f'(z)|} \|f\|,$$

que nos permite calcular de manera efectiva el número de condición en casos sencillos. Por ejemplo, el número de condición de $f(X) = X^N - 1$ en la raíz $X = 1$ es

$$\mu(X^N - 1, 1) = \frac{2^{\frac{N-1}{2}}}{\sqrt{N}}.$$

En [63] Shub y Smale demostraron la siguiente relación entre el número de condición y los puntos de Fekete. Sean $\text{Re}(z)$ e $\text{Im}(z)$, respectivamente, las partes real e imaginaria de un número complejo $z \in \mathbb{C}$.

TEOREMA 5.1. *Sea $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ una colección de números complejos. Para $1 \leq i \leq N$, sea $x_i \in \mathbb{S}$ la preimagen de z_i por la proyección estereográfica, esto es (véase una explicación gráfica de la fórmula en la figura 2),*

$$x_i = \left(\frac{2 \text{Re}(z_i)}{1 + |z_i|^2}, \frac{2 \text{Im}(z_i)}{1 + |z_i|^2}, \frac{1 - |z_i|^2}{1 + |z_i|^2} \right)^T \in \mathbb{S}, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{5.1}$$

Supongamos que x_1, \dots, x_N son un conjunto de puntos de Fekete. Sea f un polinomio de grado N cuyas raíces son exactamente los correspondientes z_1, \dots, z_N . Entonces,

$$\mu(f) \leq \sqrt{N(N + 1)}.$$

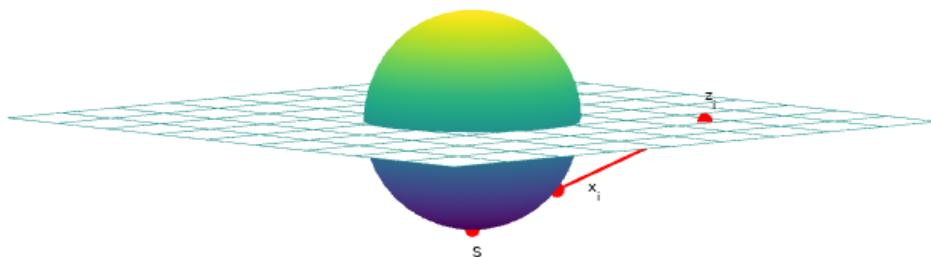


Figura 2: Representación de la proyección estereográfica (5.1). Los tres puntos representados (el polo sur S , el punto esférico x_i y el punto z_i del plano complejo $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$) están alineados. Este y otros gráficos en el artículo han sido producidos con el programa de software libre Octave [35].

De manera más general, sea $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ una colección cualquiera de N números complejos diferentes, y sea f un polinomio de grado N con exactamente esas raíces. Entonces, si x_1, \dots, x_N vienen dados por (5.1), se tiene

$$\mu(f) \leq \sqrt{N(N+1)} \frac{e^{E_{\log}(x_1, \dots, x_N)/2}}{e^{m_N/2}}.$$

Para demostrar el teorema 5.1, Shub y Smale comenzaron reescribiendo el número de condición en términos únicamente de los puntos esféricos: no es difícil (¡ni tampoco tan fácil!) demostrar que

$$\mu_{\text{norm}}(f) = \frac{1}{2} \sqrt{N(N+1)} \max_{1 \leq i \leq N} \frac{\left(\frac{1}{4\pi} \int_{p \in \mathbb{S}} \prod_{j=1}^N |p - x_j|^2 dp \right)^{1/2}}{\prod_{j \neq i} |x_i - x_j|}. \quad (5.2)$$

Puede verse que el término en el numerador es la norma L^2 de una cierta función continua, y el término en el denominador, tras tomar logaritmos, es la suma que aparece en (2.1) para i fijo. Por otro lado, si tomamos x_1, \dots, x_N muy bien distribuidos, más o menos esperamos que en la expresión

$$-E_{\log}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \log \|x_i - x_j\|$$

todos los sumandos correspondientes a los distintos valores de i aporten cantidades parecidas a la expresión final. Con ello, deberíamos tener que $\sum_{j \neq i} \log \|x_i - x_j\|$ es, de alguna manera, una cantidad bastante grande para todo i , con lo que podemos esperar que (5.2) proporcione una cota bastante pequeña para el número de condición. Convertir esta idea en un argumento sólido no es trivial (e invitamos al lector a sumergirse en [63] para ello), pero con la explicación anterior hemos pretendido dar una pincelada del motivo por el que el teorema 5.1 es cierto.

En [63] se señaló que no parecía fácil describir una sucesión de polinomios univariados p_N , con $\text{grado}(p_N) = N$ de tal forma que $\mu(f) \leq N^c$ para alguna constante c

fijada cualquiera. El teorema 5.1 dice que, si encontramos para cada N una colección de puntos ω_N que cumpla (2.2), entonces tal sucesión de puntos permite generar la sucesión de polinomios buscada. El problema de encontrar una tal sucesión de polinomios ha permanecido abierto hasta hace muy poco, en un trabajo conjunto con Etayo, Marzo y Ortega-Cerdà:

TEOREMA 5.2 (Resultado principal de [15]¹). *Dado cualquier N , se puede generar de forma explícita un polinomio p_N tal que $\mu(p_N) \leq C_1\sqrt{N}$ para una constante universal C_1 . Es más, la cota es óptima en el sentido de que existe otra constante universal C_2 tal que, para todo polinomio q_N de grado N , se tiene $\mu(q_N) \geq C_2\sqrt{N}$.*

La demostración del teorema 5.2 se basa precisamente en una construcción de puntos esféricos y en la fórmula (5.2): imaginemos que podemos describir, para cada N , una colección de N puntos $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}$ tales que dado cualquier $p \in \mathbb{S}$ se tenga

$$\sum_{i=1, i \neq i_0}^N \log \|p - x_i\| \approx N \int_{x \in \mathbb{S}} \log \|p - x\| dx = N\kappa, \tag{5.3}$$

donde i_0 es el índice del punto x_{i_0} más cercano a p de la colección. Tomando exponenciales, tendríamos entonces

$$\prod_{i=1, i \neq i_0}^N \|p - x_i\| \approx e^{N\kappa},$$

independientemente del punto p . Es fácil ver a partir de aquí que (5.2) necesariamente da un número pequeño, y un análisis detallado muestra el deseado $C_1\sqrt{N}$. Pero ¿por qué es razonable que haya una colección de puntos x_1, \dots, x_N que cumpla (5.3)? Pues porque (5.3) viene a ser una manera de decir que estos puntos nos permitan cambiar una integral por una suma discreta asociada. Así pues, el problema de buscar el polinomio p_N se reduce al problema de buscar fórmulas discretas de cuadratura para funciones de la forma $x \mapsto \log \|p - x\|$ (con p fijo pero arbitrario) en \mathbb{S} . Esto es lo que se consigue en [15].

