

Una nueva faceta geométrica de la función no diferenciable de Riemann

por

Daniel Eceizabarrena

RESUMEN. La función no diferenciable de Riemann es célebre por ser continua pero no diferenciable en casi ningún punto. Desde que fue definida hacia 1860, su estudio ha estado centrado sobre todo en su regularidad analítica, pero recientemente se ha propuesto una novedosa interpretación geométrica y física relacionada con la evolución del hilo de torbellino. El objetivo de este artículo es poner en relieve la importancia de este objeto clásico relatando su interesante desarrollo histórico para luego presentar y explicar esta nueva y fascinante faceta.

Sin duda alguna, la función no diferenciable de Riemann

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(n^2x)}{n^2} \quad (1)$$

es una de las más célebres funciones continuas que no son derivables en casi ningún punto. Fue propuesta en la década de 1860 como un ejemplo analíticamente patológico que dejó en evidencia las convicciones de la comunidad matemática de la época, por lo que no es de extrañar que haya sido estudiada, sobre todo, desde un punto de vista analítico. A pesar de los esfuerzos realizados, sus propiedades de derivabilidad no se conocieron con precisión hasta 1970. Se esperaba que la función no fuera derivable en ningún punto y, sin embargo, se demostró que la función sí que tiene derivada en ciertos puntos racionales, y solo en ellos. Así pues, la función es no diferenciable *tan solo* en casi todo punto.

Después, se profundizó en cuestiones de regularidad más finas como en determinar la regularidad Hölder, e incluso se publicaron unos pocos resultados de naturaleza geométrica sobre su grafo. Pero en 2014, De la Hoz y Vega [20] mostraron una conexión directa con un experimento físico relacionado con la evolución de ciertos hilos de torbellino, donde la función puede ser considerada como la trayectoria de una partícula, y por tanto como un objeto intrínsecamente físico y geométrico.

Basándome en mi tesis doctoral [26], me gustaría ofrecer en este artículo una perspectiva global del trabajo realizado en esta novedosa dirección, completa pero sin entrar en demasiados detalles técnicos. Empezaremos con los orígenes de la función y los trabajos analíticos realizados, así como los primeros resultados geométricos obtenidos. Después presentaremos el contexto físico en el que la función de

Riemann aparece como una trayectoria y propondremos y responderemos (a veces parcialmente) varias preguntas geométricas que surgen de manera natural. Por último, comentaremos brevemente la bonita relación que tiene el experimento de los hilos de torbellino con el fenómeno óptico denominado efecto de Talbot.

1. LA HISTORIA DE LA FUNCIÓN

1.1. ORÍGENES

Se podría decir que la historia de la función no diferenciable de Riemann comienza con una pregunta fácil de formular:

¿tienen las funciones continuas derivada?

Hoy en día, todo el que haya recibido su primer curso de cálculo diferencial conoce la respuesta o, al menos, sospecha que la respuesta no es «evidentemente, sí». Pero la cuestión no era tan simple a comienzos del siglo XIX; no porque la derivada no estuviera desarrollada, sino más bien porque las funciones consideradas eran siempre suficientemente regulares y el concepto de continuidad no estaba todavía firmemente establecido. Un ejemplo de la confusión que imperaba es el célebre trabajo de Ampère [1] que se cita habitualmente (y no siempre de manera correcta¹), en el que el francés proclamó que toda función posee derivada. Escribió lo siguiente:

Me propongo demostrar primero que la función de x y de i ,

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

que representa la relación entre la diferencia de dos valores x y $x+i$ de una variable y la diferencia de los dos valores correspondientes de cualquiera de sus funciones $f(x)$, no se puede anular ni hacerse infinita para todos los valores de x cuando tomamos $i=0$, suposición de la cual la expresión anterior se convierte en $0/0$. Resultará necesariamente de esta demostración que

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

se reduce, cuando $i=0$, a una función de x .

Por supuesto, la prueba que dio no funciona para funciones continuas, dado que se basa en propiedades que una función *debería* cumplir, pero que las funciones continuas no tienen por qué cumplir. Sin embargo, parece que esta fue la idea dominante

¹No hay duda de que el resultado de Ampère es incorrecto. Sin embargo, debemos tener en cuenta que el concepto de función de su época era más reducido que el de hoy en día. Es más, la definición de continuidad no llegaría hasta un par de décadas más tarde. En esta línea, se sugiere en [49] que cuando Ampère se refirió a toda función, realmente se refería a todas las funciones que se consideraban en aquella época. Si damos por buena la hipótesis de que seguía las enseñanzas de Lagrange, estas funciones corresponderían a lo que hoy llamamos funciones analíticas, que por supuesto tienen derivada, y esta se puede calcular con la fórmula que da Ampère.

durante buena parte del siglo. Por ejemplo, Darboux [18] contó en 1875 que «... estos intentos distaban, sin duda, de ser satisfactorios; pero, repito, nadie había dudado de la existencia de la derivada para las funciones continuas». En 1872, en la misma línea, Weierstrass dijo en su exposición en la Academia de Ciencias en Berlín que «hasta ahora, se ha asumido generalmente que una función bien definida y continua de una variable real siempre tiene primera derivada, cuyo valor puede volverse indeterminado o infinito en puntos individuales. Hasta donde yo sé, ni Gauss, ni Cauchy, ni Dirichlet [...] eran de otra opinión». Y a raíz de esto, iluminó a la audiencia con un contraejemplo que se volvería célebre:

Solo Riemann dijo con claridad (en 1861 o quizás antes) que esto era inadmisibles y que, por ejemplo, no es cierto para la función representada por la serie infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2 x)}{n^2}. \quad (2)$$

Desafortunadamente, Riemann no publicó la prueba de este hecho y tampoco parece haber sobrevivido en papel o por transmisión oral [...]. Me parece difícil probar que la serie trigonométrica especificada es una de esas funciones [que no tienen derivada para ningún punto de su argumento], pero se pueden construir fácilmente funciones de argumento real x de tal manera que se puede demostrar de forma muy simple que no tienen derivada para ningún valor de x .

La mención de Weierstrass a la función (2) es la primera vez que se propuso públicamente una función continua en todo punto pero no diferenciable en ninguno. Sin embargo, ante la imposibilidad de demostrarlo, se vio en la tesitura de buscar una alternativa para dar un contraejemplo demostrable, y propuso la famosa

$$W_{a,b}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi), \quad 0 < b < 1, \quad a \text{ un entero impar}, \quad ab > 1 + \frac{3}{2} \pi, \quad (3)$$

que conocemos como función de Weierstrass y que fue publicada por Du Bois-Reymond [22] en 1875. Es, sin duda, la primera función continua y no diferenciable en ningún punto que fue publicada con una prueba rigurosa, y abrió el camino a otros autores que dieron numerosos contraejemplos de distintos tipos en los años siguientes.

Cabe mencionar que, en 1920, la Academia Checa de Ciencias descubrió trabajos inéditos de Bolzano que publicó en 1930 y en cuyo primer volumen *Functionenlehre* [9], fechado en 1834, aparece una sucesión de funciones lineales a trozos y definidas geoméricamente que convergen a una función que no tiene derivada en un conjunto denso de puntos. Aunque la demostración dada por Bolzano es incompleta, se demostró que el ejemplo es correcto cuando fue redescubierto. Por lo que sabemos hasta la fecha, este es el ejemplo más antiguo del que disponemos. Por otro lado, en 1890 se descubrió un manuscrito de C ellerier [12], fallecido en el año anterior, en el que demostró la no derivabilidad de una función muy parecida a la de Weierstrass.

La nota no tiene fecha, y aunque el papel se había amarilleado por el paso del tiempo, fue imposible fecharlo con exactitud. Es difícil saber si es anterior al trabajo de Weierstrass, pero por la manera en la que está escrito, hay pocas dudas de que lo hizo de manera independiente.

Todos estos descubrimientos de finales del siglo XIX hicieron temblar los cimientos del análisis. No estuvieron exentos de críticas, y fueron tachados de antinaturales, artificiales e innecesarios. Entre otros, Poincaré [57], en su ensayo donde alertaba de la pérdida de la intuición en la enseñanza de las matemáticas, escribió: «Vimos entonces surgir una multitud de funciones extrañas que parecían esforzarse en asemejarse lo menos posible a las honradas funciones que sirven para algo. [...] Antes, cuando inventábamos una función, lo hacíamos con un objetivo práctico; ahora, las inventamos a propósito para poner en evidencia los razonamientos de nuestros padres, y nunca sacaremos nada más que eso de ellas».

