Las matemáticas en la educación: algunas ideas

por

Antonio Martinón

Resumen. En las últimas décadas ha mejorado la educación matemática española, pero también reconocemos que aún queda mucho por hacer. Este texto contiene algunas ideas que espero resulten útiles para los colegas interesados en el progreso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Estas líneas se basan en mi experiencia como profesor de secundaria durante años y como profesor universitario algunos más, así como en las reflexiones acerca de las investigaciones en las que he participado y de los compromisos que he adquirido para la mejora de esta enseñanza. Casi todo lo que comento vale para los distintos niveles educativos. La presentación de estas ideas está inevitablemente afectada por mis propios gustos.

1. No estamos solos. ¿Matemáticas para qué?

Empecemos con una obviedad: no estamos solos. Las matemáticas son una pieza más del amplio y muy complejo proceso educativo. Otras disciplinas también participan, desde los inicios, en la formación de los estudiantes. Todas tienen su función y, con frecuencia, resultan complementarias.

¿Qué papel tiene la asignatura de Matemáticas? ¿Cómo ayuda a los objetivos generales de la educación? Recordemos que las razones que suelen darse, para explicar la presencia tan destacada de las matemáticas en cualquier sistema educativo, se agrupan en torno a dos ideas: (A) poseen una potente capacidad de formación intelectual, y (B) son necesarias en muchos aspectos. De estos últimos destaco tres:

(a) son necesarias en la vida cotidiana,

(b) son fundamentales en otras ramas del conocimiento, y

(c) son imprescindibles para una ciudadanía responsable.

Las razones anteriores llevan a concretar los objetivos de la educación matemática, adaptados a los diferentes niveles educativos.

De aquí en adelante me centraré en el papel de las matemáticas para lograr una ciudadanía responsable y en su capacidad de formación intelectual. Lo hago desde la perspectiva de una enseñanza con un profesorado que busca lograr en su alumnado un aprendizaje significativo. Al hacerlo así estoy en línea con los *Principles and Standards for School Mathematics* del National Council of Teachers of Mathematics

(NCTM, 1999), además de participar de las preocupaciones y propuestas recogidas en el *Libro Blanco de las Matemáticas* (2020), que recientemente han publicado la Real Sociedad Matemática Española (RSME) y la Fundación Ramón Areces.

Aristóteles señaló que los jóvenes pueden hacerse matemáticos muy hábiles, pero no sabios en otras ciencias, para las que necesitarían una experiencia que aún no poseen, pues no han vivido lo suficiente para tenerla. Sin embargo, los resultados escolares parecen indicar lo contrario. Lo habitual es que haya más suspensos en Matemáticas que en las otras disciplinas. ¿Tenemos éxito en la enseñanza de las matemáticas? Todos reconocemos que son importantes para la sociedad, pero seguramente por eso hay una insatisfacción y preocupación con su enseñanza, en nuestro país y en otros muchos.

Vale la pena recordar los resultados de PISA en matemáticas 2018: la media española fue 481, mientras que en la OCDE fue 489 y en la Unión Europea 493. La diversidad en España es notable: a la cabeza están Navarra (503), Castilla y León (502), País Vasco (499) y Cantabria (499). A la cola se encuentran Canarias (460), Melilla (432) y Ceuta (411). Estos números no son la foto completa de una realidad con mil caras, pero algo indican y, por tanto, debemos tenerlos en cuenta. Lo que no es razonable es ignorarlos.

2. Ciudadanía responsable

Una ciudadanía responsable debe comprender lo más importante de lo que ocurre en la sociedad y así poder participar en el debate democrático, y hacerlo con criterio propio, sabiendo bien de lo que se habla y conociendo lo esencial de las discusiones. Vivimos una revolución tecnológica que produce trasformaciones profundas y veloces en las sociedades, y que nos presenta un futuro lleno de incertidumbres, momentos donde resulta especialmente necesaria la ciudadanía responsable.

Las matemáticas en la enseñanza tienen un papel en el logro de una ciudadanía responsable. Es necesario cierto conocimiento de estadística y probabilidad, que nos permita la comprensión de las informaciones que nos llegan de manera cotidiana y la valoración crítica de las propuestas que se nos hacen. Aunque quizás lo más importante para tener una ciudadanía responsable sea la extensión de la cultura científica entre la población, especialmente entre los jóvenes.

S. Hawking escribió: «¿Qué espera a los que son jóvenes ahora? Puedo decir con confianza que su futuro dependerá más de la ciencia y de la tecnología que en cualquier generación anterior. Necesitarán saber sobre la ciencia más que en cualquier tiempo anterior porque forma parte de sus vidas diarias de una manera sin precedentes.»