6. UNA IGUALDAD QUE LIGA VARIAS ÁREAS DIFERENTES, Y LA DESIGUALDAD EXTENDIDA DE BOMBIERI-WEYL

La siguiente fórmula, descrita en [3] y demostrada en [10] con una notación ligeramente diferente de la aquí empleada, relaciona el número de condición, la energía logarítmica y una cantidad relacionada con la norma de Bombieri-Weyl:

$$E_{\log}(\omega_N) = \sum_{i=1}^N \log \mu(f, z_i) + N \log \frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{1 + |z_i|^2}}{\|f\|} - \frac{N}{2} \log N - N^2 \log 2 + N \log 2, \tag{6.1}$$

¹En el enlace <https://www.teamco.unican.es/portfolio-item/a-sequence-of-polynomials-with-optimal-condition-number/> está disponible un vídeo breve explicando el contenido de [15].

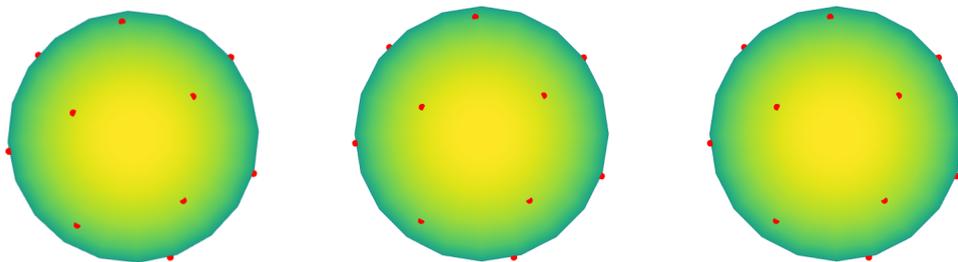


Figura 3: Distintas formas de obtener numéricamente puntos distribuidos de forma regular en la esfera: en la izquierda, 15 puntos de Fekete calculados de forma aproximada. En el centro, las raíces de un polinomio de grado 15 con un condicionamiento muy pequeño mandadas a la esfera por la proyección estereográfica (5.1). A la derecha, las raíces de un polinomio de grado 15 que maximiza aproximadamente el cociente (6.2), también transformadas por (5.1). Se observa que las tres configuraciones son muy parecidas (incluso indistinguibles al ojo humano).

donde $\omega_N = (x_1, \dots, x_N)$ está relacionado con z_1, \dots, z_N a través de la proyección estereográfica (5.1). Obsérvese que el término

$$\frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{1 + |z_i|^2}}{\|f\|} \quad (6.2)$$

en la fórmula anterior es el cociente entre el producto de la norma de Bombieri-Weyl de los factores (formas lineales) de f y la norma de Bombieri-Weyl de f . Esta cantidad es siempre mayor o igual que 1, véase el trabajo fundacional de Beauzamy, Bombieri, Enflo y Montgomery [5]. Los experimentos numéricos sugieren que minimizar E_{\log} es un problema similar a minimizar la suma de $\log \mu(f, z_i)$ y a maximizar el producto de la ecuación (6.2), véase la figura 3.

Esto podría resultar sorprendente, pero de hecho el cociente de (6.2) alcanza su mínimo (igual a 1) precisamente cuando todos los z_i son iguales, que evidentemente implica $E_{\log}(x_1, \dots, x_N) = \infty$. Pero ¿cuál es el máximo de ese cociente? Recordemos la llamada desigualdad de Bombieri [5, teorema 2.1] (véase también la continuación por Beauzamy, Trevisan y Wang [6]): para dos polinomios f, g de grados respectivos r y s se tiene

$$\|f \cdot g\| \geq \sqrt{\frac{r! s!}{(r+s)!}} \|f\| \cdot \|g\|, \quad (6.3)$$

y la cota es óptima. El problema de maximizar el cociente de (6.2) consiste en encontrar un análogo de (6.3) para productos de N polinomios, un problema nada elemental pero con su propia entidad matemática. Como se señala en [6], se sigue de (6.3) que

$$\frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{1 + |z_i|^2}}{\|f\|} \leq \sqrt{N!},$$

pero esta desigualdad está muy lejos de ser óptima. Recientemente, Etayo [37] ha demostrado un resultado mucho más preciso:

TEOREMA 6.1. *Existe una constante universal $K \in (0, 1)$ tal que*

$$K \sqrt{\frac{e^N}{N+1}} \leq \sup_{\text{grado}(f)=N} \frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{1+|z_i|^2}}{\|f\|} \leq \sqrt{\frac{e^N}{N+1}}.$$

El punto de partida de la demostración de Etayo es la combinación de la fórmula (6.1) con la cota inferior del teorema 5.2, de donde consigue obtener la cota superior del teorema 6.1. La cota inferior se obtiene considerando una sucesión de polinomios de grado N cuya existencia marca el teorema 5.2. Como consecuencia, Etayo también obtiene una desigualdad que generaliza (6.3), válida para el producto de un número cualquiera de polinomios de grados arbitrarios: si p_1, \dots, p_m son polinomios univariados de grados respectivos k_1, \dots, k_m , entonces

$$\|p_1 \cdots p_m\| \geq \text{máx} \left(\frac{k_1! \cdots k_m!}{(k_1 + \cdots + k_m)!}, \frac{k_1 + \cdots + k_m + 1}{e^{k_1 + \cdots + k_m}} \right)^{1/2} \|p_1\| \cdots \|p_m\|.$$

Este gran avance plantea, pues, el siguiente problema abierto (véase [37]):

PROBLEMA 2. *Demostrar o refutar la existencia de una constante K_0 tal que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\text{grado}(f)=N} \frac{\prod_{i=1}^N \sqrt{1+|z_i|^2}}{\|f\|}}{\sqrt{e^N/(N+1)}} = K_0.$$

En caso de que exista, encontrar el valor de K_0 .

Por todo lo dicho anteriormente, hay motivos para creer que la solución del problema 2 sería un paso decisivo en la solución del problema 7 de Smale.

