Educación

Sección a cargo de

Luis J. Rodríguez-Muñiz

Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática

por

Salvador Llinares y Ceneida Fernández

1. Introducción

La competencia docente «mirar profesionalmente» (*professional noticing*) la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es vista como una componente de la práctica profesional del maestro/profesor de matemáticas [25, 28]. La práctica del profesor de matemáticas incluye diferentes tareas profesionales como seleccionar y diseñar actividades matemáticas potencialmente relevantes, analizar e interpretar la comprensión matemática de los estudiantes o gestionar el discurso matemático en el aula (la comunicación y los intercambios matemáticos en el aula). Por tanto, esta competencia está vinculada a la manera en la que el maestro/profesor usa su conocimiento para interpretar situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para decidir cómo actuar.

En el ámbito de la Educación Matemática, en las últimas décadas, se ha desarrollado una agenda de investigación con el objetivo de: conceptualizar esta competencia [1, 3, 15, 23, 33, 34, 44]; caracterizar cómo los futuros maestros y profesores de matemáticas empiezan a desarrollarla durante la formación inicial generándose descriptores de su desarrollo [14, 20, 31, 29, 30, 35, 40]; e identificar contextos favorables para su desarrollo [9, 14, 26, 36, 43, 44].

El Grupo de Investigación en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Alicante (GIDIMAT-UA) ha aportado en los últimos años conocimiento a esta agenda de investigación [14]. Nuestros trabajos han considerado diversos dominios matemáticos y niveles de enseñanza: con estudiantes para maestro de Educación Infantil en magnitud longitud y su medida [41]; con estudiantes para maestro de Educación Primaria en fracciones [22, 20, 21, 35], en el razonamiento proporcional

[5, 12] y en generalización de patrones [6]; y con futuros profesores de Educación Secundaria en la clasificación de cuadriláteros [30], en el concepto de derivada [39, 40] y en el concepto de límite [13].

En este artículo se presentan las características de esta agenda de investigación en Educación Matemática según ha sido desarrollada por nuestro grupo de investigación y algunos de los resultados obtenidos. En la segunda sección, se conceptualiza la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En la tercera sección, se presenta la aproximación seguida en GIDIMAT-UA en la formación de maestros y profesores de matemáticas dirigida al desarrollo de esta competencia durante la formación inicial y centrada en la práctica. Además, en esta sección se presentan las características de los entornos de aprendizaje diseñados y de las tareas profesionales que integran estos entornos siguiendo la perspectiva *design-based research* [8]. En la cuarta sección se muestran algunos resultados obtenidos sobre el desarrollo de esta competencia en la formación inicial. Finalmente, se plantean algunas cuestiones abiertas en estos momentos en esta agenda de investigación y su relación con la formación de profesores.

2. La competencia docente «mirar profesionalmente»: Una conceptualización

Una mirada profesional distingue a un experto en una determinada área de alguien que no lo es por su capacidad de identificar y dotar de significado a aspectos importantes para su profesión en una situación [16]. Desde esta perspectiva, mirar profesionalmente en la práctica de enseñar matemáticas consiste en ser capaz de identificar aspectos relevantes para el aprendizaje de las mismas en una situación de enseñanza que otras personas, no profesionales, no serían capaces de identificar. Esta mirada profesional les permite actuar de manera coherente con la situación.

Mason [34] caracterizó la «disciplina de la mirada profesional» (*discipline of noticing*) subrayando la capacidad del profesor de analizar su propia práctica para generar formas de actuar de manera consciente. Además, subraya la idea de que lo que llega a ser percibido a través de la mirada profesional puede ser validado por la experiencia de otros, permitiéndoles mirar cosas de las que previamente no eran conscientes, y poder disponer de acciones para actuar como consecuencia de lo que ha sido observado. De esta manera, el desarrollo de la capacidad de observar, aspectos que pueden llegar a ser relevantes en la enseñanza de las matemáticas, que previamente no se era capaz de observar junto con las acciones disponibles para actuar, genera la relación entre el conocimiento y la práctica [37]. En esta conceptualización de la competencia docente mirar profesionalmente lo que importa es conocer cómo actuar en cada momento en función del significado dado a la situación. Por ejemplo, el desarrollo de una mirada profesional permitiría a un profesor identificar que el problema de la figura 1 implica el concepto de razón como índice comparativo cuantificando la idea de ser más cuadrado como el *loft* que tiene una razón más próxima a 1.

La respuesta dada por Pedro se centra en la idea de que los lados de un cuadrado

En un nuevo edificio se venden lofts rectangulares de tres tamaños diferentes:

- 7.5 metros por 11.4 metros
- 4.55 metros por 5.08 metros
- 18.5 metros por 24.5 metros

¿Cuál de ellos parece que es más cuadrado?

Respuesta de Pedro

* El cuadrado se caracteriza por tener los lados de igual medida, se parecerá más al cuadrado el que tengan menos distancia de metros, es decir:

- 11'4 − 7'5 = 03'9
- 5'08 − 4'55 = 0'53
- 24'5 − 18'5 = 06'0

* Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida.

Figura 1: Problema relacionado con el concepto de razón como índice comparativo y respuesta de un estudiante [5].

son iguales, y por tanto su diferencia es cero. Por tanto, Pedro resta los lados de cada loft y justifica su decisión indicando: «Es más cuadrado el segundo, porque sus lados son más similares en medida». Mirar profesionalmente implica reconocer lo que hay detrás del razonamiento de Pedro (por qué Pedro actúa de esta manera); en este ejemplo, identificar la aproximación aditiva que cuantifica «el ser más cuadrado» como la diferencia menor. Es decir, identificar que Pedro utiliza relaciones aditivas en lugar de relaciones multiplicativas y dotar de sentido a esta estrategia desde el significado del concepto de razón. El ser capaz de relacionar la aproximación aditiva a la idea de razón (usada por Pedro) con el modelo de progresión del desarrollo del razonamiento proporcional permite al profesor considerar el caso de Pedro como un ejemplo de la manera de responder en un nivel aditivo en este modelo de progresión. Esta capacidad de considerar una respuesta particular como ejemplo de un comportamiento más general es la que permite a los profesores categorizar las respuestas de los estudiantes a diferentes problemas, considerando un modelo de progresión de la comprensión de los conceptos matemáticos.

La identificación del razonamiento de Pedro, como un caso particular de un nivel de desarrollo de la comprensión de la idea de razón, permite decidir qué hacer para ayudar a Pedro a superar la aproximación aditiva en las situaciones vinculadas a la idea de razón. Por ejemplo, proponiendo otras situaciones para que Pedro pueda ver si su estrategia es generalizable. En este caso, usando ejemplos particulares «extremos», como un loft de dimensiones 0.1 metros por 1.1 metros y un loft de 20 metros por 21 metros. Ambos tienen una diferencia de 1 pero, sin embargo, un loft es mucho más cuadrado. El hecho relevante está en reconocer la importancia de tener una acción disponible como consecuencia de mirar profesionalmente.