En cualquier caso, quedó claro que el rigor de las matemáticas estaba en jaque. La opción de lograr resultados confusos como el de Ampère, que afirmaba sin más detalles que toda función es derivable, se volvió intolerable. Ante las críticas como las de Poincaré se podía argumentar, como escribió Cellerier en su manuscrito, que «[...] el estudio de estos casos especiales persigue un solo objetivo: discernir los principios que son esenciales a todas las funciones de los que no lo son [...]». Debido a ello, esas críticas perdieron apoyo con la llegada del siglo XX, más aun cuando se descubrieron fenómenos naturales extremadamente irregulares como el movimiento browniano. Perrin, premio Nobel de física en 1926, afirmó en [56] que «en principio, estos casos parecen meros ejercicios intelectuales, ingeniosos sin duda, pero en definitiva artificiales y estériles [...] [y que] la naturaleza no presenta esas complicaciones, ni siquiera las sugiere. Sin embargo, es lo contrario lo que es cierto, y la lógica de los matemáticos les ha mantenido más cerca de lo real que las representaciones prácticas empleadas por los físicos».

De este modo, las funciones continuas no diferenciables y objetos de irregularidad similar fueron aceptados progresivamente, lo que no evitó que la función propuesta por Weierstrass continuara rodeada de misterio. Su fama aumentó, y por razones obvias tomó el nombre de *función no diferenciable de Riemann*. Pero curiosamente, visto lo visto y desde un punto de vista histórico, podemos concluir que la función de Riemann no es el primer ejemplo de una función continua pero no diferenciable y que tampoco es no diferenciable en todo punto. Es más, según [11], no está para nada claro que la función fuera propuesta por Riemann, dado que «no se encuentran registros de que el llamado ejemplo de Riemann estuviera relacionado con Riemann ni con ninguno de sus estudiantes». Por tanto, siendo estrictos, el único nombre que correspondería a esta función sería precisamente el de *función*. Por supuesto, no cometeremos semejante injusticia con un elemento que merece ser recordado por su complejidad, o al menos por haber sido la mano que abrió la caja de Pandora de los *monstruos*, que es el nombre que se da habitualmente a este tipo de funciones. Un monstruo imperfecto y suficientemente amigable que, incluso 150 años después de su creación, sigue aportando material suficiente para escribir artículos y tesis doctorales.

1.2. ESTUDIO ANALÍTICO

Como hemos dicho, durante gran parte del siglo XIX se afirmó que las funciones continuas debían tener necesariamente derivada, excepto quizás en algunos puntos aislados. La función de Riemann fue la primera propuesta que perseguía el objetivo de corregir esta creencia, que efectivamente se demostró incorrecta gracias a contraejemplos alternativos como las funciones de Weierstrass (3) y muchos otros que vendrían después.

Sin embargo, los primeros resultados rigurosos sobre la función de Riemann no llegaron hasta 1916, cuando Hardy demostró en [36] que no era diferenciable en puntos πx en caso de que x fuera irracional o si $x = (2m+1)/(2n)$ o $x = 2m/(4n+1)$ para $m, n \in \mathbb{Z}$. De esta manera, los únicos puntos que quedaban sin respuesta eran πx con x racional del tipo $(2m+1)/(2n+1)$ o $2m/(4m+3)$. Este resultado, a pesar de ser parcial, bastaba para afirmar que la función de Riemann no era diferenciable en casi ningún punto. La caracterización completa llegó medio siglo después de manos de Gerver con sus artículos [33] y [34] en 1970 y 1971 respectivamente, donde demostró que la función tiene derivada igual a $-1/2$ en los puntos πx con $x = (2m+1)/(2n+1)$, y que en el resto no tiene derivada, zanjando así la cuestión. En los años siguientes, varios autores dieron pruebas alternativas y simplificadas [39, 48, 61]. Para una breve descripción de la evolución de este problema, véanse [50, 60].

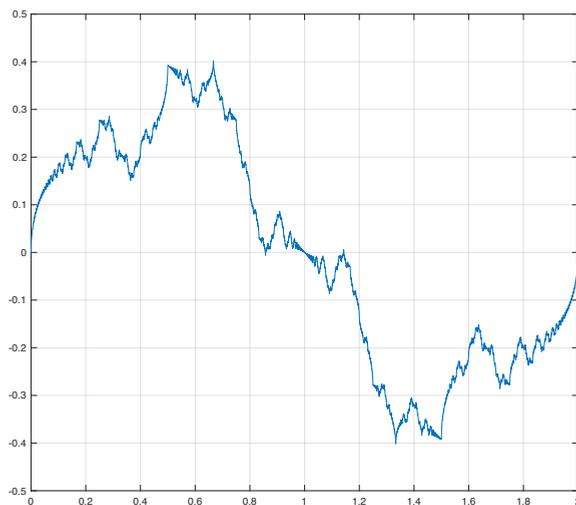


Figura 1: El grafo de la función no diferenciable de Riemann $R(\pi x)$ para $x \in [0, 2]$.

Posteriormente, usando la transformada de ondículas, Holschneider y Tchamitchian [38] demostraron que hay infinitos puntos en los que la función de Riemann es derivable por la izquierda pero no por la derecha, y viceversa. Este hecho se representa en el grafo de la función mediante cúspides que se pueden apreciar en la figura 1. Incluso dieron el siguiente paso natural al preguntarse si se podía decir algo sobre la regularidad Hölder en aquellos puntos donde la derivada no existe.

Tanto en [38] como en trabajos posteriores, ha sido habitual trabajar con generalizaciones complejas de la función de Riemann como

$$\phi_D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi n^2 t}}{i\pi n^2}, \quad (4)$$

que satisface $\operatorname{Re} \phi_D(t) = R(\pi t)/\pi$. Duistermaat la usó en [23] para mejorar la descripción de la función de Riemann alrededor de puntos particulares. Para ello, calculó el comportamiento asintótico de ϕ_D , es decir, una expresión precisa para $\phi_D(x_0 + h) - \phi_D(x_0)$, para puntos x_0 racionales y para valores pequeños de h , lo que ayudó a describir propiedades del grafo de R . En aquellos años ya existía la capacidad de generar imágenes por ordenador como la de la figura 1, y Duistermaat pudo detectar la existencia de la derivada en algunos racionales con denominador pequeño (ver el punto $x = 1$ del grafo de la figura 1, donde parece aproximarse a una recta). Pero lo que más le debió de llamar la atención fue la repetición de patrones en escalas cada vez más pequeñas tanto en el grafo de R como en la imagen de ϕ_D que se muestra en la figura 2. Gracias a una ecuación funcional aproximada de ϕ_D , fue capaz de explicar este fenómeno, y, utilizando la función θ de Jacobi y su relación con el grupo modular, dedujo el comportamiento asintótico arriba mencionado.

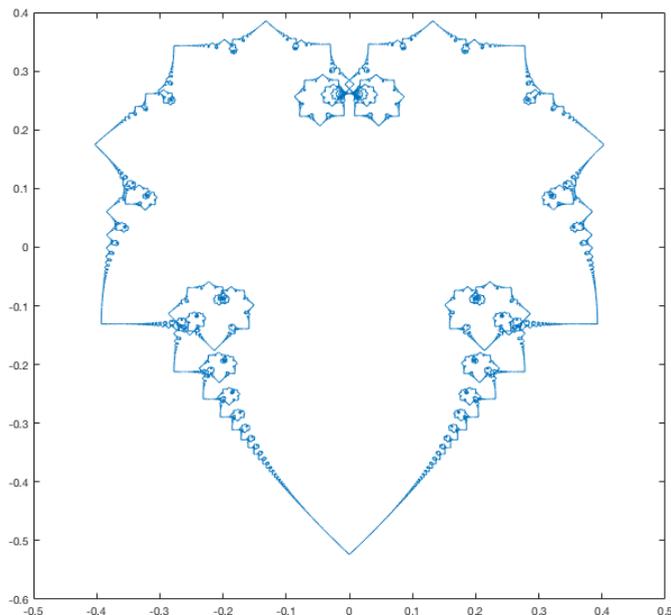


Figura 2: La imagen de ϕ_D , definida en (4), en el plano complejo.