7. VARIAS FORMAS DE GENERAR PUNTOS ALEATORIOS Y SUS ENER- GÍAS MEDIAS

Existen varias formas conocidas de generar puntos aleatorios en la esfera que se han propuesto como alternativas para describir colecciones de puntos con baja energía. En esta sección recopilamos algunas para las que se conoce de forma teórica el valor medio de la energía. Al restringirnos en este sentido (esto es, al exigir algún conocimiento teórico sobre el valor de la energía) omitimos otras muchas alternativas bien conocidas para generar puntos esféricos, remitiendo al lector al recopilatorio elaborado por Hardin, Michaels y Saff [42] para un análisis de estas otras opciones.

1. Puntos aleatorios elegidos de forma independiente. Esto es, tomamos N puntos idénticamente, independientemente y uniformemente distribuidos en \mathbb{S} . Es fácil ver, usando (3.1), que la energía media vale

$$\frac{1}{(4\pi)^N} \int_{x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}} \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\| d(x_1, \dots, x_N) = N(N-1)\kappa$$

(dado que el área de la esfera unidad es 4π , el factor que multiplica la integral es simplemente la normalización que nos da el valor medio en términos de la integral).

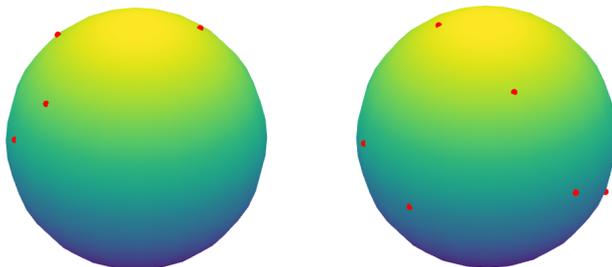


Figura 4: Izquierda: una colección de 10 puntos idéntica e independientemente distribuidos (solo 4 de esos puntos son visibles). Derecha: raíces de un polinomio aleatorio de grado 10 pasadas a la esfera por la proyección estereográfica (5.1). Visualmente podría parecer que la segunda colección de puntos está mejor distribuida que la primera, concordando con el resultado teórico.

2. Puntos obtenidos a partir de ceros de polinomios aleatorios. Tomamos ahora un polinomio aleatorio de grado N , entendiendo como aleatorio el que sea una combinación lineal con coeficientes gaussianos de una base ortonormal del espacio de polinomios con la métrica de Bombieri-Weyl. Dicho de otra forma,

$$p_N(z) = \sum_{k=0}^N a_k \binom{N}{k}^{1/2} z^k,$$

donde $a_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, esto es $a_k = \alpha_k + \mathbf{i}\beta_k$ con $\alpha_k, \beta_k \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$ variables aleatorias gaussianas reales con media 0 y varianza 1/2. Se sabe desde [62] que estos polinomios aleatorios están en media bien condicionados, en el sentido de que su número de condición es, en media, pequeño. Esto, combinado con el teorema 5.1, sugiere que los puntos esféricos correspondientes a ceros de polinomios aleatorios deberían tener también una energía relativamente pequeña. Más concretamente, consideremos los puntos esféricos x_1, \dots, x_N asociados a z_1, \dots, z_N por la proyección estereográfica (5.1). Junto con Armentano y Shub demostramos en [3] que el valor medio de la energía logarítmica de tales x_i es, exactamente,

$$\kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} - \kappa N.$$

Por comparación con el teorema 3.2, se ve que los ceros de polinomios aleatorios producen puntos esféricos mucho mejor distribuidos que si los eligiésemos de forma independiente. Este resultado se enmarca en una teoría más general relacionada con las secciones aleatorias en superficies de Riemann, véanse los trabajos de Zhong y Zelditch [73, 72]. En la figura 4 comparamos esta técnica para elegir puntos esféricos con la descrita en el punto 1.

3. Puntos esféricos obtenidos a partir de valores propios de matrices aleatorias. Consideramos ahora dos matrices aleatorias A, B con entradas gaussianas independientes entre sí, todas ellas $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, y mandamos los valores propios de

$A^{-1}B$ (que son números complejos) a la esfera por la proyección estereográfica. Es un resultado clásico en Física Matemática que los valores propios de tales matrices tienden a repelerse entre sí. De forma notable, Alishahi y Zamani lograron calcular en [1] el valor medio de la energía de los correspondientes puntos esféricos, que resulta ser (denotando por $\gamma = 0.57721\dots$ la constante de Euler-Mascheroni)

$$\kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} - \left(\log 2 - \frac{\gamma}{2}\right) N - \frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Esto es posible gracias a la teoría de procesos determinantes, expuesta detalladamente en el libro de Hough, Krishnapur, Peres y Virág [44], y demasiado extensa para explicarla aquí. Nótese que $\log 2 - \gamma/2 \approx 0.4045$, mientras que $-\kappa \approx 0.193$. Esto es, los puntos que provienen de ceros de polinomios aleatorios están mejor distribuidos, al menos en lo que respecta a la energía logarítmica, que los que provienen de valores propios de matrices aleatorias. Sin embargo, la técnica de procesos determinantes resulta ser de mucha mayor aplicación que la de los ceros de polinomios aleatorios, pues se puede aplicar en otros contextos y a otras energías distintas de la logarítmica con relativa facilidad: véase [1] para el análisis general de la energía de Riesz en la esfera 2-dimensional, así como las extensiones (debidas a algunos de los autores ya mencionados) [18, 12, 13] a esferas de dimensión superior, [54] para el toro plano, [16] para el grupo de rotaciones, o el trabajo en desarrollo con Delgado, Fernández y Sánchez-Lara sobre hasta qué punto los procesos asociados a los polinomios ortogonales clásicos generan puntos bien distribuidos en intervalos, cuestión que entraña una considerable dificultad.