Sin embargo, como no es posible asegurar la existencia de «la mejor acción» en cualquier situación, el énfasis se coloca en tener un conjunto de acciones posibles entre las que elegir. Se subraya entonces la necesidad de ser capaz de justificar la acción elegida mediante un discurso apoyado en el conocimiento [17]. Esta perspectiva pone de relieve que las acciones de un maestro o profesor en el aula no pueden ser consideradas únicamente expresiones de los recursos disponibles, sino que sus acciones atestiguan la adaptación a las condiciones y características de los contextos en los que trabaja.

Por tanto, la formación de profesores de matemáticas centrada en el desarrollo de esta competencia tiene como objetivo potenciar el desarrollo de llegar a ser *conscientes de lo relevante* en una situación de enseñanza para estar en condiciones de actuar en una determinada dirección. Mason [34] conceptualiza esta competencia como un cambio en la atención que implica un aumento en la capacidad de percibir detalles relevantes para el aprendizaje de las matemáticas en una situación de enseñanza-aprendizaje, evitando juicios, emociones, generalidades y etiquetas, para generar formas de acción alternativas. Además, consideró diferentes maneras de atender: (i) mirando la totalidad (*holding wholes -gazing-*); (ii) discerniendo detalles (*discerning details*); (iii) reconociendo relaciones en la situación particular (*recognising relationships*); y (iv) percibiendo propiedades (*perceiving properties*).

Entender la competencia docente mirar profesionalmente de esta manera implica tener que analizar registros de la práctica en los programas de formación (como el caso de Pedro de la figura 1), describiéndolos, diferenciando e identificando aspectos relevantes, y viéndolos como ejemplos particulares de principios generales para actuar de una determinada manera. Además, la validación de las diferencias y semejanzas identificadas en una situación (relaciones y propiedades) debe ser realizada con otros considerando su experiencia (a través de espacios de interacción social) [34]. De ahí la importancia del análisis de registros de la práctica en espacios que permitan chequear las diferentes relaciones entre interpretaciones y acciones en los intentos de desarrollar la competencia docente.

2.1. Indagando bajo la superficie de lo visible

Aunque se considera que el desarrollo de las destrezas de identificar aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza de las matemáticas, interpretarlas y decidir cómo actuar, se produce a partir de la experiencia, recientemente se está abogando para que se apoye su desarrollo desde la formación inicial. Desde perspectivas generales sobre la formación de profesores se considera la necesaria articulación de las destrezas en esta competencia docente. Por ejemplo, en [44] se subrayan tres aspectos claves:

- Identificar lo que es importante en una clase (de matemáticas).
- Realizar conexiones entre lo especifico de las interacciones en el aula y principios generales (considerar lo específico del aula como ejemplo de ideas más generales sobre la enseñanza y el aprendizaje).
- Usar lo que se conoce (interpreta) de la situación para dar razones que justifiquen lo que se hace.

Como hemos visto en el ejemplo de la sección anterior, identificar lo que es importante implica prestar atención a lo que los estudiantes dicen y hacen y considerar como están pensando sobre el contenido matemático, como paso previo para pensar en qué actividades hay que proponerles para apoyar su aprendizaje. Esta destreza está vinculada a aprender a separar lo que puede ser relevante para el aprendizaje de las matemáticas de lo que no lo es. En segundo lugar, realizar conexiones entre lo específico y principios más generales subraya el papel que puede desempeñar el conocimiento teórico (de matemáticas y de didáctica de las matemáticas) en decidir sobre qué aspectos atender y llegar a considerar como evidencias (ejemplos) de una idea general. En el ejemplo descrito en la sección anterior, llegar a considerar las aproximaciones aditivas como ejemplo de un nivel en el modelo de progresión de la comprensión del concepto de razón como un índice comparativo. Finalmente, usar lo que se conoce para dar razones que justifiquen lo que se hace implica poder generar explicaciones que justifiquen las decisiones de acción. Desde este punto de vista se vinculan las destrezas de identificar lo relevante de una situación, de interpretar y usar la interpretación generada para apoyar las decisiones en la práctica.

3. Formación de maestros y profesores de matemáticas: Aproximación centrada en la práctica

Uno de los objetivos en la formación de profesores es ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente. Este desarrollo se entiende como empezar a usar el conocimiento de manera adecuada para llevar a cabo tareas de la práctica de enseñar matemáticas, como: seleccionar y diseñar actividades matemáticas adecuadas; interpretar o anticipar el pensamiento matemático de los estudiantes; o gestionar la comunicación en el aula [25].

Esta forma de concebir el aprendizaje del maestro y profesor de matemáticas plantea desafíos a los formadores de profesores a la hora de diseñar entornos de aprendizaje en los programas de formación y las tareas profesionales que forman estos entornos. Se entiende por entorno de aprendizaje «la conjunción de las tareas diseñadas y la concepción de una determinada manera de usarlas, incluyendo el papel del formador de profesores y los documentos adicionales» ([24]; p. 97). Las tareas profesionales se diseñan con el objetivo de que los futuros maestros y profesores de matemáticas aprendan a usar el conocimiento teórico para: analizar respuestas de estudiantes; planificar la enseñanza de las matemáticas; o gestionar discusiones matemáticas en el aula.

Como formadores de profesores, plantear como objetivo el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente en los contextos institucionales de los programas de formación (Grado de Maestro y el Máster de Formación de Profesores de Matemáticas) fue un desafío. Para responder a este reto adoptamos una aproximación a la formación de maestros y profesores de matemáticas que articulaba la práctica y la investigación en ciclos de diseño, implementación, análisis y rediseño [32, 18, 8]. Esta forma de proceder vincula la investigación empírica con el diseño de entornos de aprendizaje y nos ayuda a comprender las relaciones entre los principios teóricos, el diseño de artefactos (las tareas profesionales) y la práctica desarrollada en los contextos institucionales. De esta manera, estos ciclos de diseñar-implementaranalizar-rediseñar permiten relacionar la práctica de formar maestros/profesores y la investigación sobre el aprendizaje del profesor.

