La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

35.ª Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

María Gaspar y Óscar Rivero

La Olimpiada Iberoamericana puso, como siempre, el broche final a las actividades olímpicas del pasado curso académico, el 2019–2020. Y como todas las de ese curso tan raro y especial, el de la pandemia, se llevó a cabo a distancia.

No fue hasta finales de septiembre, una vez terminada la Olimpiada Internacional, cuando los peruanos —la sede prevista era Lima— anunciaron que ellos se ocuparían de organizarla en remoto y enviaron las invitaciones. Nuevas fechas: en la semana del 13 al 20 de noviembre.

Nuestro equipo, formado por Pau Cantos, Ignacio Císcar, Leonardo Costa y Javier Nistal, estaba en esos momentos bastante desperdigado. En esas fechas, solamente el benjamín, Leonardo, aún estudiante de Bachillerato, estaba en casa; los tres restantes habían iniciado sus estudios de grado: Pau en Cambridge, Ignacio en Oxford, y Javier en Barcelona, en la UPC. No fue posible reunir al equipo, no solo porque la movilidad estaba —y sigue estando— muy restringida, sino también por la falta de medios para cubrir gastos de desplazamiento y alojamiento de todos. Por surrealista que pueda parecer, el Ministerio se habría hecho cargo de los gastos de viaje a Perú, pero ¡imposible cubrir ni un céntimo de una sede en España! Afortunadamente, el reglamento adaptado a las circunstancias covid permitía la participación

Logo de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas 2020.

desde casa, y cada uno de nuestros mochuelos —con profesor tutor (Óscar Rivero), observador (Marc Felipe) y jefa de la delegación (María Gaspar) incluidos— tuvo que quedarse en su olivo.

Eso sí: los organizadores peruanos insistieron mucho en que el trabajo se desarrollara como de costumbre. Pero portugueses y españoles estábamos en Europa… y tuvimos que enfrentarnos a maratonianas reuniones del Jurado, vía Zoom, en horario limeño, empezando a nuestras 16 horas y hasta las 20, y retomándolas luego a las 22, hasta las 2 de la madrugada.

Participaron delegaciones de veintitrés países. De los habituales, solamente faltó República Dominicana; tuvimos de nuevo una delegación de Mozambique, y también, por primera vez, una de Jamaica.

Las pruebas fueron los días 16 y 17 de noviembre, comenzando puntualmente a las 9 (hora de Lima), cualquiera que fuera el paradero real de los concursantes, y con cuatro horas y media de duración, como siempre. La excepción de este año: se prohibieron las preguntas, pues no encontramos forma de que se pudieran responder adecuadamente. Como contrapartida, el Jurado cuidó de forma especial la redacción de los enunciados de los problemas propuestos, que fueron los siguientes:

Lunes, 16 de noviembre de 2020

Problema 1.

Sea ABC un triángulo acutángulo tal que $AB < AC$. Los puntos medios de los lados AB y AC son M y N, respectivamente. Sean P y Q puntos en la recta MN tales que $\angle CBP = \angle ACB$ y $\angle QCB = \angle CBA$. La circunferencia circunscrita del triángulo ABP interseca a la recta AC en D ($D \neq A$) y la circunferencia circunscrita del triángulo AQC interseca a la recta AB en E ($E \neq A$). Demuestre que las rectas BC, DP y EQ son concurrentes.

Problema 2.

Para cada entero positivo n, se define T_n como el menor entero positivo tal que $1+2+\cdots+T_n$ es múltiplo de n. Por ejemplo, $T_5 = 4$ puesto que 1, $1+2$ y $1+2+3$ no son múltiplos de 5, pero $1+2+3+4$ sí es múltiplo de 5.

Determine todos los enteros positivos m tales que $T_m \geq m$.

Problema 3.

Sea $n \geq 2$ un entero. Una sucesión $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de n números enteros se dice *limeña* si

$$\operatorname{mcd}\{\, a_i - a_j \mid a_i > a_j \ \text{ y } \ 1 \leq i, j \leq n \,\} = 1.$$

Una *operación* consiste en escoger dos elementos a_k y a_ℓ de una sucesión, con $k \neq \ell$, y reemplazar a_ℓ por $a'_\ell = 2a_k - a_\ell$.