Uniendo las ideas de Duistermaat y las técnicas de ondículas, Jaffard y Meyer en [41], y sobre todo Jaffard en [40], estudiaron profundamente la regularidad Hölder de la función. Si llamamos $\alpha(x)$ a la regularidad Hölder suprema de R en el punto x ,

entonces demostró que $\alpha(x) \in [1/2, 3/4]$ para todo x donde R no es derivable. Para ello, se valió de las propiedades diofánticas de los irracionales: mostró que dado un irracional ρ , entonces $\alpha(\rho) = 1/2 + 1/(2\tau(\rho))$, donde $\tau(\rho)$ es el supremo de los valores τ que cumplen $|\rho - p_n/q_n| < q_n^{-\tau}$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$, con p_n/q_n los convergentes de la fracción continua de ρ . Uniendo este resultado con el teorema clásico de Jarnik-Besicovitch (ver, por ejemplo, [30, teorema 10.3]), demostró que el espectro de singularidades $d(\alpha)$, es decir, la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos x donde $\alpha(x) = \alpha$, es

$$d(\alpha) = 4\alpha - 2, \quad \text{para } \alpha \in [1/2, 3/4]. \tag{5}$$

Mostró, pues, que la función de Riemann es un multifractal, nombre dado a las funciones con un espectro de singularidades no trivial. Es más, consiguió probar que el formalismo multifractal propuesto por Frisch y Parisi en [32] se cumple para la función de Riemann, estableciendo así una conexión con el estudio de la turbulencia.

A partir de estos resultados para la función de Riemann, se han tratado generalizaciones como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i P(n)x}}{n^\alpha}, \quad \alpha > 1, \tag{6}$$

donde P es un polinomio en general [13, 14, 15], e incluso funciones que se generan a partir de formas modulares de la misma manera que R se puede generar a partir de la función θ de Jacobi [55]. Otro tipo de generalización que se ha tratado es

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e^{i\pi n^2 t + 2\pi i n x}}{\pi i n^2}, \tag{7}$$

que es una solución a la ecuación libre de Schrödinger y de donde esencialmente se recupera φ_D cuando $x = 0$. Se han estudiado propiedades de regularidad de esta función en trabajos como [43, 51, 52, 53, 54, 58]. A veces, se congela el tiempo para estudiar la función en espacio, en líneas rectas horizontales de \mathbb{R}^2 , mientras que en otras ocasiones se fija el espacio para analizar la función verticalmente. Incluso se ha estudiado el comportamiento en líneas oblicuas, motivado por los trabajos de Berry y Klein [6, 8]. Estos mismos resultados se han generalizado a soluciones de EDP dispersivas [16, 28, 29].

1.3. PRIMEROS RESULTADOS GEOMÉTRICOS

Hasta hace poco, la mayor parte del estudio de la función no diferenciable de Riemann ha tratado sobre sus propiedades analíticas. Sin embargo, ya hemos visto que algunos de ellos conectan con la forma de su grafo, por lo que unos pocos resultados geométricos han aparecido como acompañantes. Puede que influidos por ello, algunos autores han tratado de conseguir este tipo de resultados directamente. Por ejemplo, en [13, 14] se calculó la dimensión de Minkowski de los grafos de las partes reales e imaginarias de (6) con $P(n) = n^k$ para $k \in \mathbb{N}$. En particular, Chamizo

y Córdoba demostraron en [13] que la dimensión de Minkowski del grafo de la función de Riemann (1) es $5/4$.

En cuanto a la generalización (7), en [6, 8] se conjeturó que las curvas que se obtienen restringiendo los grafos de sus partes real e imaginaria a líneas rectas de \mathbb{R}^2 tendrían una dimensión fractal que dependería de la dirección de la recta considerada. Las referencias citadas al final de la anterior sección tratan este problema.

Es innegable que el estudio de las propiedades geométricas de estos grafos es una cuestión de interés, además de profunda. Pero disfracémonos de Poincaré durante un párrafo: ¿hay alguna razón, aparte de la curiosidad matemática, por la que deberíamos estudiar estas funciones desde una perspectiva geométrica? Voy a intentar convencer al lector de que la hay, al menos en el caso de la función de Riemann, ya que juega el papel de una trayectoria temporal en la evolución de ciertos hilos de torbellino gobernados por el flujo binormal. Así, uno bien podría definir la función de Riemann como esta trayectoria, de una manera puramente geométrica, y después tratar de averiguar una expresión analítica para ella. El objetivo de la próxima sección es, precisamente, explicar este punto de vista.

2. UN PAPEL INESPERADO DE LA MANO DE LOS HILOS DE TORBELLINO

Como decimos, se descubrió hace poco que la función no diferenciable de Riemann está íntimamente relacionada con la evolución de hilos de torbellino. Más concretamente, De la Hoz y Vega mostraron en [20] que se asemeja mucho a la trayectoria de cualquier esquina de un hilo plano que tenga forma de polígono regular y que siga el flujo binormal. Desde luego, estaríamos ante una justificación espléndida para hacer un estudio geométrico de la función. Pero antes pasemos a explicar el experimento físico en cuestión.

2.1. EL FLUJO BINORMAL Y LA ECUACIÓN DEL HILO DE TORBELLINO

Pensemos en un fluido que presenta un vórtice, es decir, una zona donde se comporta de manera circular o espiral y, además, turbulenta. Para fijar ideas, pensemos en un torbellino, en un remolino o en la estela de un avión. En estas y en otras muchas ocasiones, podemos identificar el centro del vórtice a lo largo de una curva, alrededor de la cual gira el fluido en cuestión. A estas curvas se les llama hilo de torbellino o hilo de vórtice. Técnicamente hablando, el hilo de torbellino es el lugar donde el fluido tiene rotacional nulo. La ecuación del hilo de torbellino (*vortex filament equation* en inglés, a veces traducido al castellano como *ecuación de filamentos de vórtice*) no es más que un modelo para la dinámica de estos hilos que fue propuesta en 1906 por Da Rios [17] a partir de las ecuaciones de Euler. Si suponemos que el hilo se puede parametrizar por la curva tridimensional $\mathbf{X} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con la longitud de arco s y el tiempo t , se sugiere que su evolución obedece a la ecuación

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{X}_s \times \mathbf{X}_{ss}, \quad (8)$$

que por supuesto necesita un dato inicial $\mathbf{X}(s, 0)$. Alternativamente, y haciendo uso de las fórmulas de Frenet-Serret que recordamos aquí,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_s \\ \mathbf{N}_s \\ \mathbf{B}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{X}_s$ es el vector tangente, $\mathbf{N} = \mathbf{T}_s / \|\mathbf{T}_s\|$ es el normal, $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ el binormal, $\kappa = \kappa(s, t)$ es la curvatura y $\tau = \tau(s, t)$ la torsión, se ve fácilmente que

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{T} \times \mathbf{T}_s = \mathbf{T} \times \kappa \mathbf{N} = \kappa \mathbf{B}.$$

Por lo tanto, la curva evoluciona en la dirección indicada por su propio vector binormal y con una velocidad dada por su curvatura. Por eso, al flujo que evoluciona según la ecuación del hilo de torbellino se le suele denominar flujo binormal (en inglés, *binormal flow*), y la ecuación se escribe como

$$\mathbf{X}_t = \kappa \mathbf{B}. \tag{9}$$

Nos vamos a centrar en la evolución de datos iniciales con esquinas, que provienen de casos prácticos, y también surgen de manera natural en un contexto matemático. En [35] se analizaron las soluciones autosemejantes de la ecuación y se vio que aunque son regulares para $t > 0$, desarrollan una singularidad en forma de esquina en $t = 0$, generando una V formada por dos líneas rectas. Este dato inicial se corresponde, por ejemplo, al comportamiento del aire cuando lo atraviesa un ala delta [19]. También puede surgir cuando las dos estelas paralelas de un avión se reconectan y generan dos hilos en forma de V que evolucionan de acuerdo con lo predicho por la ecuación, o en el estudio del helio superfluido [59]. Más generalmente, también se estudiaron líneas poligonales y de esquinas de curvas no necesariamente rectas en [2, 3].