4. Puntos esféricos distribuidos en paralelos. Describimos ahora una manera general de elegir una colección de puntos esféricos: decidamos colocarlos en un cierto número prefijado s de paralelos, entendiendo como un paralelo la circunferencia consistente en los puntos esféricos a una altura dada. Aún no elegimos las alturas, solo cuántos paralelos utilizaremos. Decidamos ahora también el número de puntos que poner en cada paralelo: r_1 puntos en el primer paralelo, r_2 en el segundo paralelo, y así sucesivamente hasta el s -ésimo paralelo. Pongamos que dentro de cada paralelo los correspondientes puntos han de estar equidistribuidos, esto es, que son esencialmente r_j raíces de la unidad (llevadas al paralelo correspondiente mediante una homotecia y una traslación). Pues bien, resulta que si ahora dejamos que en cada paralelo actúe una fase aleatoria (dicho de otro modo, si dejamos rotar aleatoria e independientemente cada uno de los paralelos), se puede obtener una fórmula más o menos sencilla para el valor medio de la energía logarítmica. Dicha fórmula da su valor óptimo para una cierta elección de las alturas de los paralelos (que aún no habíamos elegido), y con ello quedan fijados, a partir del número s y de los valores r_1, \dots, r_s , los parámetros de un conjunto aleatorio de puntos que podemos esperar estén bien distribuidos, y al que llamaremos el *conjunto diamante* por la similitud de sus caras con un diamante tallado. Pues bien, junto a Etayo, en [14] des-

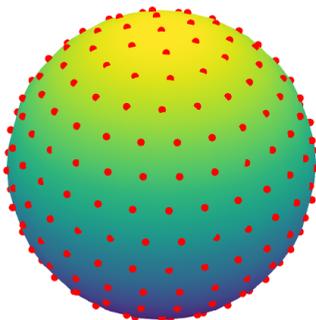


Figura 5: Una colección de 241 puntos distribuidos de la forma indicada por el conjunto diamante, tras elegir correctamente los parámetros correspondientes. Resulta claro que se trata de puntos muy bien distribuidos según una definición intuitiva. El resultado teórico nos indica que también lo están de acuerdo con el valor de su energía logarítmica. Podemos encontrar este tipo de distribuciones en objetos cotidianos: una pelota de golf posee irregularidades distribuidas de modo muy similar al sugerido en el conjunto diamante.

cribimos de forma rigurosa este conjunto, así como elecciones posibles de los parámetros indicados que produjeron el siguiente valor de la energía media:

$$\kappa N^2 - \frac{N \log N}{2} + C_0 N + o(N),$$

con $C_0 = -0.049222091 \dots$ un cierto número trascendente (con una fórmula exacta que no escribimos aquí). Por comparación con el teorema 3.2 vemos que se trata de puntos con energía logarítmica muy cercana al mínimo conjeturado, y que además son muy fáciles de generar algorítmicamente. Si exigimos la existencia de un resultado teórico esta es, actualmente, la manera de generar puntos esféricos con menor energía logarítmica. Obviamente, se pueden aplicar métodos al estilo gradiente para tratar de optimizar aún más la energía a partir de cualquier colección deseada, pero hasta ahora no ha sido posible obtener resultados teóricos a este respecto. En la figura 5 mostramos una colección de puntos elegida por este método. Señalamos también que este conjunto diamante está fuertemente inspirado en las particiones de área regular de Rakhmanov, Saff y Zhou, véase [58] o el artículo de Kuijlaars y Saff [49]. La principal diferencia entre ambas colecciones de puntos es que en el conjunto diamante elegimos las alturas para optimizar la energía logarítmica (lo que hace posible el cálculo de la energía media), mientras que en las particiones de área regular las alturas se eligen para preservar el área de las componentes de una cierta partición de la esfera.

8. LA DISTRIBUCIÓN LÍMITE

Las técnicas de Teoría Clásica del Potencial permiten demostrar que la sucesión de medidas de probabilidad discretas ν_N generada por una sucesión ω_N de configuraciones de puntos de Fekete en \mathbb{S} converge (en la topología $*$ -débil) a la medida uniforme en la esfera. Dicho de otra forma, para toda función continua $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i^{(N)}) = \frac{1}{4\pi} \int_{x \in \mathbb{S}} f(x) dx, \tag{8.1}$$

donde usamos la notación $\omega_N = \{x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)}\}$ para cada $N \geq 1$. Pero ¿cómo de rápida es esta convergencia? Una manera clásica de cuantificar la velocidad con la que ν_N converge a la medida uniforme en \mathbb{S} es considerar la llamada discrepancia esférica: para cualquier $N \geq 1$ definimos

$$D_C(\omega_N) = \sup_C \left| \frac{\#(\omega_N \cap C)}{N} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}} \chi_C \right|,$$

donde χ_C es la función característica de C y el supremo se toma entre todas las posibles capas esféricas, esto es, todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in \mathbb{S} : \|x - y\| \leq \epsilon\}, \quad \text{para algún } y \in \mathbb{S} \text{ y algún } \epsilon > 0.$$

Dicho de otra forma, la discrepancia de una sucesión ω_N mide cómo de lejos está ν_N de medir de forma apropiada las áreas de capas esféricas arbitrarias.

La discrepancia de sucesiones esféricas es un tema que ha generado muchísimo interés en la comunidad científica. Beck [7] demostró que, para cualquier sucesión ω_N en la esfera, se tiene

$$D_C(\omega_N) \geq cN^{-3/4},$$

con c alguna constante positiva. Es más, utilizando un argumento probabilístico demostró la existencia de sucesiones con $D_C(\omega_N) \leq cN^{-3/4} \log N$. Sin embargo, no existen descripciones explícitas de tales sucesiones, siendo tal tarea un importantísimo problema abierto en el área. Para el caso particular de sucesiones de puntos de Fekete en la esfera, Brauchart demostró en [26] que la discrepancia de una colección de puntos de Fekete es, a lo sumo, $cN^{-1/4}$, con c una constante universal. Este resultado ha sido mejorado recientemente por Marzo y Mas [53] que han demostrado la siguiente estimación:

TEOREMA 8.1. *Sea $\omega_N = \{x_1^{(N)}, \dots, x_N^{(N)}\}$, $N \geq 1$, una sucesión de configuraciones de puntos de Fekete. Entonces,*

$$D_C(\omega_N) \leq cN^{-1/3},$$

para alguna constante c . Es más, cotas similares se siguen para sucesiones de puntos que minimizan la energía de Riesz (1.1) y para otras definiciones alternativas de discrepancia.