Demuestre que, dada una colección de $2^n - 1$ sucesiones limeñas, cada una formada por n números enteros, existen dos de ellas, digamos β y γ, tales que es posible transformar β en γ mediante un número finito de operaciones.

Aclaración: Si todos los elementos de una sucesión son iguales, entonces esa sucesión no es limeña.

Martes, 17 de noviembre de 2020

Problema 4.

Demuestre que existe un conjunto $\mathcal{C}$ de 2020 enteros positivos y distintos que cumple simultáneamente las siguientes propiedades:

- Cuando se calcula el máximo común divisor de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.
- Cuando se calcula el mínimo común múltiplo de cada dos elementos de $\mathcal{C}$, se obtiene una lista de números todos distintos.

Problema 5.

Encuentre todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(xf(x-y)) + yf(x) = x + y + f(x^2),$$

para cualesquiera números reales x, y.

Problema 6.

Sea ABC un triángulo acutángulo y escaleno. Sean H el ortocentro y O el circuncentro del triángulo ABC, y sea P un punto interior del segmento HO. La circunferencia de centro P y radio PA interseca nuevamente a las rectas AB y AC en los puntos R y S, respectivamente. Denotamos por Q el punto simétrico al punto P con respecto a la mediatriz de BC. Demuestre que los puntos P, Q, R y S pertenecen a una misma circunferencia.

Terminadas las pruebas sin incidencias, comenzaron las coordinaciones. Todas se llevaron a cabo en sesiones de Zoom, con las dificultades que las enormes diferencias horarias conllevan. Había que conciliar horarios americanos, europeos... e incluso alguno asiático, pues actuaron exolímpicos peruanos desde distintos rincones del globo. ¡Alguna ventaja tiene que tener esta modalidad a distancia a la que el virus nos ha condenado en este 2020!

En su última reunión —naturalmente vía Zoom, comenzando a las 22 horas del sábado 21— el Jurado aprobó todas las calificaciones, y se establecieron también los cortes de medalla, es decir, la puntuación mínima necesaria para obtener medalla de bronce, de plata y de oro, que en esta ocasión se fijaron en 21, 35 y 41 puntos respectivamente. Entre los 42 medallistas de esta edición (exactamente la mitad de los concursantes) figuraban los cuatro españoles: los 38 puntos que obtuvo le han valido a Pau su segunda medalla de plata en iberoamericana; plata ha tenido también Javier, con 36 puntos, mientras que Leonardo (34 puntos) e Ignacio (29 puntos) se han llevado sendas medallas de bronce. Un total de 137 puntos que sitúan a nuestro equipo en quinta posición, detrás de Perú, Brasil, México y Argentina, lo mismo que había ocurrido el año anterior.

En la tabla siguiente, que recoge las frecuencias de puntuaciones por problema, puede verse como, para los concursantes, la dificultad de los problemas ha sido en esta ocasión la que el Jurado pretende: problemas 1 y 4 fáciles, 2 y 5 medianos, y los últimos de cada día, el 3 y el 6, que son los que definen el oro, los más difíciles. En la tabla, $\overline{X}$ es la media de todos los participantes, σ la desviación estándar y $\overline{X_E}$ la media del equipo español.

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0	13	20	55	17	7	57
1	0	1	4	3	5	7
2	5	15	0	1	11	3
3	3	7	1	1	11	3
4	2	0	1	1	14	2
5	1	2	3	3	4	0
6	6	1	2	6	5	4
7	54	38	18	52	27	8
$\overline{X}$	5.31	3.98	1.95	5.08	4.23	1.31
σ	2.68	2.99	2.98	2.90	2.39	2.38
$\overline{X_E}$	7	7	5	7	6.5	1.75

No queremos terminar estas líneas sin agradecer el esfuerzo y el trabajo de cuantos han hecho posible que la Olimpiada Iberoamericana pudiera llevarse a cabo, especialmente a los organizadores peruanos. Y, por supuesto, queremos dar una vez más la enhorabuena a nuestro equipo olímpico de este año, que tantas satisfacciones nos ha proporcionado.

María Gaspar, Universidad Complutense de Madrid
Correo electrónico: `mgaspar@ucm.es`

Óscar Rivero, Universitat Politècnica de Catalunya
Correo electrónico: `oscar.rivero@upc.edu`