Sin embargo, a nosotros nos interesa la evolución de curvas cerradas. No es ninguna situación exótica, basta con pensar en los aros de humo que algunos fumadores habilidosos son capaces de hacer. Todos sabemos que el aro se traslada manteniendo su forma, al menos aproximadamente, hasta que finalmente se dispersa. Pero podríamos pensar en una situación ideal, sin intromisiones del movimiento del aire, donde un aro perfecto generado por un cañón de humo se trasladaría manteniendo exactamente su forma indefinidamente. Nada extraño por ahora. Pero ¿qué ocurriría si el cañón fuera triangular en vez de circular? ¿Mantendría el *aro* triangular su forma? No es una cuestión baladí, ya que está relacionada con el comportamiento de fluidos generados por boquillas poligonales. En [44] publicaron un vídeo muy recomendable de un experimento con un hilo con forma de trébol; aunque no es un triángulo, la evolución es bastante representativa de lo que podría ocurrir. Lo que queda claro en el mencionado vídeo es que la dinámica es completamente diferente a la del aro circular.

Siguiendo este camino, De la Hoz y Vega estudiaron [20] la evolución de una curva plana con forma de polígono regular de $M \in \mathbb{N}$ lados. En el caso de la circunferencia, la curvatura y el vector binormal son constantes, por lo que no es de extrañar que

la ecuación (9) indique la simple traslación del aro en la dirección perpendicular al plano donde yace. Pero el caso de un polígono es bien distinto: se demuestra que la evolución es periódica, y que en todo múltiplo racional p/q del periodo la curva toma una forma poligonal con una cantidad de lados proporcional a q . Los cálculos no son demasiado complicados y los comentaremos en la subsección 2.4. Este fenómeno se asemeja sorprendentemente al efecto de Talbot que trataremos brevemente en la subsección 2.5.

Esta evolución ya había sido sugerida en [42] mediante una simulación numérica en el caso de un hilo cuadrado, pero De la Hoz y Vega fueron más allá y realizaron simulaciones numéricas sistemáticamente, y en particular dibujaron la curva $\mathbf{X}_M(0, t)$, que no es más que la trayectoria de una esquina del polígono inicial de M lados. Esta trayectoria se muestra en la figura 3 en los casos $M = 3, 4, 5$.

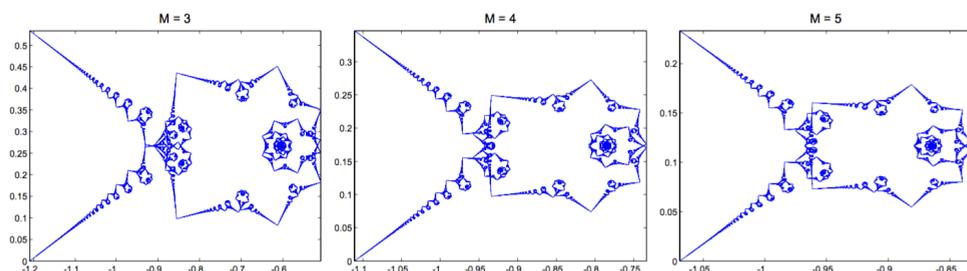


Figura 3: Estamos ante [20, figura 2]. Estos tres dibujos son simulaciones numéricas de la imagen de $\mathbf{X}_M(0, t)$ para $M = 3, 4, 5$. En realidad, son trayectorias en el espacio tridimensional que resultan ser planas, por lo que han sido proyectadas al plano complejo.

Si se aplica una corrección lineal en la dirección perpendicular al plano original donde está el polígono inicial (la dirección vertical en la figura 3), la curva resultante se asemeja muchísimo a la curva ϕ_D definida en (4). Es más, las diferencias se vuelven imperceptibles según aumenta el número de lados M . Para ilustrarlo, en la figura 4 reproducimos la comparación entre la imagen de ϕ_D de la figura 2 y las trayectorias para $M = 3, 10$. En el vídeo <https://youtu.be/1eKT9deeZYA> de [46] se muestra la evolución del triángulo ($M = 3$) y la correspondiente trayectoria.

Así, la función de Riemann aparece como la trayectoria de las esquinas de los polígonos regulares. Sin embargo, no lo hace en su versión ϕ_D , sino que hace falta aplicarle un desplazamiento vertical como en la figura 3. De hecho, como veremos más adelante, la función que buscamos es

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-4\pi^2 ik^2 t} - 1}{-4\pi^2 k^2}, \quad (10)$$

donde interpretamos el término $k = 0$ como it , y que cumple

$$\phi(t) = -\frac{i}{2\pi} \phi_D(-4\pi t) + it + \frac{1}{12}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

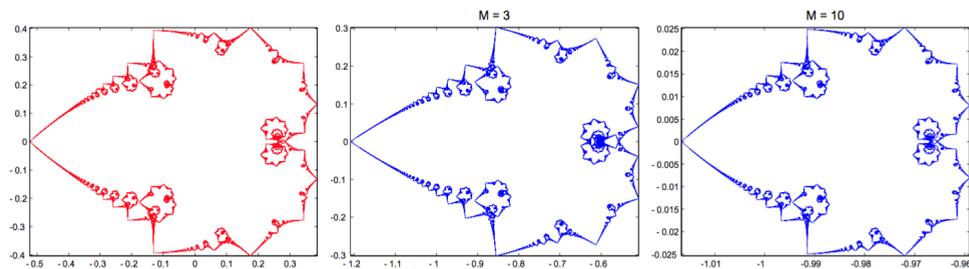


Figura 4: Esta es [20, figura 3]. En la izquierda, la imagen de $i\phi_D$, véase la figura 2 para comparar. En el centro y en la derecha, $\mathbf{X}_M(0,t) - it$, donde $\mathbf{X}_M(0,t)$ es la simulación numérica de la trayectoria de una esquina del polígono inicial de M lados, para $M = 3$ y $M = 10$ respectivamente.

Precisamente, ese término it se corresponde con la corrección vertical mencionada. El parecido entre la imagen de ϕ , que se muestra en la figura 5, y las trayectorias numéricas de la figura 3 nos hace pensar que tiene más sentido hablar de ϕ como la función de Riemann, al menos en el ámbito geométrico, que de su contraparte analítica ϕ_D .

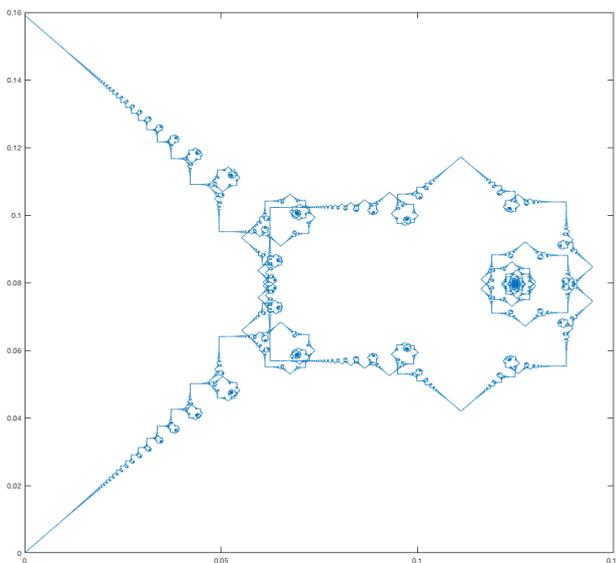


Figura 5: La imagen de ϕ en el intervalo $[0, 1/(2\pi)]$. Si la interpretamos como una curva paramétrica, se asemeja a las trayectorias de las esquinas de los hilos poligonales de la figura 3.

Llegados a este punto, la aparición de la función de Riemann y la definición de ϕ podrían parecer un poco misteriosas. Aclaremos en la siguiente subsección estas cuestiones.

2.2. ¿PERO DE DÓNDE SALE LA FUNCIÓN DE RIEMANN?

En esta subsección veremos cómo podemos resolver el problema de la evolución de los hilos poligonales y cómo aparece la función de Riemann ϕ (10).