Lo más probable es que la cota dada en el teorema 8.1 pueda ser mejorada, pero no parece una tarea fácil. Para el conjunto diamante mencionado anteriormente se ha podido estimar la discrepancia viendo que es de la forma constante/ \sqrt{N} , véase el trabajo de Etayo [36]: mejor, por lo tanto, que la cota del teorema 8.1, pero lejos del óptimo señalado por Beck. En [26] también encontramos un interesante corolario de esta desigualdad (escribimos tan solo una versión simplificada y utilizando las cotas de Marzo y Mas en el teorema 8.1 en lugar de las cotas de Brauchart):

COROLARIO 8.2. *En la notación del teorema 8.1, sea $f : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de tipo Lipschitz con constante de Lipschitz K . Existe una constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}} f - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j^{(N)}) \right| \leq K(C + \|f\|_{\infty})N^{-1/3}.$$

Esta es una versión más precisa de (8.1), orientada a entender cómo la estimación de una integral mediante medidas discretas puede aproximarse al valor de la integral. Un tema fundamental en este sentido, pero que no tratamos aquí en profundidad, es la existencia de los llamados *diseños*, esto es, conjuntos de puntos tales que la aproximación discreta de las integrales proporcionan valores exactos al integrar polinomios de un grado fijado. Tales diseños existen, y son clásicas las estimaciones de Korevaar y Meyer [48] para el número de puntos esféricos que hacen falta para integrar polinomios en tres variables de grado, pongamos, menor que m en la esfera. Un avance de enorme impacto en esta área es debido a Bondarenko, Radchenko y Viazovska [24], que demostraron que se puede tomar un número de puntos comparable a la dimensión del correspondiente espacio de polinomios. Este trabajo fue extendido a variedades algebraicas cualesquiera por Etayo, Marzo y Ortega-Cerdà en [38], que lograron así responder a una pregunta clásica de Korevaar sobre la existencia de diseños en elipses y llevaron mucho más allá en el campo de aplicación de este tipo de resultados.

Finalmente, nos apartamos un momento de la energía logarítmica para enunciar uno de los resultados más importantes en equidistribución de puntos y el estudio de energías: el llamado *Poppy Seed Bagel Theorem* de Hardin y Saff, véase [25, teorema 0.0.1] para una versión completa:

TEOREMA 8.3. *Si ω_N es (para cada $N \geq 1$) una colección de puntos en un conjunto compacto suficientemente regular $A \subseteq \mathbb{R}^n$, tal que su valor de la energía de Riesz (1.1) es lo más pequeña posible para un parámetro s mayor que la dimensión del conjunto, entonces la medida de probabilidad asociada a ω_N se aproxima a la medida de probabilidad inducida por la medida de Hausdorff en A . Es más, la s -energía de ω_N puede calcularse hasta el primer término de su desarrollo asintótico.*

Los detalles de a qué conjuntos A exactamente se les puede aplicar este resultado los dejamos para la referencia citada, pero diremos que, en particular, es válido si A es una unión finita de variedades riemannianas o variedades algebraicas compactas.

9. PROPIEDADES ARMÓNICAS DE E_{\log}

Si consideramos \mathbb{S} con su estructura riemanniana natural, podemos considerar el correspondiente laplaciano esférico. La manera más elemental de definir el laplaciano de una función esférica o, en general, de una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida en una variedad riemanniana M , es mediante la fórmula

$$\Delta_M f(x) = \sum_i \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} f(\gamma_i(t)),$$

donde la suma se extiende en un conjunto completo de vectores v_i ortonormales del plano tangente en $x \in M$ y γ_i es una geodésica con $\gamma_i(0) = x$, $\gamma'_i(0) = v_i$. Nótese que es habitual para muchos autores definir el operador de Laplace-Beltrami por la misma fórmula pero con el signo cambiado, lo que puede provocar alguna confusión que aquí simplemente evitamos. Pues bien, se puede ver fácilmente que para $f : \mathbb{S} \setminus \{y\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\log \|x - y\|$, se tiene

$$\Delta_{\mathbb{S}} f = \frac{1}{2}.$$

Dicho de otra forma, el laplaciano de f es constante (y la función es subarmónica), lo que en una variedad compacta como la esfera viene a decir (véase, por ejemplo, la monografía de Aubin [4] o la tesis de Criado del Rey [30]) que f es la función de Green de la esfera, salvo por una constante multiplicativa y otra aditiva. En particular, considerando E_{\log} definida en el conjunto $\mathbb{S}^N \setminus \Sigma$ donde

$$\Sigma = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{S} : x_i = x_j \text{ para algunos } i, j \text{ con } i \neq j\},$$

tenemos (estamos dando a \mathbb{S}^N la estructura de variedad producto)

$$\Delta_{\mathbb{S}^N} E_{\log} = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{9.1}$$

Esto permite utilizar técnicas de análisis armónico en variedades, teniendo como consecuencia, por ejemplo, que la función no puede crecer arbitrariamente en un entorno de un mínimo global. Este hecho fue utilizado en [9] para demostrar que si x_1, \dots, x_N es un mínimo global, entonces una aproximación *suficientemente buena* y_1, \dots, y_N de x_1, \dots, x_N satisface las condiciones demandadas en el problema 7 de Smale, en el sentido de que

$$E_{\log}(y_1, \dots, y_N) \leq m_N + \text{constante}.$$

El significado concreto del término *suficientemente buena* puede especificarse así: basta con que para todo i se tenga $\|x_i - y_i\| \leq 1/(6N^{3/2})$. De aquí se sigue que un procedimiento enumerativo, basado en probar una malla de puntos racionales con esa separación, produce una sucesión que satisface el problema 7 de Smale... ¡aunque requiere tiempo exponencial, con lo que no es lo que buscamos!

Insistimos en que las propiedades armónicas de E_{\log} se pueden considerar como una consecuencia de que $\log \|x - y\|$ es (salvo por constantes multiplicativas y aditivas) la función de Green de la esfera \mathbb{S} . Es tentador, pues, tratar de extender el estudio a variedades generales utilizando la función de Green correspondiente a cada variedad. Junto a Corral y Criado del Rey [11], adaptando a variedades algunos elementos de Teoría del Potencial, demostramos que una colección de puntos de energía de Green mínima en una variedad riemanniana compacta cualquiera está bien distribuida en el sentido de que la medida de probabilidad discreta que definen se aproxima en el límite a la medida de la variedad. Además, Criado del Rey en [31] demuestra que dicha colección de puntos está de hecho bien separada, en el sentido de que la distancia entre dos puntos de la colección es de la forma $O(1/N^{1/d})$ siendo d la dimensión de M . Estos resultados de separación son, en general, muy difíciles de demostrar, y, en particular, para conseguirlo en variedades arbitrarias Criado del Rey ha de resolver un *problema del obstáculo* (un tipo de problema clásico en Ecuaciones en Derivadas Parciales) en variedades, y demostrar que las llamadas bolas armónicas son comparables a las bolas métricas usuales en cualquier variedad.