Una característica de los entornos de aprendizaje es el uso de representaciones (registros) de la práctica al diseñar las tareas profesionales [4]. Una representación de la práctica puede ser un conjunto de respuestas de alumnos a un problema de matemáticas (por ejemplo, figura 1), video-clips de lecciones de matemáticas, planificación de una lección, materiales curriculares como colecciones de libros de texto o descripción de sucesos de aula en forma de casos. Estas representaciones de la práctica sirven como instrumentos de mediación entre la práctica profesional y los contextos de formación. Las representaciones de la práctica pueden mostrar un aspecto o varios de una situación de clase y proporcionan a los estudiantes para profesores contextos reales para analizar o interpretar aspectos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Otra característica es el uso de instrumentos conceptuales, información teórica procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática y que puede ser usada para interpretar los registros de la práctica. Por otra parte, para ayudar a identificar los aspectos sobre los que centrarse en la interpretación de los registros de la práctica se incorporan preguntas guía como una manera de apoyar la articulación de la mirada profesional. Dichas preguntas están focalizadas en centrar la atención del estudiante para profesor en los aspectos objeto de aprendizaje en el programa de formación, como puede ser el diseño de tareas, la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes o el análisis de la gestión del discurso matemático en el aula.

La forma que adoptan los entornos de aprendizaje puede variar; desde diseños online en los que los estudiantes para profesor participan en contextos completamente virtuales o *b-learning* (integrando la presencialidad con el contexto virtual) (figura 2), hasta entornos organizados a través de secuencias de sesiones presenciales.

En resumen, los principios en los que se basan estos entornos de aprendizaje son (figura 3):

- Uso de representaciones (registros) de la práctica, los artefactos.
- Uso de instrumentos conceptuales: Información teórica procedente de las investigaciones en Didáctica de la Matemática para identificar los aspectos que debe ser interpretados.
- Preguntas guía para apoyar la focalización de la mirada profesional.
- Espacios para potenciar los procesos de razonamiento que permitan ampliar la comprensión sobre la práctica.

En la siguiente sección describimos cómo se concretan estas características en un entorno de aprendizaje, diseñado e implementado en el Máster de Formación de Profesores de Educación Secundaria, para apoyar el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente.

LA COMUNICACIÓN MATEMÁTICA DURANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN GRUPO Y EL PAPEL DEL PROFESOR

OBJETIVO

*** Identificar diferentes aspectos de la gestión del profesor de la discusión matemática durante la resolución de problemas en grupo:**

1. ANÁLISIS DEL VIDEO CLIP FUNC3A (10:30-16.25=5:55)

Aspectos de la gestión del profesor de la comunicación matemática durante la resolución de problemas en grupo:

- Anticipando respuestas.
- Gestionando las respuestas durante la fase de exploración.
- Seleccionando respuestas particulares para organizar la discusión.
- Secuenciando con propósito las respuestas de los estudiantes a ser consideradas en la discusión-presentación.
- Ayudar a los estudiantes a realizar conexiones entre las diferentes respuestas de los estudiantes y entre las ideas matemáticas clave en la resolución del problema.

TEMA: Gráfica y funciones en 3.º E.S.O.
Fases de una lección que incorpora la discusión en gran grupo:

I. Presentar un problema que refleje ideas matemáticas importantes y que pueda ser resuelto de varias maneras.
II. Fase de exploración:
estudiantes trabajando en pequeño grupo (el profesor anima a los estudiantes a resolver el problema de cualquier manera que tenga sentido para ellos y explicar su resolución a los compañeros.
III. Discusión con la clase entera.

Segmento: Interacción Profesor-pequeño grupo (Fase de Exploración).

PROBLEMA:
En un contexto de llenado de vasijas, dibujar las gráficas para indicar la altura alcanzada en relación con el volumen.

- Significado de pendiente de una función lineal [f(x)=mx]
- Traducciones entre los modos de representación: situación, gráfico, algebraico.

2. ¿QUÉ USAR PARA HACER EL ANÁLISIS?
Doc-Contexto de la clase del video clip func3a
Doc-Transcripción del video-clip func3a
Doc-Standar comunicación 6-8 (NCTM)
M03-Doc1-Gestionando discusiones matemáticas. Características

3. PARTICIPAR EN EL DEBATE EN LÍNEA
Debate:M03-Gestión de la Comunicación matemática durante la RP
Debate activo del 8/01/2015 hasta el 13/01/2015

El foco del análisis será la manera en la que la profesora gestiona las respuestas de los estudiantes durante la fase de exploración.

- ¿Qué aspectos de la comprensión de la idea de pendiente de una función lineal fundamentan las intervenciones de la profesora?
- ¿Cuál puede ser el objetivo de la profesora al identificar/seleccionar respuestas de algunos estudiantes en la fase de exploración?
- ¿Qué papel desempeña las intervenciones de la profesora en el proceso por el cual los estudiantes dotan de significado a la idea de pendiente de una función lineal y a la traducción entre el modo de representación gráfico y algebraico desde el texto del problema?

4. PRODUCIR INFORME-SÍNTESIS
Informe síntesis de las respuestas a las cuestiones planteadas considerando las participaciones en el debate y la información de los documentos.

Figura 2: Entorno de aprendizaje usando video-clips como un registro de la práctica en el Máster de Formación de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria.

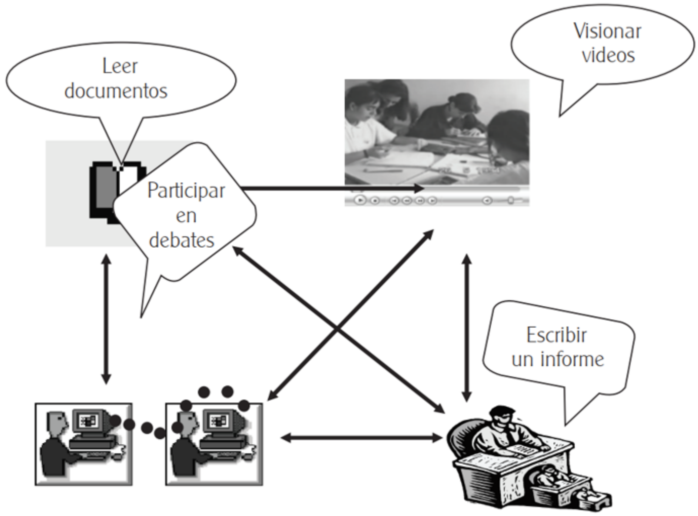


Figura 3: Estructura metodológica de entornos de aprendizaje apoyados en registros de la práctica, uso de instrumentos conceptuales y espacios de interacción [32].

3.1. Un ejemplo: la relación entre lo matemático y lo cognitivo

El entorno de aprendizaje se centra en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto. Tiene como objetivo desarrollar las destrezas de los estudiantes para profesor relativas a la competencia docente mirar profesionalmente:

- Discernir detalles: Por ejemplo, las variables en los problemas de límite de funciones y características de las resoluciones de los estudiantes.
- Reconocer relaciones en la situación particular: Por ejemplo, el vínculo entre los modos de representación y la manera en la que los estudiantes comprenden los elementos matemáticos implicados, tales como la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango de una función.
- Percibir propiedades: Por ejemplo, relacionando las características de la comprensión del límite de una función ejemplificadas en las respuestas de los estudiantes como casos particulares de fases en un modelo de progresión en la comprensión del concepto de límite de una función.