Comencemos mencionando el resultado de Hasimoto [37] que conecta la ecuación del hilo de torbellino (8) con la ecuación de Schrödinger. Dadas la curvatura $\kappa(s, t)$ y la torsión $\tau(s, t)$ de la curva \mathbf{X} que satisface la ecuación, definamos la función

$$\Psi(s, t) = \kappa(s, t) e^{i \int_0^s \tau(\sigma, t) d\sigma}, \quad (12)$$

llamada *filament function*. Hasimoto demostró que esta nueva función satisface la ecuación de Schrödinger no lineal

$$\Psi_t = i\Psi_{ss} + i \frac{\Psi}{2} \left(|\Psi|^2 + A(t) \right), \quad (13)$$

donde $A(t)$ es una función real del tiempo. Si fuéramos capaces de adaptar el dato inicial $\mathbf{X}(s, 0)$ y resolver la ecuación (13), tendríamos a nuestra disposición la curvatura y la torsión de la curva, y entonces, suponiendo que la curva es suficientemente regular y que la curvatura no se anula, podríamos calcular el marco de Frenet $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ y, finalmente, la propia curva \mathbf{X} integrando el vector tangente.

Por lo tanto, el primer paso es adaptar nuestro polígono inicial a Ψ . Como es plano, tiene torsión nula y $\Psi_M(s, 0) = \kappa_M(s, 0)$. Ahora bien, la curvatura de un polígono regular es nula en todo punto excepto en las esquinas, y en ellas el cambio de dirección es brusco, lo que sugiere una curvatura puntual infinita. Siendo $s \in [0, 2\pi]$ la longitud de arco, distribuir M deltas de Dirac uniformemente podría ser una buena opción. Dándoles los coeficientes adecuados para respetar el teorema de Gauss-Bonnet y extendiéndolo periódicamente a la recta real, el dato que se propone es

$$\Psi_M(s, 0) = \kappa_M(s, 0) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta \left(s - \frac{2\pi}{M} k \right). \quad (14)$$

Este dato, aunque razonable, es extremadamente irregular y podría generar problemas en el triedro de Frenet-Serret debido a que la curvatura es nula en casi todo punto y, por lo tanto, los vectores normal y binormal no están bien definidos. Esto se puede arreglar utilizando el marco paralelo (*parallel frame*), que sustituye a $\{\mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ como base del plano normal de la curva, como se mostró en [45] y se explica en [4].

En cualquier caso, el primer objetivo pasaría a ser resolver la ecuación (13) con el dato (14). En una primera aproximación al problema, simplifiquémoslo eliminando la parte no lineal de la ecuación para quedarnos con la ecuación libre de Schrödinger,

$$\psi_t(s, t) = i \psi_{ss}(s, t), \quad (15)$$

y mantengamos el dato. Teniendo en cuenta que la transformada de Fourier de $\delta(x - k)$ es $e^{-2\pi i k x}$, es fácil de ver que la solución correspondiente es

$$\psi_M(s, t) = e^{it\partial_s^2} \left(\frac{2\pi}{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta \left(\cdot - \frac{2\pi}{M} k \right) \right) (s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iMks - iM^2k^2t}. \quad (16)$$

Para obtener \mathbf{X}_M , deberíamos primero integrar en s el sistema de Frenet-Serret para lograr el vector tangente, y luego volver a integrarlo en s . Filosóficamente hablando, estaríamos integrando dos veces en s . Ahora bien, la ecuación libre (15) indica que integrar dos veces en s es como integrar una vez en t , por lo que podríamos pensar que

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_M(0, t) &\approx i \int_0^t \psi_M(0, \tau) d\tau = i \int_0^t \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-iM^2 k^2 \tau} d\tau \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-iM^2 k^2 t} - 1}{-M^2 k^2} = \frac{4\pi^2}{M^2} \phi\left(\frac{M^2}{4\pi^2} t\right), \end{aligned} \tag{17}$$

donde aparece la versión de la función de Riemann ϕ que hemos propuesto antes en (10).

Este argumento es brusco y rudimentario, pero sin embargo las simulaciones numéricas de [20], y en particular las figuras 3 y 4, muestran que los tiros no van tan mal dirigidos; es más, cuanto más grande es M , más cerca están de dar en la diana. En [21], se intentó fundamentar esto midiendo numéricamente los coeficientes de Fourier de $\mathbf{X}_M(0, t) - it$, a los que llamamos a_n^M , y se observó que

$$na_n^M \approx \begin{cases} 1, & \text{cuando } n \text{ es un cuadrado,} \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \tag{18}$$

mostrando así que se asemeja mucho a ϕ_D (véase [21, figura 11]).

Con todo lo arriba afirmado, tanto con las figuras 3 y 4 como con (18), no es extravagante conjeturar algún tipo de convergencia de las trayectorias $\mathbf{X}_M(0, t)$ a ϕ , quizás con algún reescalamiento que dependa de M como sugiere (17). Pues bien, se ha logrado un gran avance en esta dirección en un reciente trabajo de Banica y Vega [4], de donde se desprende el siguiente resultado:

TEOREMA 2.1 (páginas 7–9 y teorema 1.1 de [4]). *Para cada $n \in \mathbb{N}$, parametricemos el polígono regular de $2n + 1$ lados mediante una curva $\mathbf{X}_n(s, 0)$ que le dé una sola vuelta y que después se escape al infinito en dos semirrectas que extienden dos de sus lados. Es decir,*

- $\mathbf{X}_n(s, 0)$ da una vuelta al polígono cuando $-n \leq s \leq n$, con las esquinas situadas en los enteros $s = -n, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$;
- cuando $s > n$, la parametrización es una semirrecta que extiende uno de los lados del polígono, y lo mismo ocurre cuando $s < -n$.

Entonces, existe una sucesión de soluciones $\{\mathbf{X}_n(s, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la ecuación del hilo de torbellino con datos iniciales $\mathbf{X}_n(s, 0)$ que cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{X}_n(0, t) = (0, \operatorname{Re} \phi(t), \operatorname{Im} \phi(t));$$

es decir, la trayectoria de la esquina situada en $s = 0$ tiende a la función no diferenciable de Riemann.

Tal como lo hemos enunciado, el dato inicial $\mathbf{X}_n(s, 0)$ del teorema es la parametrización que *da una vuelta* al polígono y después *se escapa* al infinito, tanto cuando $s > n$ como cuando $s < -n$. El teorema es también válido para parametrizaciones que dan una cantidad finita y fija de vueltas a los polígonos. Sin embargo, aún no se conoce el resultado para la parametrización que da infinitas vueltas y que *no escapa* al infinito, que corresponde precisamente con el dato (14). En cualquier caso, este resultado muestra que la función de Riemann en su versión ϕ se puede construir como una trayectoria límite de hilos de torbellino, y que por lo tanto tiene una estructura geométrica intrínseca, dado que uno podría definirla como el lugar geométrico indicado por las trayectorias de las esquinas de los polígonos regulares.

2.3. NUEVOS RESULTADOS DE PERFIL GEOMÉTRICO

El teorema 2.1 es una gran razón para llevar a cabo un estudio sistemático de propiedades geométricas de la imagen de ϕ que se muestra en la figura 5, dando así continuidad a los resultados de Duistermaat [23] y de Chamizo y Córdoba [13].

2.3.1. DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

Vista la complejidad de las imágenes mostradas anteriormente, la pregunta es casi automática: ¿son fractales? ¿Es la función no diferenciable de Riemann un fractal? En vista de su irregularidad, tiene toda la pinta de serlo. Aunque no haya un consenso amplio para la definición de un fractal, podemos empezar por una de las más populares: un fractal es aquel que tiene una dimensión no entera. ¿Podemos calcular la dimensión de los subconjuntos de \mathbb{R}^2 mostrados en las figuras 1, 2 o 5?

Chamizo y Córdoba se hicieron esa pregunta, y probaron que la dimensión de Miskowski del grafo de la función de Riemann original (1), es decir, del conjunto de la figura 1, es exactamente $5/4$. También calcularon la dimensión de otras muchas funciones del estilo de (6). Ahora bien, dado que el conjunto de naturaleza propiamente geométrica es $\phi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}$, ¿qué podemos decir sobre la dimensión de dicho conjunto como subconjunto de $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$? En [25] respondí parcialmente a esa pregunta dando una cota superior de la dimensión de Hausdorff:

TEOREMA 2.2. *Sea ϕ la función no diferenciable de Riemann definida en (10). La dimensión de Hausdorff de su imagen satisface*

$$1 \leq \dim_{\mathcal{H}} \phi(\mathbb{R}) \leq 4/3.$$

Se podría objetar que este resultado aporta poco con respecto al de Chamizo y Córdoba porque que la dimensión de Hausdorff es siempre menor o igual que la dimensión de Minkowski, y dado que $5/4 < 4/3$, el resultado no sería novedoso. Pero ¡obsérvese que los conjuntos estudiados son muy distintos! No es lo mismo el grafo de una función $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que la imagen de una curva paramétrica $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$. En el caso del grafo, se tiene el control de la velocidad en la que la curva avanza en la abscisa, mientras que la curva paramétrica se mueve arbitrariamente en el plano. Una de las consecuencias inmediatas es que pueda haber autointersecciones, como ocurre con ϕ en la figura 5, y que por tanto la dimensión pueda ser mayor.