Los gobiernos deben asumir, como un objetivo nacional, el aumento de los conocimientos científicos y técnicos básicos, así como el reconocimiento del papel de los científicos y tecnólogos en el progreso de las sociedades. Los medios de comunicación públicos deberían contribuir a que así fuera y tratar como héroes de nuestro tiempo a esos jóvenes que se dedican a la investigación, a la búsqueda del nuevo conocimiento, ya sea en sociología, en biología o en matemáticas.

3. ¿Está presente la formación intelectual en el aula?

Todos decimos que la enseñanza de las matemáticas debe propiciar en los alumnos el pensamiento abstracto, la capacidad de razonar y generalizar, el abordaje de problemas, la justificación de las afirmaciones, el cultivo de la curiosidad científica, la exigencia de rigor y la capacidad de formalización, el desarrollo de la creatividad y la imaginación, el aprecio por la belleza intelectual, así como distinguir lo esencial de lo superfluo.

¡Qué cantidad de ambiciosas metas! ¿Cómo lograrlas? En demasiados casos los contenidos se imponen sobre la formación, impera el «no hay tiempo» y se trabaja en tantos temas que no es posible *digerirlos*. De este modo, la asignatura a la que se le atribuye mayor uso del razonamiento se convierte en una donde hay que memorizar... ¡lo que dentro de poco se olvidará! Los conceptos clave no se aprenden en un día: hay que madurarlos. Además, es necesario combinar diferentes conceptos, relacionar unos con otros, lo que exige tiempo. Parece que vivimos en una contradicción entre lo que afirmamos que es más conveniente y la práctica en el aula.

Los ejercicios no rutinarios son un buen instrumento para fundir técnica y formación. Uno de esos problemas, que forma parte de la familia *pares y nones*, es el siguiente:

Ejemplo. *En una de las esquinas de un tablero de ajedrez se sitúa un caballo. ¿Puede llegar a la otra esquina de su diagonal pasando una vez y solo una por las demás casillas?*

El razonamiento que nos lleva a la solución es muy simple: no es posible, pues tendría que dar exactamente 63 saltos y en cada uno de ellos cambia de color, de tal forma que finalizaría en una casilla de diferente color al de la inicial, así que no podría estar en la misma diagonal.

En las próximas secciones pondré el foco en aspectos que considero muy relevantes en la formación intelectual: la abstracción y el significado, la demostración y la generalización, la intuición y lo esencial.

4. La abstracción y el significado

Para alcanzar un conocimiento matemático significativo, en su construcción es necesario presentar situaciones que sean familiares a los alumnos y que den lugar a la abstracción.

Cuando se escribe $2+3=5$ se expresa un conocimiento abstracto que se refiere a numerosas situaciones y en diferentes contextos. Veamos un ejemplo con esa igualdad en un nivel muy elemental:

Ejemplo. *Luis tenía* 5 *euros, cantidad que se redujo en* 3 *euros y finalmente Luis tiene* 2 *euros.*

Hay varias maneras de expresar ese cambio y, por tanto, varias formas de enunciar un problema. Veamos dos.

(a) *Luis ahora tiene* 2 *euros y antes tenía* 3 *euros más que ahora. ¿Cuántos euros tenía Luis antes?*

(b) *Luis ahora tiene* 2 *euros y ahora tiene* 3 *euros menos que antes. ¿Cuántos euros tenía Luis antes?*

En una encuesta que realizamos con alumnos de educación primaria se obtuvo que en el caso (a) el nivel de éxito fue del 90 %, mientras que en el caso (b) solo se llegó al 20 %. Esto tiene una explicación. Ambos problemas responden a la situación numérica $2 + 3 = 5$ o $5 - 3 = 2$ y al conocimiento abstracto de que las ecuaciones $2+3 = x$ o $x-3 = 2$ tienen solución $x = 5$. Sin embargo, en el problema (a) se dice «más que» y se debe sumar, el referente en la comparación es un dato conocido (lo que tiene ahora), y lingüísticamente tiene la estructura «ahora, antes − ahora, antes». En el enunciado (b) se dice «menos que» y se debe sumar, el referente es la incógnita (lo que tenía antes), y lingüísticamente tiene la estructura «ahora, ahora − antes, antes».

El conocimiento abstracto, para que sea significativo y resulte útil, se debe construir con numerosas situaciones concretas diferentes. Se abstrae a partir de ellas y se debe volver a ellas desde lo abstracto.