El entorno de aprendizaje consta de cinco sesiones de dos horas y cuatro tareas profesionales (cuadro 1).

La tarea profesional 1 consta de tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto (en modo algebraico, numérico y gráfico) que proceden de un libro de texto de matemáticas de primero de bachillerato (figura 4) y se solicita a los futuros profesores que los resuelvan identificando qué elementos matemáticos y modos de representación se ponen de manifiesto.

Sesiones y tareas profesionales	Representación de la práctica y preguntas guía	Documento teórico (Instrumento conceptual)
Sesión 1. Tarea profesional 1	**Artefacto de la práctica**: Tres problemas sobre el concepto de límite de función en un punto de un libro de texto. **Preguntas guía**: Centradas en la resolución de los problemas para activar el conocimiento sobre los elementos matemáticos y modos de representación que están vinculados al límite de una función en un punto (concepción dinámica de límite).	Sobre la concepción dinámica de límite [2, 7, 38].
Sesión 2. Tarea profesional 2	**Artefacto de la práctica**: Tres problemas sobre el concepto de límite de función en un punto de un libro de texto. **Preguntas guía**: Centradas en la anticipación de posibles respuestas de estudiantes de bachillerato para discutir posibles niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto.	Sobre la concepción dinámica de límite [2, 7, 38].
Sesiones 3-4. Tarea profesional 3	**Representación de la práctica**: Respuestas de cuatro estudiantes de bachillerato a tres problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto. **Preguntas guía**: Centradas en identificar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar con la instrucción para que los estudiantes progresen conceptualmente.	Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto [38].
Sesión 5. Tarea profesional 4	**Representación de la práctica**: Respuestas de tres estudiantes de bachillerato a seis problemas sobre el concepto de límite de una función en un punto. **Preguntas guía**: Centradas en identificar distintas características de la comprensión sobre el límite de una función en un punto y decidir cómo continuar con la instrucción para que los estudiantes progresen conceptualmente.	Sobre niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto [38].

Cuadro 1: Estructura del entorno de aprendizaje sobre el concepto de límite de una función en un punto.

Para favorecer la generación de un discurso compartido, los futuros profesores tienen un documento con información sobre los elementos matemáticos que podemos considerar en la concepción dinámica de límite [38]: (i) la idea de función; (ii) la idea de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda en el dominio y en el rango (coincidentes o no coincidentes); y (iii) la idea de coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango (coincidente o no coincidente).

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ 4 & \text{si} \quad 1<x\le 2\\ x^2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1
b) x tiende a 2

Problema 2

Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

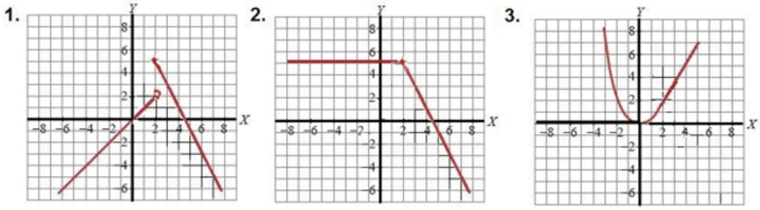
x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan
1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas



a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

Figura 4: Problemas de la tarea profesional 1.

Además, el documento contiene información sobre el uso de diferentes modos de representación: gráfico, algebraico y numérico. El objetivo de esta tarea es hacer explícitos los elementos matemáticos que intervienen en la resolución y que pueden tener relevancia para dotar de sentido a la progresión en el aprendizaje del concepto de límite de una función en este nivel educativo.

En la tarea profesional 2, se solicita a los futuros profesores que anticipen la respuesta de una alumna a los tres problemas resueltos anteriormente, que muestre que ha comprendido el objetivo de aprendizaje, justificando cómo está utilizando los elementos matemáticos y los modos de representación. Además, también se les solicita que anticipen la respuesta de otro alumno que muestre ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no haya sido capaz de alcanzar el objetivo [13]. La finalidad de esta tarea es identificar las concepciones sobre el aprendizaje de las matemáticas que tienen los estudiantes para profesor, analizando lo que consideran relevante en las posibles respuestas de los estudiantes.

En las tareas profesionales 3 y 4 los futuros profesores deben identificar la comprensión de estudiantes de bachillerato (figura 5) y diseñar tareas que ayuden a progresar en su comprensión a los estudiantes usando, como instrumento conceptual, un documento teórico con información sobre los niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto identificados en la literatura (figura 6). Estas tareas generan oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan considerar evidencias desde la práctica (las respuestas de los estudiantes) como ejemplos de categorías más generales (los niveles de desarrollo de la comprensión).

Las respuestas de los estudiantes de bachillerato que forman parte de las tareas profesionales 3 y 4 muestran diferentes características (niveles) de comprensión, como una manera de favorecer el reconocimiento de diferencias y semejanzas que fundamentan el desarrollo de la destreza de discernir detalles. Por ejemplo, en la tarea profesional 3, de los cuatro estudiantes, dos de ellos realizan coordinaciones de las aproximaciones laterales en los tres modos de representación (coincidentes y no coincidentes). Otro alumno únicamente realiza coordinaciones en modo gráfico y cuando son coincidentes (figura 4) y otro realiza coordinaciones en el modo numérico (coincidente y no coincidente) y en modo gráfico (únicamente en coincidente).

Las preguntas guía de las tareas profesionales 3 y 4 son las siguientes:

- Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el estudiante X para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué.
- A partir de las descripciones de cómo el estudiante X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación.
- Considerando la comprensión de límite de una función en un punto del estudiante X mostrada en la resolución de los problemas, diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.

La forma en la que este tipo de entornos de aprendizaje se articula pone de manifiesto la relación entre lo matemático y lo cognitivo. Es decir, centra la atención de los estudiantes para profesor en discernir los elementos matemáticos implicados en los problemas y en las respuestas de los estudiantes para identificar las características (nivel) de comprensión y tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su comprensión.

La secuencia de las tareas profesionales en el entorno de aprendizaje responde a la idea de colocar, en el centro de atención, el pensamiento matemático de los alumnos. El objetivo es ayudar a los estudiantes para profesor a ver las respuestas del alumnado a los problemas de matemáticas como ejemplos de niveles de un modelo de progresión (entendidas como categorías amplias) para estar en mejores condiciones de justificar propuestas de acción específicas que ayuden a los estudiantes a transitar en esta progresión. Por tanto, la importancia está en centrar la atención de los futuros profesores sobre las transiciones de los estudiantes en los modelos de progresión de los conceptos matemáticos y no tanto en establecer niveles de comprensión de los estudiantes.