La prueba del teorema 2.2 es breve y no demasiado compleja, razón por la que he decidido incluir unas pinceladas aquí para el lector que esté familiarizado con la dimensión de Hausdorff. Quien no quiera entretenerse en cálculos, que como digo no son complicados, puede avanzar a la subsección 2.3.2. Esta demostración se basa en el desarrollo de fracciones continuas de los irracionales y en un conocimiento muy preciso del comportamiento de ϕ alrededor de los racionales, que originalmente fue calculado por Duistermaat [23]. Estas expresiones son demasiado largas para ser mostradas aquí al completo, pero quien esté interesado puede consultar el artículo de Duistermaat, o el mío propio [25], donde las calculé desde una perspectiva alternativa y, en mi opinión, más intuitiva.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2. Para empezar, démonos cuenta de que ϕ en (10) tiene un periodo $1/(2\pi)$, y que conviene medir el parámetro con respecto a este periodo, de tal manera que llamaremos racionales a los puntos $\frac{1}{2\pi} \frac{p}{q}$. Para simplificar la notación en este artículo, nos referiremos a estos números simplemente como p/q para indicar la fracción del periodo en la que nos situamos (pensemos en que reescalamos la variable $t \mapsto 2\pi t$).

Lo único que necesitaremos aquí es una versión muy simplificada del comportamiento asintótico de ϕ . Omitiendo constantes irrelevantes, de [23] o de [25] se desprende que se cumple

$$\phi(p/q + h) - \phi(p/q) = e_{p,q} \left(\frac{h^{1/2}}{q^{1/2}} + O\left(q^{3/2} h^{3/2}\right) \right), \quad \text{para } h < \frac{1}{q^2}, \quad (19)$$

para los racionales que tengan $q \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$, donde $e_{p,q}$ es una raíz octava de la unidad que depende del racional. Diremos, de paso, que de esta expresión se deduce que ϕ es $1/2$ -Hölder en estos racionales. En el resto de racionales, el primer término desaparece (¡son los puntos donde ϕ es diferenciable!). Como necesitamos cubrir el conjunto y estamos ante una curva paramétrica, comenzamos dando un cubrimiento del intervalo $(0, 1)$,

$$(0, 1) \setminus \mathbb{Q} \subset \bigcup_{\substack{1 \leq p < q \\ \text{mcd}(p,q)=1 \\ q \geq Q_0}} B\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{q^2}\right), \quad Q_0 \in \mathbb{N},$$

donde no nos preocupamos por los racionales porque forman un conjunto numerable y, por tanto, de dimensión de Hausdorff nula. Este cubrimiento indica que podemos cubrir todos los irracionales con bolas centradas en racionales (¡una cantidad contable!) y con radios $1/q^2$, y es consecuencia del desarrollo por fracciones continuas. Dado un irracional ρ , la sucesión infinita de aproximaciones por fracciones continuas p_n/q_n cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = +\infty \quad \text{y} \quad |\rho - p_n/q_n| < q_n^{-2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particular, como entran en el rango de validez de las asintóticas (19), tomando $h = \rho - p_n/q_n$ podemos hacer que $|\phi(\rho) - \phi(p_n/q_n)| \leq q_n^{-3/2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por

lo que tenemos un cubrimiento

$$\phi((0, 1) \setminus \mathbb{Q}) \subset \bigcup_{\substack{1 \leq p < q \\ \text{mcd}(p, q) = 1 \\ q \geq Q_0}} B\left(\phi\left(\frac{p}{q}\right), \frac{1}{q^{3/2}}\right), \quad Q_0 \in \mathbb{N}.$$

Dada una dimensión $d > 0$ para la medida de Hausdorff, y estableciendo $\delta = Q_0^{-3/2}$, el coste de este cubrimiento es fácil de estimar, y logramos

$$\mathcal{H}_\delta^d(\phi((0, 1))) \leq \sum_{\substack{1 \leq p < q \\ \text{mcd}(p, q) = 1 \\ q \geq Q_0}} \left(\text{diam } B\left(\phi\left(\frac{p}{q}\right), \frac{1}{q^{3/2}}\right)\right)^d = \sum_{q=Q_0}^{\infty} \frac{\varphi(q)}{q^{3d/2}},$$

donde $\varphi(q)$ es la función *totient* de Euler. Como $\varphi(q) \leq q$ es esencialmente la mejor cota que se puede dar aquí, logramos

$$\mathcal{H}^d(\phi((0, 1))) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^d(\phi((0, 1))) \leq \lim_{Q_0 \rightarrow \infty} \sum_{q=Q_0}^{\infty} \frac{1}{q^{3d/2-1}} = 0$$

siempre y cuando $3d/2 - 1 > 1$, o, lo que es lo mismo, cuando $d > 4/3$. Siendo la dimensión de Hausdorff el ínfimo de los valores de d para los cuales $\mathcal{H}^d = 0$, no queda más remedio que la dimensión de Hausdorff de $\phi((0, 1))$ sea como mucho $4/3$. Y la de $\phi(\mathbb{R})$ es igual que la de $\phi((0, 1))$ por periodicidad, ya que no es más que una unión numerable de copias de $\phi((0, 1))$. \square

Este teorema se puede generalizar al contexto del resultado multifractal de Jaffard sobre el espectro de singularidades de la función de Riemann (5). Recordemos que llamábamos $\alpha(x)$ a la regularidad de Hölder suprema de la función en el punto x , y que si definimos el conjunto $D_\alpha = \{x : \alpha(x) = \alpha\}$, entonces Jaffard [40] demostró que $d(\alpha) = \dim_{\mathcal{H}} D_\alpha = 4\alpha - 2$ para todo $\alpha \in [1/2, 3/4]$. Pues bien, ¿por qué no averiguar la dimensión de las imágenes de estos conjuntos D_α ?

TEOREMA 2.3. *Sea ϕ la función no diferenciable de Riemann (10) y $D_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \alpha_\phi(x) = \alpha\}$. Entonces,*

$$\dim_{\mathcal{H}} \phi(D_\alpha) \leq \dim_{\mathcal{H}} \phi\left(\bigcup_{\sigma \leq \alpha} D_\sigma\right) \leq \frac{4\alpha - 2}{\alpha}, \quad \alpha \in [1/2, 3/4].$$

De este resultado se recupera el teorema 2.2 tomando $\alpha = 3/4$. La demostración, que se puede consultar en el mismo artículo [25], sigue el mismo esquema que el anterior y no la expondremos aquí.

La pregunta evidente es si la dimensión de $\phi(\mathbb{R})$ es exactamente $4/3$. Visto lo ajustadas que son las estimaciones utilizadas, parece probable que así sea, pero no es más que una suposición. Averiguarlo es, sin duda, una cuestión a tratar en el futuro.

2.3.2. DERIVABILIDAD GEOMÉTRICA. ¿TIENE LA CURVA TANGENTES?

Como venimos diciendo, la función no diferenciable de Riemann ϕ describe la trayectoria de las esquinas de un hilo de torbellino poligonal y regular que evoluciona de acuerdo al flujo binormal. Sabemos, bien por experimentos [44] o por simulaciones numéricas [42], que el polígono se traslada en el espacio de manera periódica. Por lo tanto, tiene sentido hablar de su velocidad, que podríamos estimar midiendo la distancia recorrida en un periodo y dividiéndola por el propio periodo. Ahora bien, pensemos por un momento que el hilo estuviera formado por partículas. Entonces, la imagen de ϕ de la figura 5 representaría la trayectoria de una de esas partículas. Podríamos hablar de una especie de velocidad media de la partícula tomando su posición, midiéndola respecto al punto inicial y dividiéndola por el tiempo que ha necesitado para llegar hasta donde se encuentra. Pero ¿podemos hablar de la velocidad de esa partícula en cada momento? Es decir, si seleccionamos un tiempo y la posición que le corresponde, ¿podemos determinar la dirección y la velocidad a la que viaja esa partícula en ese instante? Y eso, ¿lo podemos hacer en cualquier punto? Estrictamente hablando, el hilo no está formado por partículas del fluido en cuestión, sino que es el lugar alrededor del cual el fluido gira. Pero, precisamente, las partículas sí que rotan alrededor él, por lo que averiguar la velocidad puntual del hilo es de interés.