10. PROPIEDADES DE LOS PUNTOS CRÍTICOS DE E_{\log}

Una de las primeras cosas que hacemos al encontrarnos con un problema de optimización es estudiar los puntos críticos de la función objetivo, esto es, los puntos en los que el gradiente se anula. En nuestro caso, la derivada de E_{\log} se calcula fácilmente. Manipulaciones algebraicas de tal expresión permitieron demostrar el siguiente resultado (véanse los trabajos de varios equipos [20, 33]; aunque los resultados en estos artículos no se escriben con tanta generalidad, las demostraciones son válidas igualmente con nuestra notación).

TEOREMA 10.1. *Sea $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}$ un punto crítico de E_{\log} . Entonces:*

- *El centro de masas de los x_i es el origen, esto es, $x_1 + \dots + x_N = 0$.*
- *Para todo $i = 1, \dots, N$, se tiene*

$$\sum_{j \neq i} \frac{\overline{x_j x_i}}{\|x_j - x_i\|^2} = 2(N - 1)x_i.$$

- *Para cada $x \in \mathbb{S}$, se tiene*

$$\sum_{i=1}^N \|x - x_i\|^2 = 2N.$$

Lo que resulta más sorprendente es que el teorema 10.1 es prácticamente todo lo que se conoce de los puntos críticos de E_{\log} . Por ejemplo, ¿qué tipos de puntos críticos hay y cuántos hay? Pongamos que para eliminar duplicidades contamos solo puntos críticos que no sean equivalentes entre sí por las simetrías obvias (rotaciones, reflexiones, reordenación de los x_i). Se ha conjeturado que el número de mínimos

locales crece exponencialmente con N (véase por ejemplo [25, figura 2.1]), pero no existe ningún resultado teórico al respecto. Este es también un importante problema abierto en el área:

PROBLEMA 3. *Dar estimaciones para el número de puntos críticos y de mínimos locales diferentes de E_{\log} (tanto puntos mínimos como valores mínimos). En particular, ver si estos números crecen exponencialmente con N .*

Una cosa que sí que sabemos es que no pueden existir máximos locales de E_{\log} , como se sigue de (9.1) y del principio del máximo de análisis armónico: una función subarmónica definida en un conjunto abierto (como E_{\log} que está definida en $\mathbb{S}^N \setminus \Sigma$) no puede tener máximos locales.

11. VALORES PARTICULARES DE N

Para algunos pocos valores de N se conoce la localización exacta de los puntos de Fekete en la esfera unidad:

- Para $N = 2$, dos puntos antipodales.
- Para $N = 3$, los vértices de cualquier triángulo equilátero contenido en un ecuador de \mathbb{S} .
- Para $N = 4$, los vértices de un tetraedro regular (véase [33, corolario 3] para una versión más general de este hecho).
- Para $N = 5$, dos puntos antipodales (pongamos, el Polo Norte y el Polo Sur), y otros tres que forman un triángulo equilátero en el ecuador, véase [33, teorema 1].
- Para $N = 6$, los vértices de un octaedro regular (véase [47]).
- Para $N = 12$, los vértices de un icosaedro regular (véase [2]).

De estos casos, $N = 2, 3$ son triviales y $N = 4$ es fácil. El resto de los casos tienen demostraciones no triviales. Para $N = 5, 6, 12$ entraña ya una cierta dificultad probar la unicidad (sin contar con simetrías y rotaciones) de una colección de puntos de Fekete. Otra observación elemental es que los vértices de un sólido platónico no siempre forman un conjunto de puntos de Fekete: es fácil ver que el valor de E_{\log} en los vértices de un cubo regular inscrito en la esfera disminuye si rotamos una de sus caras 45 grados.

El primer caso desconocido es pues el de 7 puntos. Para acercarnos a este problema, podemos generar 7 puntos al azar en \mathbb{S} y luego aplicar técnicas de minimización para calcular una colección de 7 puntos de Fekete. La respuesta dada por los ordenadores es muy clara: de acuerdo con los experimentos numéricos, parece que estos 7 puntos deberían ser dos puntos opuestos (pongamos, el Polo Norte y el Polo Sur) y otros 5 puntos correspondientes a 5 raíces de la unidad en el ecuador. ¡Pero nadie ha conseguido demostrar esto!

CONJETURA 11.1. *La única colección de 7 puntos de Fekete en \mathbb{S} son dos polos opuestos y 5 puntos equidistribuidos en el ecuador correspondiente a dichos polos.*

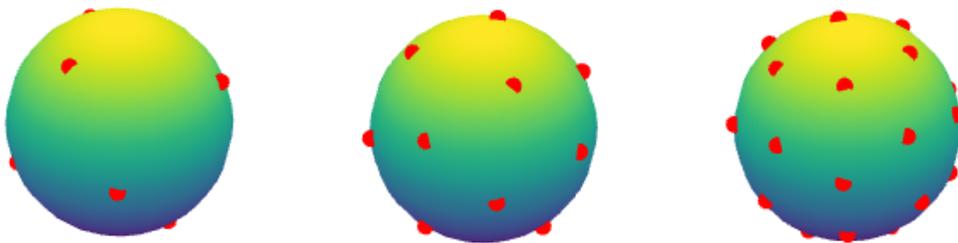


Figura 6: Una colección aproximada de puntos de Fekete en la esfera para $N = 7$, 16 y 25 puntos, obtenidos con las rutinas estándar de minimización del programa Octave. En el caso $N = 7$ se aprecia la configuración descrita en la conjetura 11.1 (el quinto vértice del pentágono regular del ecuador queda al otro lado de la esfera). Para ninguno de estos casos se conoce la respuesta exacta.

12. EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Ya hemos mencionado el artículo [42] donde varias colecciones de puntos esféricos bien distribuidas son analizadas desde distintos puntos de vista, incluyendo el que se refiere a la energía logarítmica. En general, calcular puntos de Fekete de forma aproximada (para valores pequeños de N) es un problema accesible si no tenemos exigencias teóricas sobre la calidad de la solución. ¡Pero notemos que ni siquiera hemos logrado responder a la conjetura 11.1! Siempre debemos ser prudentes con los resultados obtenidos de manera numérica, y más en casos como el de los puntos de Fekete para $N \gg 1$, que es considerado como un problema difícil con, posiblemente, una gran cantidad de extremos locales (al menos si la respuesta al problema 3 es positiva), véase por ejemplo [43]. Algunas referencias con intentos numéricos de comprender el problema son [20, 58, 74, 59, 49, 66, 57, 41, 19]. En la figura 6 hemos incluido algunas pruebas hechas con programas sencillos de minimización.