Sin embargo, la dificultad en el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente radica en cómo el estudiante para profesor empieza a gestionar esta relación entre lo matemático y lo cognitivo. En el ejemplo que estamos describiendo, es necesario que relacione la forma en la que el concepto de límite de una función está reflejado en el currículo de Bachillerato, los objetivos de aprendizaje e indicadores de

Resuelve los siguientes problemas

Problema 1

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si} \quad x\leq 1\\ 4 & \text{si} \quad 1<x\leq 2\\ x^2 & \text{si} \quad x>2\end{cases}$$

Calcula el límite de f (x) cuando:
a) x tiende a 1. Justifica tu respuesta
b) x tiende a 2. Justifica tu respuesta

① a) $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x+1 = \boxed{3}$

b) $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 4 = \boxed{4}$

Problema 2
Sean las tablas

x_1	0,8	0,9	0,99	...	1,2	1,1	1,01
$f(x_1)$	1,64	1,81	1,9201	...	2,44	2,21	2,0201

x_2	0	0.9	0.99	...	1.1	1.01	1.001
$g(x_2)$	0	-099	-0.9999	...	2.3	2.03	2.003

a) ¿a qué valor se acercan
1. **x_1 y x_2 por la derecha y por la izquierda**
2. **las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda**
3. **las imágenes de $g(..{}_2)$ por la derecha y por la izquierda?**

Justifica tus respuestas

b) ¿a qué valor se acercan
1. **las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca x_1**
2. **las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca x_2?**

Justifica tus respuestas

② a) 1. x_1 por la izq. se acerca a $\boxed{0}$
x_1 por la der. se acerca a $\boxed{1}$
x_2 por la izq. se acerca a $\boxed{0}$
x_2 por la der. se acerca a $\boxed{1}$

2. $\lim_{x\to x_1^-} f(x_1) = \boxed{1}$
$\lim_{x\to x_1^+} f(x_1) = \boxed{2}$

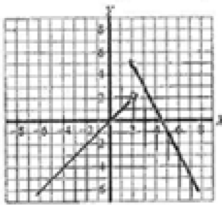
3. $\lim_{x\to x_2^-} g(x_2) = \boxed{0}$
$\lim_{x\to x_2^+} g(x_2) = \boxed{2}$

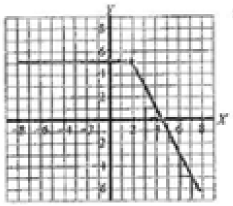
b)
1. $x_1^- = 0$ $\quad x_1^+ = 1$
$f(x_1)^- = 1$ $\quad f(x_1)^+ = 2$

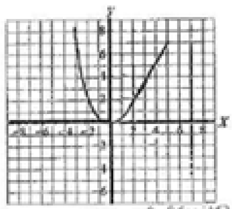
2. $x_2^- = 0$ $\quad x_2^+ = 1$
$f(x_2)^- = 0$ $\quad f(x_2)^+ = 2$
coinciden.

Problema 3

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus respuestas

1.


2.


3.


a) El límite de la función es 2 en x = 2
b) El límite de la función es 5 en x = 2
c) No existe el límite de la función en x = 2

1. c) No existe el límite en x=2

2. b) El límite de la función es 5 en x=2 porque existe el límite por la izq. y por la der. y es 5.

3. a) El límite de la función es 2 en x=2 porque existe el límite por la izq. y por la der. y es 2.

Figura 5: Respuestas de un alumno que forma parte de la tarea profesional 3.

logro generados y la información sobre un modelo de progresión de la comprensión del concepto de límite de una función.

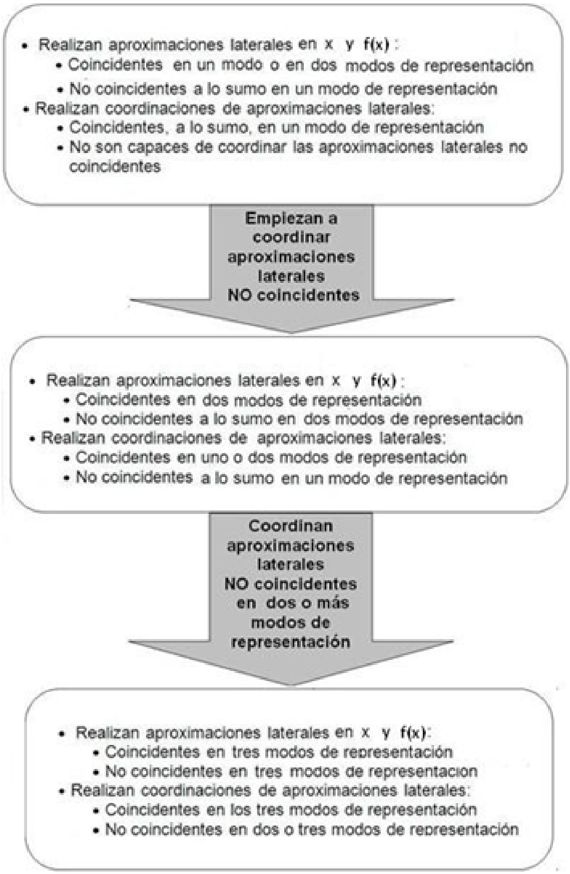


Figura 6: Niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto [38].

4. Desarrollo de la competencia docente «mirar profesionalmente»

Los resultados de las investigaciones han caracterizado indicadores de cómo los estudiantes para maestro/profesor de matemáticas desarrollan la competencia docente en los programas de formación inicial articulados a través de entornos de aprendizaje como los descritos anteriormente. La hipótesis asumida es que las características del diseño de los entornos de aprendizaje orientan a los estudiantes para profesor hacia formas de observar la enseñanza de las matemáticas de una manera cada vez más articulada. Esto se observa en la posible influencia que puede tener la estructura de los entornos de aprendizaje sobre lo que los futuros profesores escriben y cómo lo hacen al redactar sus informes a las tareas profesionales.

Los indicadores generados tienen en cuenta: (i) el cambio en el discurso para describir el pensamiento matemático de los estudiantes [22, 21, 46]; (ii) cómo futuros profesores consideran la comprensión de determinados elementos matemáticos del concepto claves en el aprendizaje de los estudiantes (KDU, *Key Developmental Understanding*, [42, 30]); y (iii) el proceso de instrumentación de la información teórica proporcionada en el entorno de aprendizaje, [41, 45].

Las diferentes perspectivas, a través de las cuales generamos indicadores del desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente en las situaciones de enseñanza de las matemáticas, tienen en común cómo los estudiantes para maestro/profesor llegan a generar una posición interpretativa de los registros de la práctica. Estos registros sobre los que los estudiantes para profesor focalizan su análisis pueden ser respuestas de estudiantes a problemas (figuras 1 y 5), características de problemas procedentes de libros de texto (figura 4), descripciones de las interacciones en el aula (figura 2) o narrativas de la propia enseñanza. El objetivo es dar cuenta de cómo los estudiantes para profesor focalizan su atención sobre por qué un registro de la práctica tiene las características que tiene.