5. La demostración y la generalización

En la vida cotidiana hay muchas maneras de decidir: haciendo caso a una corazonada, siguiendo un sentimiento, mediante una votación, aceptando lo que dice la autoridad...

Sin embargo, en la ciencia se apela a una explicación racional, en ocasiones fundada en la experiencia: tenemos que convencernos unos a otros de cuál es la verdad. En matemáticas se va más allá: las afirmaciones se prueban, es decir, se ofrece un razonamiento de validez incuestionable. Demostrar es dar una justificación que no ofrece duda.

En las aulas de primaria y secundaria las demostraciones están prácticamente ausentes y son muchos los estudiantes universitarios que desconocen lo que realmente significan.

Para contribuir a la formación intelectual del alumnado es absolutamente necesario que en todos los niveles educativos se razonen las verdades matemáticas. Desde luego, no hay que probarlo todo y, por supuesto, las justificaciones deben adaptarse al nivel de los alumnos. Además, las demostraciones, las pruebas, ofrecen evidencias sobre lo que es verdad, no porque así esté escrito en el libro o lo diga el profesor. Se refieren a una realidad que tiene su propia verdad, una verdad objetiva, y esa verdad se logra con certeza plena mediante una justificación racional, con un razonamiento incuestionable.

EJEMPLO. *El teorema más conocido y más popular es el de Pitágoras. Una demostración clara puede lograrse con figuras simples y puede presentarse a estudiantes de niveles iniciales.*

Nos gusta generalizar, convertir en norma o regla lo que conocemos en algunos casos. En la ciencia formulamos conjeturas fundadas en casos particulares, pero no se convierten en conocimiento, en certeza plena, hasta que proporcionamos su demostración. El siguiente ejemplo permite formular conjeturas a partir de situaciones particulares. El salto a la fórmula general no suele ser sencillo.

Ejemplo. *El suelo de una habitación rectangular está cubierto por* 9×4 *baldosas rectangulares iguales. ¿Cuántas baldosas corta la diagonal de la habitación?*

Para algunos el enunciado tiene cierto aire de teorema de Pitágoras, sin embargo nada tiene que ver con él. La respuesta es 12, lo que se puede comprobar con un dibujo. La situación se puede plantear con más generalidad: *el suelo está cubierto por* $m \times n$ *baldosas. ¿Cuántas baldosas corta la diagonal?* La solución suele sorprender: $m + n - d$, siendo d el máximo común divisor de m y n.

6. La intuición y lo esencial

La intuición se educa y lo que la intuición sugiere debe comprobarse. Mi ejemplo preferido es el siguiente:

Ejemplo. *Imaginemos una cinta ajustada al ecuador. La alargamos un metro, estiramos la nueva cinta y la ponemos paralela al ecuador. ¿Puede pasar una hormiga entre la cinta y el ecuador?*

La gran mayoría de las personas a las que se pregunta dicen no. Sin embargo, un cálculo sencillo dice que entre el ecuador y la cinta hay unos 16 centímetros. ¡Cabe una hormiga y algún animalito bastante más grande!

Hay un choque entre lo que parece *más natural* (lo intuitivo) y el cálculo numérico. Tenemos mal educada la intuición sobre la noción de función lineal. Si realizamos la misma operación sustituyendo el ecuador por el borde de una moneda cualquiera el resultado sería el mismo: unos 16 centímetros. ¡Lo esencial no es la longitud de la circunferencia inicial, sino lo que aumenta!

Otro ejemplo que resulta contrario a la intuición es el siguiente.

Ejemplo. *Los partidos políticos* X *e* Y *se presentan a las elecciones en las circunscripciones* A *y* B*. Puede ocurrir que* X *gane en* A *y pierda en* B*, pero teniendo en* B *más porcentaje de votos entre los hombres y también más porcentaje de votos entre las mujeres de los que tiene en* A*.*

Los resultados de la siguiente tabla dan un caso en el que se tiene una situación así:

A	X	Y	Total	B	X	Y	Total
Hombres	12	28	40	Hombres	32	48	80
Mujeres	42	18	60	Mujeres	16	4	20
Total	54	46	100	Total	48	52	100
Hombres	30 %	70 %	100 %	Hombres	40 %	60 %	100 %
Mujeres	70 %	30 %	100 %	Mujeres	80 %	20 %	100 %

En otras situaciones la formulación de la pregunta induce a focalizar la atención de manera casi engañosa:

Ejemplo. *Estoy en un punto de la superficie terrestre que verifica la siguiente propiedad: si me desplazo un kilómetro hacia el sur, otro hacia el este y uno más hacia el norte, vuelvo al mismo punto. ¿En qué punto estoy?*

Una respuesta es el polo norte. Pero realmente hay una infinidad de otras soluciones... si pensamos en el hemisferio sur.