REFERENCIAS

- [1] K. ALISHAHY Y M. ZAMANI, The spherical ensemble and uniform distribution of points on the sphere, *Electron. J. Probab.* **20** (2015), no. 23, 1–27.
- [2] N. N. ANDREEV, An extremal property of the icosahedron, *East J. Approx.* **2** (1996), no. 4, 459–462.
- [3] D. ARMENTANO, C. BELTRÁN Y M. SHUB, Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: The role of random polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **363** (2011), no. 6, 2955–2965.
- [4] T. AUBIN, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer Monographs in Mathematics, 1998.
- [5] B. BEAUZAMY, E. BOMBIERI, P. ENFLO Y H. L. MONTGOMERY, Products of polynomials in many variables, *J. Number Theory* **36** (1990), no. 2, 219–245.

- [6] B. BEAUZAMY, V. TREVISAN Y P. S. WANG, Polynomial factorization: sharp bounds, efficient algorithms, *J. Symbolic Comput.* **15** (1993), no. 4, 393–413.
- [7] J. BECK, Sums of distances between points on a sphere – an application of the theory of irregularities of distribution to discrete geometry, *Mathematika* **31** (1985), no. 1, 33–41.
- [8] C. BELTRÁN, The state of the art in Smale’s 7th problem, *Foundations of computational mathematics, Budapest 2011*, 1–15, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 403, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.
- [9] C. BELTRÁN, Harmonic properties of the logarithmic potential and the computability of elliptic Fekete points, *Constr. Approx.* **37** (2013), 135–165.
- [10] C. BELTRÁN, A facility location formulation for stable polynomials and elliptic Fekete points, *Found. Comput. Math.* **15** (2015), 125–157.
- [11] C. BELTRÁN, N. CORRAL Y J. G. CRIADO DEL REY, Discrete and continuous green energy on compact manifolds, *J. Approx. Theory* **237** (2019), 160–185.
- [12] C. BELTRÁN Y U. ETAYO, The projective ensemble and distribution of points in odd-dimensional spheres, *Constr. Approx.* **48** (2018), no. 1, 163–182.
- [13] C. BELTRÁN Y U. ETAYO, A generalization of the spherical ensemble to even-dimensional spheres, *J. Math. Anal. Appl.* **475** (2019), no. 2, 1073–1092.
- [14] C. BELTRÁN Y U. ETAYO, The Diamond ensemble: A constructive set of points with small logarithmic energy, *J. Complexity* **59** (2020), 101471, 22 pp.
- [15] C. BELTRÁN, U. ETAYO, J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, A sequence of polynomials with optimal condition number, *J. Am. Math. Soc.*, <https://doi.org/10.1090/jams/956>.
- [16] C. BELTRÁN Y D. FERIZOVIĆ, Approximation to uniform distribution in $SO(3)$, *Constr. Approx.*, <https://doi.org/10.1007/s00365-020-09506-1>.
- [17] C. BELTRÁN, P. MARCELLÁN Y A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, Algunas propiedades extremas de las raíces de polinomios ortogonales, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **21** (2018), no. 2, 345–366.
- [18] C. BELTRÁN, J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Energy and discrepancy of rotationally invariant determinantal point processes in high dimensional spheres, *J. Complexity* **37** (2016), 76–109.
- [19] E. BENDITO, A. CARMONA, A. M. ENCINAS, J. M. GESTO, A. GÓMEZ, C. MOURIÑO Y M. T. SÁNCHEZ, Computational cost of the Fekete problem. I. The forces method on the 2-sphere, *J. Comput. Phys.* **228** (2009), no. 9, 3288–3306.
- [20] B. BERGERSEN, D. BOAL Y P. PALFFY-MUHORAY, Equilibrium configurations of particles on a sphere: the case of logarithmic interactions, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994), 2579–2586.
- [21] L. BÉTERMIN Y E. SANDIER, Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere, *Constr. Approx.* **47** (2018), no. 1, 39–74.
- [22] L. BLUM, F. CUCKER, M. SHUB Y S. SMALE, *Complexity and Real Computation*, Springer-Verlag, New York, 1998.

- [23] L. BLUM, M. SHUB Y S. SMALE, On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **21** (1989), no. 1, 1–46.
- [24] A. BONDARENKO, D. RADCHENKO Y M. VIAZOVSKA, Optimal asymptotic bounds for spherical designs, *Ann. of Math. (2)* **178** (2013), no. 2, 443–452.
- [25] S. V. BORODACHOV, D. P. HARDIN Y E. SAFF, *Discrete Energy on Rectifiable Sets*, Springer Monographs in Mathematics, 2019.
- [26] J. S. BRAUCHART, Optimal logarithmic energy points on the unit sphere, *Math. Comp.* **77** (2008), no. 263, 1599–1613.
- [27] J. S. BRAUCHART Y P. J. GRABNER, Distributing many points on spheres: minimal energy and designs, *J. Complexity* **31** (2015), no. 3, 293–326.
- [28] J. S. BRAUCHART, D. P. HARDIN Y E. B. SAFF, The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere, *Recent advances in orthogonal polynomials, special functions, and their applications*, 31–61, *Contemp. Math.*, 578, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012.
- [29] K. CASTILLO, F. MARCELLÁN Y M. N. REBOCHO, Zeros of para-orthogonal polynomials and linear spectral transformations on the unit circle, *Numer. Algorithms* **71** (2016), no. 3, 699–714.
- [30] J. G. CRIADO DEL REY, *Métricas de Condicionamiento y Puntos Bien Distribuidos en Variedades*, Tesis Doctoral, Universidad de Cantabria, 2018.
- [31] J. G. CRIADO DEL REY, On the separation distance of minimal Green energy points on compact Riemannian manifolds, arXiv:1901.00779.
- [32] P. D. DRAGNEV, On the separation of logarithmic points on the sphere, *Approximation Theory, X (St. Louis, MO, 2001)*, 137–144, *Innov. Appl. Math.*, Vanderbilt Univ. Press, Nashville, TN, 2002.
- [33] P. D. DRAGNEV, D. A. LEGG Y D. W. TOWNSEND, Discrete logarithmic energy on the sphere, *Pacific J. Math.* **207** (2002), no. 2, 345–358.
- [34] A. DUBICKAS, On the maximal product of distances between points on a sphere, *Liet. Mat. Rink.* **36** (1996), no. 3, 303–312.
- [35] J. W. EATON, D. BATEMAN, S. HAUBERG Y R. WEHBRING, *GNU Octave version 4.2.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*, 2017, <https://www.gnu.org/software/octave/doc/v4.2.1/>
- [36] U. ETAYO, Spherical cap discrepancy of the Diamond ensemble, arXiv:1910.05140.
- [37] U. ETAYO, A sharp Bombieri inequality, logarithmic energy and well conditioned polynomials, arXiv:1912.05521.
- [38] U. ETAYO, J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Asymptotically optimal designs on compact algebraic manifolds, *Monatsh. Math.* **186** (2018), no. 2, 235–248.
- [39] L. FEJÉR, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen der Lagrangeschen Interpolation im Intervalle ein Möglichst kleines Maximum Besitzt, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **1** (1932), no. 3, 263–276.