El desarrollo de la competencia docente se asume como una transición desde un discurso básicamente descriptivo (y a veces con juicios calificativos), hacia un discurso que puede estar organizado alrededor de las ideas teóricas con vínculos claros a las evidencias procedentes del registro de la práctica [29]. Desde esta perspectiva, la calidad del discurso generado viene dada por la forma en la que las evidencias, desde el registro de la práctica, se vinculan a los elementos teóricos usados para dotarlas de sentido y, en la medida en la que los estudiantes para profesor pueden considerar lo que observan como casos particulares de ideas teóricas, para apoyar las decisiones de acción. Por ejemplo, en qué medida los estudiantes para profesor desarrollan una articulación más compleja de lo que observan en las respuestas de los estudiantes a problemas de matemáticas, que les permita ir más allá de considerar las respuestas como correctas o incorrectas (es lo que habíamos denominado en las secciones previas, mirar más allá de la superficie), o en qué medida justifican su propuesta de acciones de enseñanza más allá de indicar: «Es así porque es lo que viene a continuación en el currículo», o «porque es necesario para poder aprender lo que viene a continuación».

El desarrollo de la competencia docente en los programas de formación inicial, visto a través de trayectorias entre los extremos indicados anteriormente, ha mostrado ser difícil para los estudiantes para profesor y ha dado lugar a la identificación de fases intermedias. Dicha identificación permite caracterizar niveles de desarrollo de esta competencia. Por ejemplo, los resultados del análisis de las respuestas de futuros profesores a las tareas profesionales en un entorno de aprendizaje similar al descrito en la sección anterior, pero con foco en la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, [39], se organizaron en la forma descrita en la figura 7.

Por otra parte, algunas veces la descripción de los niveles de desarrollo está vinculada a algunos aspectos particulares del entorno de aprendizaje. Por ejemplo, en un entorno tal centrado en el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el aprendizaje y la enseñanza del razonamiento proporcional ([11], p. 753–755), la caracterización de los diferentes niveles de desarrollo de la competencia docente se vinculó a la participación en un foro online en el que los estudiantes para profesores negociaban los significados dados a los registros de la práctica (figura 8).

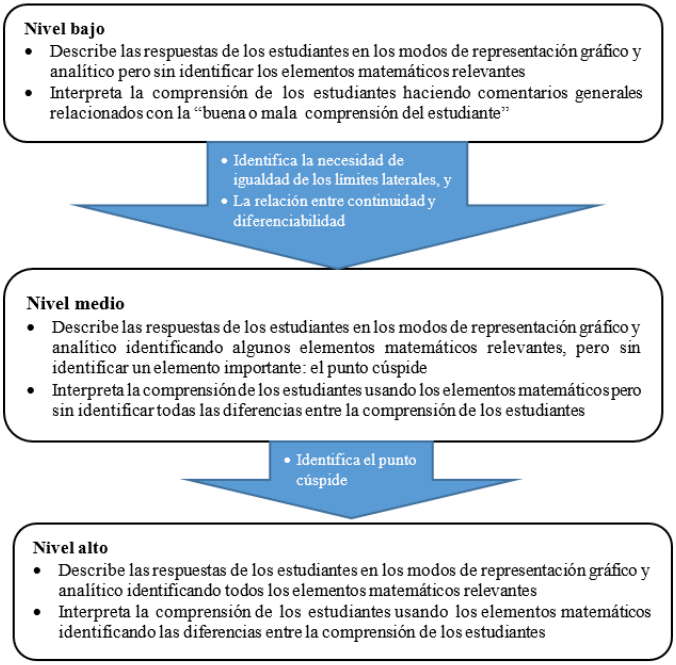


Figura 7: Grados de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el aprendizaje y la enseñanza del concepto de derivada (traducción de [39], p. 1325).

Tabla 3. Niveles de desarrollo de los futuros maestros antes y después de las discusiones online

	Antes de la discusión online	Después de la discusión online
Nivel 1	PT2, PT4, PT5, PT6	PT2
Nivel 2	PT7	
Nivel 3	PT1, PT3[a]	PT4, PT5, PT6, PT7[b]
Nivel 4		PT1, PT3[c]

[a] Ambos futuros profesores identifican 2 de los 4 perfiles de estudiantes

[b] Algunos de ellos identifican 1 o 2 de los 4 perfiles de estudiantes

[c] Ambos futuros profesores identifican 3 de los 4 perfiles de estudiantes

- Nivel 1. Los futuros profesores no diferencian situaciones proporcionales de situaciones aditivas. Estos futuros profesores solo describen las respuestas de los estudiantes sin relacionarlas con las características del problema.
- Nivel 2. Los futuros profesores diferencian situaciones proporcionales de situaciones aditivas relacionándolas con las características del problema, pero sin justificar sus respuestas considerando los elementos matemáticos de cada situación.
- Nivel 3. Los futuros profesores diferencian situaciones proporcionales de situaciones aditivas relacionándolas con las características del problema, y justifican sus respuestas considerando los elementos matemáticos de cada situación. Sin embargo, no identifican los perfiles de los estudiantes.
- Nivel 4. Los futuros profesores diferencian situaciones proporcionales de situaciones aditivas justificando a través de los elementos e identificando los perfiles de los estudiantes.

Figura 8: Niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente el desarrollo del razonamiento proporcional (traducción de [11], p. 753–755).

Las fases intermedias en el desarrollo de la competencia docente muestran que los estudiantes para profesor parecen tener algunas características como un experto, pero no otras [41], y que estas pueden variar entre los estudiantes para profesor. Esta característica en el desarrollo de la competencia ha permitido caracterizar cuatro niveles generales (figura 9). Los niveles intermedios 2 y 3 describen la manera en la que los estudiantes para profesor empiezan a apropiarse del conocimiento teórico pero su uso en la interpretación de las situaciones y la justificación de las decisiones de acción no es consistente entre las diferentes situaciones. Estos niveles intermedios tienen dos características. Por una parte, los estudiantes para profesor muestran un uso no consistente de las ideas teóricas sin establecer de manera clara las relaciones entre lo que es observado y las ideas teóricas (a veces realizando generalizaciones, y otras veces, viendo más de lo que el registro de la práctica proporciona). Por otra, cuando interpretan la situación usando adecuadamente los elementos teóricos, pero no proporcionan justificación de la decisión de acción planteada. En estas situaciones los estudiantes para profesor suelen presentar informes incompletos. Estos niveles muestran además la diferencia entre identificar e interpretar y decidir cómo seguir la enseñanza y los diferentes papeles que desempeñan el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas en la articulación de las destrezas de la competencia docente para interpretar las situaciones.