7. El papel del profesorado

Lograr los objetivos mencionados está en manos del profesorado, que debe tener claras las metas en cada nivel. Para ello es fundamental la formación del profesorado, la inicial y la permanente.

Necesitamos un profesorado con una formación matemática sólida, adecuada al nivel en el que ejerce y no necesariamente de alta especialización científica. Si nos referimos a los niveles no universitarios, es necesario conocer *la matemática elemental desde un punto de vista superior*, por usar el título del libro de F. Klein, y en los niveles universitarios saber bien las matemáticas que se enseñan. En todos los casos las aplicaciones más significativas tienen que estar presentes.

Algunos enseñan matemáticas como se las enseñaron a ellos, preocupados por explicar bien la materia, aunque esto no es suficiente. No podemos olvidar que el proceso educativo tiene dos caras: la enseñanza y el aprendizaje, no se puede quedar a la mitad. No acabará nuestra tarea hasta conseguir que el estudiante avance en su formación y amplíe sus conocimientos.

También pienso que los profesores debemos ser investigadores de nuestra propia tarea, que reflexionemos sobre lo que hacemos en el aula, que ensayemos otras formas, que sondeemos caminos diferentes a los habituales... ¡que investiguemos! También, que tengamos la humildad de leer a colegas que se han preocupado de publicar sus ideas, experiencias, opiniones... ¡No descubramos el Mediterráneo!

Hace cuarenta años nacieron distintas sociedades de profesores de matemáticas en España, principalmente de la mano de enseñantes de la educación secundaria. Fue la respuesta ante la preocupación compartida por la educación matemática. Algo más tarde surgió la didáctica de las matemáticas como disciplina académica, que hoy está presente en numerosas universidades.

Entre profesores e investigadores se han ido construyendo algunos puentes, pero seguramente sea necesario fortalecer los que ya existen y aumentarlos. Hay que ir más allá del encuentro casual entre el profesor de un grupo de alumnos y el investigador que realiza una investigación para la que necesita hacer una experiencia de aula. La educación y la investigación deben ir de la mano.

8. La unidad en la formación

Las matemáticas poseen una fuerte unidad y creo que debemos evitar la imagen de una disciplina científica parcelada, especialmente en los niveles no universitarios. Se debe ofrecer contenidos de aritmética, de álgebra, de geometría, de probabilidad, de análisis, de estadística... de manera simultánea. Esta idea responde a una visión integral de la educación.

Todas las materias escolares deben contribuir al cultivo y desarrollo de la inteligencia y las emociones, y también a lograr el «pleno desarrollo de la personalidad humana en el respeto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales», como se dice en nuestra Constitución.

Por fortuna cada vez es más frecuente conocer experiencias educativas en las que diferentes profesores de asignaturas distintas colaboran en un mismo tema, integrando conocimientos y visiones diferentes. En casi todas esas innovaciones las matemáticas tienen un papel que jugar.

9. Una propuesta para el debate

Buena parte de los que formamos la comunidad matemática tenemos un permanente interés por la enseñanza y el aprendizaje de nuestra disciplina, con ganas de que mejoren sustancialmente.

¿Podemos hacer algo para mejorar la situación? Claro que sí. Realmente se trata de seguir haciendo. Pienso que las sociedades matemáticas españolas (como la RSME), las de investigación en educación matemática y de profesores de matemáticas (como la SEIEM o FESPM), así como los responsables de los títulos universitarios de Matemáticas, deberíamos hacer una propuesta audaz y realista para cambiar las matemáticas no universitarias, algunas formuladas en el ya mencionado *Libro Blanco de las Matemáticas*.

Diferentes asociaciones y colectivos han formulado una idea que hago mía: crear el título de graduado o graduada en Educación Matemática. Me parece que está en aumento el número de profesores en la educación no universitaria que no son licenciados ni graduados en Matemáticas, lo que dificulta que los estudiantes logren una razonable formación. La introducción de ese título facilitaría tener un profesorado con sólidas bases matemáticas y también sólidas bases didácticas.

En el nivel no universitario, se distancian las figuras del profesional de las matemáticas y del profesor de matemáticas. Pienso que debemos reconocer que es así y que es preciso tener dos títulos de grado, que respondan a esa doble realidad: Matemáticas y Educación Matemática.

¡Seamos ambiciosos con la educación matemática!

Antonio Martinón, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna
Correo electrónico: anmarce@ull.es