- [40] M. FEKETE, Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten, *Math. Z.* **17** (1923), no. 1, 228–249.
- [41] D. HARDIN Y E. B. SAFF, Discretizing manifolds via minimum energy points, *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), no. 10, 1186–1194.
- [42] D. HARDIN, T. MICHAELS Y E. SAFF, A comparison of popular point configurations on S^2 , *Dolomites Res. Notes Approx.* **9** (2016), 16–49.
- [43] J.-B. HIRIART-URRUTY, A new series of conjectures and open questions in optimization and matrix analysis, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **15** (2009), no. 2, 454–470.
- [44] B. HOUGH, M. KRISHNAPUR, Y. PERES Y B. VIRÁG, *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, University Lecture Series, 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- [45] M. E. H. ISMAIL, *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2005.
- [46] R. KESSELER Y M. HARLEY, *Polen: La sexualidad oculta de las flores*, Turner, Madrid, 2012.
- [47] A. V. KOLUSHOV Y V. A. YUDIN, Extremal dispositions of points on the sphere, *Anal. Math.* **23** (1997), no. 1, 25–34.
- [48] J. KOREVAAR Y J. L. H. MEYERS, Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere, *Integral Transforms Spec. Funct.* **1** (1993), 105–117.
- [49] A. B. J. KUIJLAARS Y E. B. SAFF, Distributing many points on a sphere, *Math. Intelligencer* **19** (1997), no. 1, 5–11.
- [50] S. LANG, *Introduction to Arakelov Theory*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [51] F. MARCELLÁN, A. MARTÍNEZ FINKELSHTEIN Y P. MARTÍNEZ GONZÁLEZ, Electrostatic models for zeros of polynomials: old, new, and some open problems, *J. Comput. Appl. Math.* **207** (2007), 258–272.
- [52] A. MARTÍNEZ-FINKELSHTEIN, P. MARTÍNEZ-GONZÁLEZ Y R. ORIVE, Zeros of Jacobi polynomials with varying non-classical parameters, *Special functions (Hong Kong, 1999)*, 98–113, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [53] J. MARZO Y A. MAS, Discrepancy of minimal Riesz energy points, arXiv:1907.04814.
- [54] J. MARZO Y J. ORTEGA-CERDÀ, Expected Riesz energy of some determinantal processes on flat tori, *Constr. Approx.* **47** (2018), no. 1, 75–88.
- [55] R. ORIVE Y J. SÁNCHEZ-LARA, Equilibrium measures in the presence of certain rational external fields, *J. Math. Anal. Appl.* **431** (2015), no. 2, 1224–1252.
- [56] P. OVIDIO, *Metamorfosis*, traducido del original en latín (año 8 d.C.) por A. Ramírez y F. Navarro, Alianza Editorial, 2005.
- [57] J. PINTÉR, Globally optimized spherical point arrangements: Model variants and illustrative results, *Ann. Op. Res.* **104** (2001), 213–230.
- [58] E. A. RAKHMANOV, E. B. SAFF Y Y. M. ZHOU, Minimal discrete energy on the sphere, *Math. Res. Letters* **1** (1994), 647–662.

- [59] E. A. RAKHMANOV, E. B. SAFF Y Y. M. ZHOU, Electrons on the sphere, *Computational Methods and Function Theory 1994 (Penang)*, 293–309, *Ser. Approx. Decompos.*, 5, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
- [60] E. SANDIER Y S. SERFATY, From the Ginzburg-Landau model to vortex lattice problems, *Comm. Math. Phys.* **313** (2012), no. 3, 635–743.
- [61] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout’s theorem. I. Geometric aspects, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), no. 2, 459–501.
- [62] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bezout’s theorem. II. Volumes and probabilities, *Computational Algebraic Geometry (Nice, 1992)*, 267–285, *Progr. Math.*, 109, Birkhäuser, Boston, MA, 1993.
- [63] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bezout’s theorem. III. Condition number and packing, *J. Complexity* **9** (1993), no. 1, 4–14.
- [64] S. SMALE, Mathematical problems for the next century, *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, 271–294, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [65] S. SMALE, Problemas matemáticos para el próximo siglo, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **3** (2000), no. 3, 413–434.
- [66] W. STORTELDER, J. SWART Y J. PINTÉR, Finding elliptic Fekete points sets: two numerical solution approaches, *J. Comp. App. Math.* **130** (2001), no. 1-2, 205–216.
- [67] G. SZEGŐ, *Orthogonal polynomials*, fourth edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [68] P. M. L. TAMMES, *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains*, Recueil des travaux botaniques neerlandais, 27, Diss. Groningen, 1930.
- [69] J. J. THOMSON, On the structure of the atom, *Phil. Mag.* **7** (1904), no. 6, 237–265.
- [70] G. WAGNER, On the product of distances to a point set on a sphere, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **47** (1989), no. 3, 466–482.
- [71] L. L. WHYTE, Unique arrangements of points on a sphere, *Amer. Math. Monthly* **59** (1952), 606–611.
- [72] S. ZELDITCH Y Q. ZHONG, Addendum to “Energies of zeros of random sections on Riemann surfaces”, *Indiana Univ. Math. J.* **59** (2010), no. 6, 2001–2005.
- [73] Q. ZHONG, Energies of zeros of random sections on Riemann surfaces, *Indiana Univ. Math. J.* **57** (2008), no. 4, 1753–1780.
- [74] Y. ZHOU, *Arrangements of Points on the Sphere*, Ph. D. Thesis, Math. Department, University of South Florida, 1995.

CARLOS BELTRÁN, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Correo electrónico: beltranc@unican.es

Página web: <http://personales.unican.es/beltranc/>