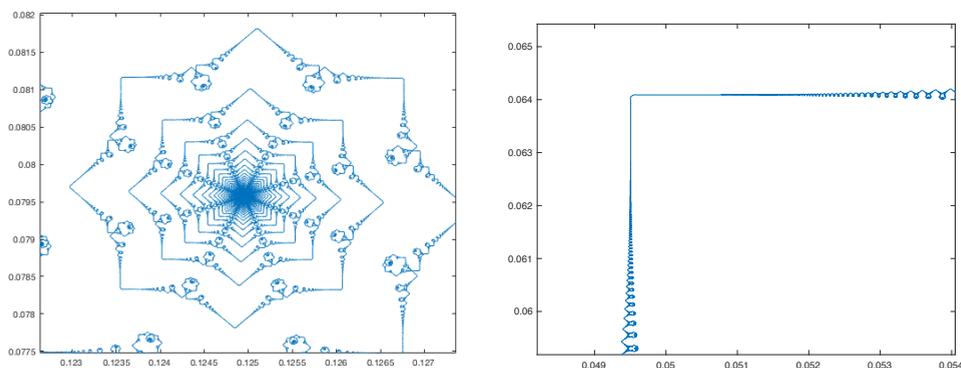
Matemáticamente hablando, ¿tiene la imagen de ϕ alguna tangente como subconjunto de \mathbb{R}^2 ? Esta es la cuestión que motivó mi artículo [27], cuyo principal resultado es el siguiente:

TEOREMA 2.4. *Sea ϕ la función no diferenciable de Riemann (10). Entonces, el conjunto $\phi(\mathbb{R})$ no tiene tangente en ningún punto.*

En los siguientes párrafos vamos a desgranar este resultado, que realmente es más exhaustivo que este simplificado teorema. Invito a quien esté interesado a consultar la versión completa en [27, teorema 2.14].

El teorema 2.4 tiene más envidia de lo que podría parecer a primera vista, dado que no hay una conexión clara entre la regularidad analítica de ϕ y las tangentes geométricas de $\phi(\mathbb{R})$. Primero, la vía de la geometría diferencial está restringida porque la función no tiene derivada en casi ningún punto. Uno podría pensar en que, en los puntos en los que sí que tiene derivada, la imagen $\phi(\mathbb{R})$ debería tener una tangente; sin embargo, los resultados de Gerver [33, 34] junto con (11) muestran que el valor de la derivada es 0, lo cual no nos da ninguna información. Es más, aumentando la figura 5 alrededor de uno de esos puntos (figura 6A), vemos que se forma una espiral, por lo que no puede haber ninguna tangente. Por otro lado, en el resto de racionales donde la función no tiene derivada, podríamos pensar que no existe ninguna tangente; en cambio, un aumento similar como el de la figura 6B muestra la existencia de dos tangentes laterales, que son perpendiculares y que por tanto no permiten la existencia de una sola tangente.

Por último, aunque ϕ no es diferenciable en los irracionales, a priori no podemos descartar una situación como la de la figura 6B. La situación es más complicada en este caso porque carecemos del comportamiento asintótico de la función alrededor de los irracionales. En un intento de visualizar la situación, en la figura 7 se muestra



(A) Alrededor de $\phi(1/2)$, que está en el centro de la espiral. Precisamente la espiral evita la formación de una tangente.

(B) Alrededor de $\phi(1/8)$, que está en la esquina, donde se pueden distinguir dos tangentes laterales distintas.

Figura 6: Zooms de la figura 5 alrededor de dos tipos diferentes de puntos racionales.

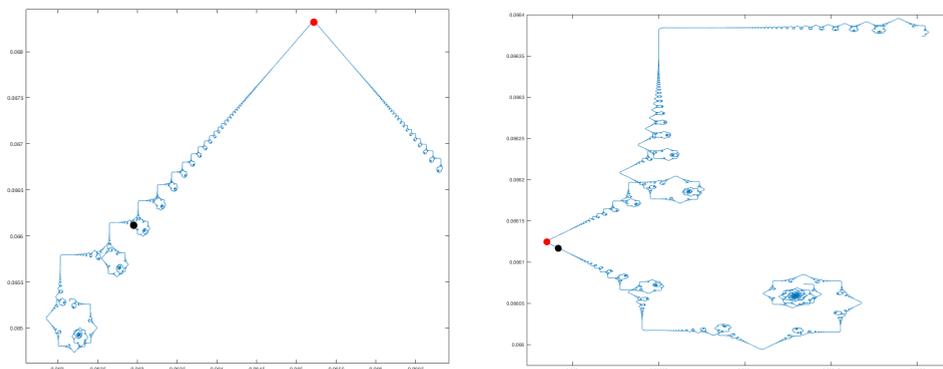
la imagen de $(\rho - \epsilon, \rho + \epsilon)$ para un irracional ρ y ciertos $\epsilon > 0$. En vez de detectar un comportamiento estable, vemos que el patrón cambia mucho cuando ϵ disminuye, lo cual sugiere que el comportamiento de ϕ alrededor de ρ depende fuertemente de la escala que consideremos, y que por tanto es poco probable que exista una tangente.

Todo ello nos da una idea de por qué el teorema 2.4 se cumple. Ahora bien, aunque se pueda enunciar de manera muy sencilla, determinar qué es una tangente de un conjunto tan irregular es todo un reto. Y es que aunque sea la imagen de una curva paramétrica, la teoría clásica de geometría diferencial no es de gran ayuda porque, precisamente, la función no es derivable en ningún conjunto abierto. Por ello, es necesario definir las tangentes desde un punto de vista geométrico. Resulta que, en este caso, también podemos dar una definición paramétrica alternativa, mucho más manejable para nosotros. Aunque no son equivalentes, la geometría implica la paramétrica. De hecho, lo que se demuestra es que dado cualquier punto x y cualquier dirección $\mathbb{V} \subset \mathbb{S}^1$, entonces la dirección \mathbb{V} no es una tangente paramétrica de $\phi(\mathbb{R})$ en $\phi(x)$, y por lo tanto no puede ser tangente geométrica. No entraremos en los detalles aquí, el lector puede consultarlos en el artículo [27].

2.4. ¿Y LA EVOLUCIÓN DEL TORBELLINO POLIGONAL?

Nos hemos convencido de que la función de Riemann aparece como la trayectoria de las esquinas en la evolución de los polígonos que siguen el flujo binormal. Pero en cuanto a cómo evoluciona el polígono, no hemos hecho más que unos breves comentarios en la subsección 2.1. El objetivo aquí es explicar qué sucede en esta evolución y relacionarlo con un efecto óptico fascinante, el denominado efecto de Talbot.

Recordamos que gracias a la transformación de Hasimoto (12), el problema se trasladaba a una ecuación de Schrödinger no lineal (13), a la que por simplicidad



(A) $\epsilon = 0.002$, y la aproximación es $\phi(22/7)$. La primera aproximación a π por fracciones continuas es, precisamente, $22/7$.

(B) $\epsilon = 0.0001$, y la aproximación es $\phi(355/113)$. La tercera aproximación a π por fracciones continuas es, precisamente, la famosa $355/113$. La espiral a la derecha corresponde a la segunda aproximación, $333/106$.