- Nivel 1. Los futuros profesores describen algunas partes del registro de la práctica; e.g. un video-clip , o diferentes respuestas de los estudiantes (Accounting-of)
- Nivel 2. Los futuros profesores identifican las ideas teóricas sin vincularlas con los aspectos específicos del registro de la práctica identificados (en algunos casos se hace un uso retórico de las etiquetas o ideas teóricas).
- Nivel 3. Los futuros profesores identifican aspectos específicos del registro de la práctica y los relacionan con algunos aspectos teóricos (categorías iniciales). Sin embargo, el proceso de generar categorías y la justificación sobre qué hacer a continuación pueden ser inestables (inconsistentes) en las distintas actividades (los primeros pasos en un *account-for*).
- Nivel 4. Los futuros profesores conceptualizan su pensamiento a través del proceso de razonamiento teórico (conceptualización). Los futuros profesores hacen un uso integrado de la información teórica al identificar e interpretar los aspectos claves de la situación de y justifican qué hacer a continuación (*Account-for*).

Figura 9: Características de los niveles de desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente (traducción de [29], p. 42).

5. Reflexiones Finales: Perspectivas Abiertas

Definir como un objetivo en los programas de formación de maestros y profesores de matemáticas el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente implica generar contextos en los que los estudiantes para profesores tengan la posibilidad de apropiarse de instrumentos para pensar y actuar. Esta situación genera cuestiones de investigación sobre cómo las características de los entornos de aprendizaje apoyan o limitan el desarrollo de esta competencia (y de las destrezas que la articulan) definiendo relaciones entre la práctica de formar profesores de matemáticas y la investigación en Didáctica de la Matemática [27].

Las actividades generadas en el tipo de entornos de aprendizaje descritos en las secciones anteriores son diferentes de la práctica real en una clase de matemáticas. Sin embargo, el uso de los registros de la práctica permite: Analizar el mismo hecho desde diferentes perspectivas, observar detalles específicos para razonar sobre ellos en función de los elementos teóricos disponibles y aprender a relacionar registros de la práctica entre sí para llegar a considerarlos como ejemplos de una misma idea general. Este proceso de categorización de los registros de la práctica caracteriza el desarrollo de la *racionalidad práctica* de los profesores [17] como una manifestación de su capacidad de reconocer relaciones en la situación particular y percibir propiedades [34]. Este hecho subraya la importancia del uso de registros de la práctica en cualquiera de sus formatos (video-clips, respuesta de alumnos a problemas, narrativas de sucesos del aula, materiales curriculares, secuencias de actividades, etc.) y de los instrumentos teóricos proporcionados para ayudar a los estudiantes para maestros y profesores de matemáticas a empezar a discernir detalles matemáticamente relevantes para el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes.

La agenda de investigación sobre el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente que se vincula al papel de diseñador de entornos de aprendizaje de los formadores de profesores genera nuevos espacios de indagación, tales como el desarrollo de la competencia en los periodos de práctica de enseñanza en los centros y el papel que pueden desempeñar las tecnologías de la comunicación en favorecer la interacción.

Uno de los nuevos espacios de indagación es la manera en la que los periodos de práctica de los estudiantes para profesor en los centros educativos pueden ser articulados alrededor de estas ideas y cómo el aprender a analizar la propia enseñanza puede apoyar el desarrollo de la competencia docente. En estos nuevos espacios de indagación, algunas iniciativas están proporcionando ideas de cómo apoyar el desarrollo de la competencia. Por ejemplo, elaborando narrativas sobre la propia práctica y compartirlas con los colegas tanto en la formación inicial de maestros [19], como durante el periodo de prácticas de enseñanza de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria [10]. Lo que tienen en común estas iniciativas es que crean espacios de discusión sobre aspectos de la enseñanza de las matemáticas y permiten generar espacios sociales de interacción para validar con otros sus razonamientos prácticos cuando justifican las acciones específicas de su práctica de enseñar matemáticas. Lo que este nuevo espacio de indagación añade a la agenda de investigación desarrollada hasta estos momentos es situar el desarrollo de la competencia docente en el análisis de la propia práctica de enseñar matemáticas.

Agradecimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo del proyecto I+D+i EDU2017-87411-R financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad, España, del grupo de excelencia PROMETEO2017/135 de la Generalitat Valenciana y el apoyo del Programa de la Unión Europea Erasmus+ (project coReflect@maths, 2019-1-DE01-KA203-004947). El apoyo de la Comisión Europea para la producción de esta publicación no constituye una aprobación del contenido, el cual refleja únicamente las opiniones de los autores y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en la misma.

Referencias

[1] J. Amador, Noticing as a tool to analyze mathematics instruction and learning, *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (Second Edition)*, 337–372, Brill/Sense, Leiden/Boston, 2020.

[2] S. Blázquez y T. Ortega, Los sistemas de representación en la enseñanza del límite, *Rev. Latinoam. Investig. Mat. Educ.* **4** (2001), no. 3, 219–236.

[3] L. Brown, C. Fernández, T. Helliwell y S. Llinares, Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. From university-based activities to classroom practice, *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3*, Participants in Mathematics Teacher Education, 343–366, Brill/Sense, Leiden/Boston, 2020.

[4] O. Buchbinder y S. Kuntze, *Mathematics Teachers Engaging with representations of practice. A Dynamically Evolving Field*, ICME-13 Monographs, Springer, Londres, 2018.

[5] A. Buforn, S. Llinares, C. Fernández, A. Coles y L. Brown, Preservice teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.*, 2020.

[6] M. L. Callejo y A. Zapatera, Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization, *J. Math. Teach. Educ.* **20** (2017), 309–333.

[7] J. Cottrill, E. Dubinsky, D. Nichols, K. Schwingendorf, K. Thomas y D. Vidakovic, Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema, *J. Math. Behav.* **15** (1996), 167–192.

[8] Design-Based Research Collective, The Design-Based Research: An Emerging Paradigm for Educational Inquiry, *Educational Researcher* **32** (2003), no. 1, 5–8.

[9] C. Fernández y B. H. Choy, Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, Teaching, Psychological, and social perspectives, *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (Second Edition)*, 337–360, Brill/Sense, Leiden/Boston, 2020.

[10] C. Fernández, S. Llinares y Y. Rojas, Prospective mathematics teachers' development of noticing in an online teacher education program, *ZDM Mathematics Education* **52** (2020), 959–972.

[11] C. Fernández, S. Llinares y J. Valls, Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions, *ZDM Mathematics Education* **44** (2012), 747–759.

[12] C. Fernández, S. Llinares y J. Valls, Primary school teachers' noticing of students' mathematical thinking in problem solving, *The Mathematics Enthusiast* **10** (2013), no. 1-2, 441–468.

