Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 24 (2021), Núm. 2, Pág. 272

Polinomios estables

Un polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, se denomina *estable* si todas sus raíces tienen parte real negativa. La caracterización de estos polinomios es fundamental en problemas de teoría de control o de sistemas dinámicos. Así, por ejemplo, todas las soluciones $x = x(t)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

cumplen $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$ si y solo si p es un polinomio estable.

Que p sea estable equivale a ciertas desigualdades polinómicas entre sus coeficientes, y éstas suelen obtenerse imponiendo la positividad de los menores principales de una matriz $n \times n$ asociada a p, la matriz de Routh-Hurwitz. Nuestro objetivo es presentar, siguiendo a Strelitz (On the Routh-Hurwitz problem, *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), 542–544), una forma menos conocida de caracterizar los polinomios estables, que a la postre también permite obtener otras desigualdades equivalentes.

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ las n raíces de p, considerando cada una de ellas tantas veces como multiplicidad tenga. Introducimos un segundo polinomio

$$q(z) = \prod_{1\le j<k\le n} \big(z - (\alpha_j + \alpha_k)\big) =: z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0 \in \mathbb{R}[z],$$

de grado $m = n(n-1)/2$. A continuación demostraremos que p es un polinomio estable si y solo si todos los coeficientes de p y todos los de q son positivos.

Para $n = 1, 2$ no es difícil ver que si p es estable entonces sus coeficientes son positivos. Como todo polinomio se descompone en producto de polinomios reales de grado 1 o 2, y el producto de polinomios con coeficientes positivos mantiene esta propiedad, obtenemos que si p es estable sus coeficientes son positivos. Finalmente, como p estable implica que q es estable, hemos probado lo mismo para q.

Vamos a demostrar el recíproco. Si todos los coeficientes de p son positivos es claro que todas sus raíces reales tienen que ser negativas. Además, sea $u \pm v\mathrm{i}$ un par de raíces complejas de p. Entonces $(u + v\mathrm{i}) + (u - v\mathrm{i}) = 2u$ es una raíz real de q, y de nuevo, como los coeficientes de q son positivos, obtenemos que $2u < 0$ como queríamos demostrar.

Finalmente, las fórmulas de Newton-Girard permiten obtener los b_j como funciones polinómicas de los a_i, sin necesidad de conocer los α_k. La razón es que tanto los coeficientes de p como los de q son polinomios simétricos en las raíces de p. Así obtenemos las desigualdades buscadas. Por ejemplo, para $n = 3$ se obtiene que $q(z) = z^3 + 2a_2 z^2 + (a_2^2 + a_1)z + (a_1 a_2 - a_0)$ y, en consecuencia, las condiciones necesarias y suficientes para que p sea estable son $a_2 > 0$, $a_1 > 0$ y $0 < a_0 < a_1 a_2$.

Armengol Gasull, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona
Correo electrónico: gasull@mat.uab.cat
Página web: http://www.gsd.uab.cat/personal/agasull