[13] C. Fernández, G. Sánchez-Matamoros, M. Moreno y M. L. Callejo, La coordinación de las aproximaciones en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes, *Enseñanza de las Ciencias* **36** (2018), no. 1, 143–162.

[14] C. Fernández, G. Sánchez-Matamoros, J. Valls y M. L. Callejo, Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts, *Avances de Investigación en Educación Matemática* **13** (2018), 39–61.

[15] J. D. Godino y S. Llinares, Competencia docente en el análisis de procesos instructivos y desarrollo de una «mirada profesional». Aportes desde el Interaccionismo Simbólico, *Rutas de la Educación Matemática*, 25–42, Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, México DF, 2018.

[16] C. Goodwin, Professional vision, *American Anthropologist* **96** (1994), 606–633.

[17] P. Herbst y D. Chazan, Research on Practical Rationality: Studying the Justification of Actions in Mathematics Teaching, *The Mathematics Enthusiast* **8** (2011), no. 3, 405–462.

[18] P. Ivars, A. Buforn y S. Llinares, Diseño de tareas y desarrollo de una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro, *Alternativas Pedagógicas para la Educación matemática del siglo XXI*, 65–87, Centro de Investigaciones Educativas, Escuela de Educación, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 2017.

[19] P. Ivars y C. Fernández, The role of Writing narratives in Developing Preservice Elementary Teachers' Noticing, *Research Advances in the mathematical Education of Pre-service Elementary Teachers*, 245–259, ICME-13 Monographs, Springer, Londres, 2018.

[20] P. Ivars, C. Fernández y S. Llinares, Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción, *Enseñanza de las Ciencias* **38** (2020), no. 3, 105–124.

[21] P. Ivars, C. Fernández y S. Llinares, A learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding, *Int. J. Math. Educ. Sci. Tech.* **18** (2020), 529–548.

[22] P. Ivars, C. Fernández, S. Llinares y B. H. Choy, Enhancing Noticing: using a Hypothetical Learning Trajectory to Improve Pre-service Primary Teachers' Professional Discourse, *EURASIA J. Math. Sci. Tech. Ed.* **14** (2018), no. 11, em1599.

[23] V. Jacobs, L. Lamb y R. Philipp, Professional Noticing of Children's Mathematical Thinking, *J. Res. Math. Educ.* **41** (2010), no. 2, 169–202.

[24] S. Llinares, La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en Educación Primaria, *UNO. Didáctica de las Matemáticas* **36** (2004), 93–115.

[25] S. Llinares, Professional noticing: A component of the mathematics teachers' professional practice, *Sisyphus. Journal of Education* **1** (2013), no. 3, 76–93.

[26] S. Llinares, El desarrollo de la competencia docente "mirar profesionalmente" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, *Educar em Revista, Curitiba, Brasil* **50** (2013), 117–133.

[27] S. Llinares, Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica del formador de profesores de Matemáticas, *Educación Matemática* **26** (especial 25 años) (2014), 31–51.

[28] S. Llinares, Enseñar matemáticas y aprender a mirar de forma profesional la enseñanza (del análisis del conocimiento y práctica del profesor al desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente), *Conocimiento y emociones del profesorado para su desarrollo e implicaciones didácticas*, 211–236, Editorial Aula de Humanidades, Bogotá, 2016.

[29] S. Llinares, Indicators for the development of noticing: how do we recognize them?, *For Learn. Math.* **2019** (2019), 38–43.

[30] S. Llinares, C. Fernández y G. Sánchez-Matamoros, Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers, *EURASIA J. Math. Sci. Tech. Ed.* **12** (2016), no. 8, 2155–2170.

[31] S. Llinares y J. Valls, Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment, *J. Math. Teach. Educ.* **13** (2010), 177–196.

[32] S. Llinares, J. Valls y A. I. Roig, Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas, *Educación Matemática* **20** (2008), no. 3, 31–54.

[33] J. Mason, Enabling teachers to be real teachers: necessary levels of awareness and structure of attention, *J. Math. Teach. Educ.* **1** (1998), no. 3, 243–267.

[34] J. Mason, *Researching your own practice: The discipline of noticing*, Routledge/Falmer, Londres, 2002.

[35] E. Montero, M. L. Callejo y J. Valls, Instrumentación de una progresión de estrategias por estudiantes para maestro, *Enseñanza de las Ciencias* **38** (2020), no. 2, 83–101.

[36] M. Moreno y S. Llinares, Prospective Mathematics Teachers' Perspectives on Technology, *Educating Prospective Secondary Mathematics Teachers*, 125–142, ICME-13 Monograph, Springer, Londres, 2018.

[37] W. Oonk, N. Verloop y K. Gravemeijer, Enriching practical knowledge: Exploring student teachers' competence in integrating theory and practice of mathematics teaching, *J. Res. Math. Educ.* **46** (2015), no. 5, 559–598.

[38] J. Pons, *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*, Tesis Doctoral, Universidad de Alicante, 2014.

[39] G. Sánchez-Matamoros, C. Fernández y S. Llinares, Developing preservice teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept, *Int. J. Sci. Math. Educ.* **13** (2015), 1305–1329.

[40] G. Sánchez-Matamoros, C. Fernández y S. Llinares, Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skill of attending, interpreting and responding to students' understanding, *Educ. Stud. Math.* **100** (2019), 83–99.

[41] G. Sánchez-Matamoros, M. Moreno, P. Pérez-Tyteca y M. L. Callejo, Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil, *Rev. Latinoam. Investig. Mat. Educ.* **21** (2018), no. 2, 203–228.

[42] M. Simon, Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals, *Math. Think. Learn.* **8** (2006), no. 4, 359–371.

[43] R. Stahnke, S. Schueler y B. Roesken-Winter, Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research, *ZDM Mathematics Education* **48** (2016), 1–27.

[44] E. van Es y M. G. Sherin, Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions, *J. Technol. Teach. Educ.* **10** (2002), no. 4, 571–596.

[45] P. Verillon y P. Rabardel, Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrument activity, *Eur. J. Psychol. Educ.* **10** (1995), no. 3, 77–101.

[46] P. H. Wilson, P. Sztajn, C. Edgington, J. Webb y M. Myers, Changes in teachers' discourse about students in a professional development on learning trajectories, *Am. Educ. Res. J.* **54** (2017), no. 3, 568–604.

Salvador Llinares, Dpto. de Innovación y Formación Didáctica, Área de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Alicante

Correo electrónico: `sllinares@ua.es`

Página web: `http://cvnet.cpd.ua.es/Directorio/Home/FichaPersona/9015?depende=B166`

Ceneida Fernández, Dpto. de Innovación y Formación Didáctica, Área de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Alicante

Correo electrónico: `ceneida.fernandez@ua.es`

Página web: `http://cvnet.cpd.ua.es/Directorio/Home/FichaPersona/37997?depende=B166`