Figura 7: Gráficas de $\phi(\pi - \epsilon, \pi + \epsilon)$. El punto inferior en la figura 7A y el derecho en la 7B corresponden a $\phi(\pi)$, mientras que el punto superior en la figura 7A y el de la izquierda en la 7B corresponden a aproximaciones racionales, que muestran o bien una esquina o bien una espiral. Cuando cambiamos la escala, el comportamiento de ϕ cambia drásticamente.

llamaremos NLS. Además, establecimos en (14) que el dato inicial, que debería representar la curvatura inicial del polígono, sería

$$\Psi_M(s, 0) = \kappa_M(s, 0) = \frac{2\pi}{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(s - \frac{2\pi}{M}k\right),$$

donde M es la cantidad de lados del polígono. En un primer intento de simplificar la situación, redujimos la ecuación a la libre de Schrödinger (15), que se podía resolver fácilmente para lograr la solución (16),

$$\psi_M(s, t) = e^{it\partial_s^2} \left(\frac{2\pi}{M} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\cdot - \frac{2\pi}{M}k\right) \right) (s) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iMks - iM^2k^2t}. \tag{20}$$

Pero esta no es la solución que buscamos, ya que no podemos eliminar la parte no lineal de la ecuación por las buenas. Sin embargo, no estamos tan lejos. Gracias a la transformación de Galileo,

$$G_\lambda \Psi(s, t) = e^{i\lambda s - i\lambda^2 t} \Psi(s - 2\lambda t, t), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

que es una invarianza de la NLS que envía soluciones a otras soluciones, en [20] se dieron cuenta de que la solución que buscamos satisface

$$\Psi_M(s, t) = \widehat{\Psi}_M(0, t) \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{iMks - iM^2k^2t} = \widehat{\Psi}_M(0, t) \psi_M(s, t). \tag{21}$$

Aquí, $\widehat{\Psi}_M(0, t)$ es el coeficiente 0 de Fourier de $\Psi(\cdot, t)$, que es periódica porque la ecuación es invariante por traslaciones y el dato es periódico. Obtener (21) no es complicado; no es más que la serie de Fourier de la solución. Basta con ajustar el parámetro λ de la invarianza galileana para que el dato inicial se mantenga invariante y utilizarla para calcular los coeficientes de Fourier $\widehat{\Psi}_M(k, t)$ para $k \in \mathbb{Z}$, que se reducen todos a $\widehat{\Psi}_M(0, t)$. Los detalles se pueden consultar en [20].

Ahora bien, ¿qué es lo que ocurre con la solución lineal ψ_M ? Ante todo, es una función periódica en tiempo, con periodo $2\pi/M^2$. Evaluémosla en fracciones de este periodo. Dados $p, q \in \mathbb{N}$ coprimos, la suma se puede dividir módulo q para lograr

$$\begin{aligned} \psi_M \left(s, \frac{2\pi}{M^2} \frac{p}{q} \right) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{iMks - 2\pi ik^2 \frac{p}{q}} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l=0}^{q-1} e^{iM(mq+l)s - 2\pi i(mq+l)^2 \frac{p}{q}} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{iMmq s} \sum_{l=0}^{q-1} e^{iMls - 2\pi il^2 \frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

logrando así dos sumas independientes. Ahora, utilizaremos la fórmula de sumación de Poisson en la suma en m para escribir

$$\begin{aligned} \psi_M \left(s, \frac{2\pi}{M^2} \frac{p}{q} \right) &= \frac{2\pi}{qM} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta \left(s - \frac{2\pi m}{qM} \right) \sum_{l=0}^{q-1} e^{iMls - 2\pi il^2 \frac{p}{q}} \\ &= \frac{2\pi}{qM} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta \left(s - \frac{2\pi m}{qM} \right) \sum_{l=0}^{q-1} e^{2\pi i \frac{lm}{q} - 2\pi i \frac{l^2 p}{q}}, \end{aligned}$$

donde también hemos utilizado que $\delta(\xi - a) \cdot f(\xi) = \delta(\xi - a)f(a)$ para cualquier función suave f y cualquier $a \in \mathbb{R}$. La suma interior es una suma cuadrática de Gauss, que se define por

$$G(a, b, c) = \sum_{m=0}^{c-1} e^{2\pi i \frac{a m^2 + b m}{c}}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad c \in \mathbb{N},$$

por lo que

$$\psi_M \left(s, \frac{2\pi}{M^2} \frac{p}{q} \right) = \frac{2\pi}{qM} \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(-p, m, q) \delta \left(s - \frac{2\pi}{qM} m \right). \quad (22)$$

Esta expresión nos basta para entender cómo evoluciona el polígono, al menos en los múltiplos racionales del periodo temporal. Y es que al igual que el dato inicial, ψ_M , y por lo tanto Ψ_M , son sumas de deltas de Dirac. Ahora bien, tenemos q veces más deltas, que están distribuidas uniformemente y cada una tiene su coeficiente. Dado que κ_M comparte soporte con Ψ_M , la curvatura también será una suma de deltas con q veces más deltas que la curvatura inicial, por lo que en la fracción p/q del periodo la curva será un polígono de Mq lados.

Las sumas de Gauss, que han sido ampliamente estudiadas, tienen un efecto a tener en cuenta en (22). Primero, son las que determinan la torsión en cada esquina, que en general no será nula, por lo que el polígono resultante no es necesariamente plano. Por otro lado, se sabe que $G(a, b, c) = 0$ cuando c es par y además $c/2$ y b no comparten paridad. En (22), esto significa que cuando q es par la mitad de los coeficientes de las deltas son nulos, por lo que realmente no hay más que $q/2$ deltas. En otras palabras, en fracciones p/q con q par, el polígono resultante tendrá $Mq/2$ esquinas, y no Mq como ocurrirá en fracciones con q impar.

Todo lo escrito aquí arriba se entiende mucho mejor viendo las simulaciones disponibles en [46]. El vídeo <https://youtu.be/1eKT9deeZYA> que hemos mencionado antes es realmente revelador. En la figura 8 se pueden apreciar capturas de ese vídeo en algunas fracciones representativas del periodo temporal.

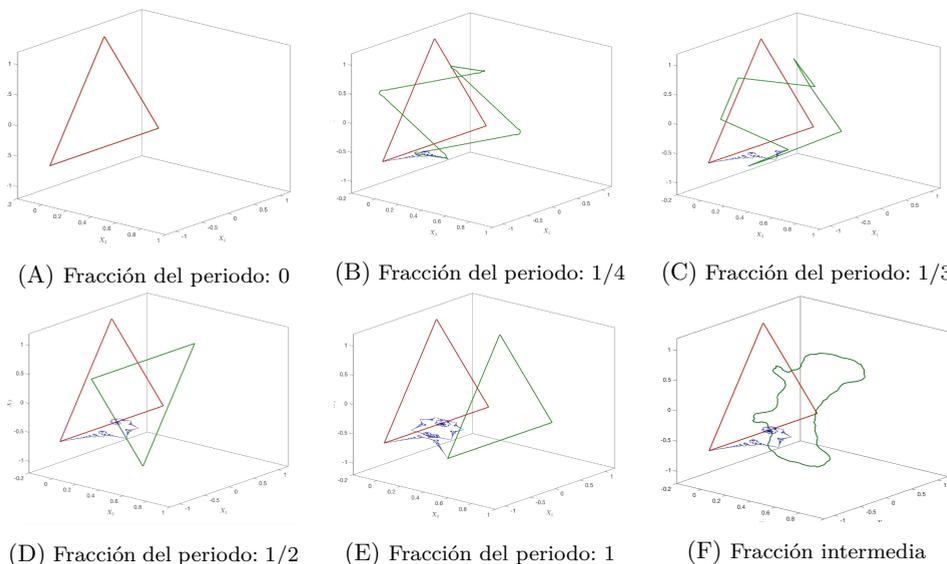


Figura 8: Capturas del vídeo <https://youtu.be/1eKT9deeZYA> realizado por Sandeep Kumar [46]. Plasman la evolución del triángulo con el flujo binormal registrada en las fracciones 0, 1/4, 1/3, 1/2 y 1 del periodo temporal. La última captura corresponde a una fracción intermedia con denominador grande que podríamos tomar como aproximación a un tiempo irracional, donde la forma del torbellino es muy irregular. Se puede apreciar la trayectoria de una de las esquinas, que se corresponde con la primera imagen de la figura 3, y su semejanza a la función de Riemann. Los tiempos 0, 1/2 y 1 fueron mostrados también en [47, figura 1.1].

Este fenómeno, en el que la cantidad de lados del polígono depende de la fracción que estemos considerando, es idéntico al que se observa en el efecto de Talbot, como se podrá apreciar si comparamos la evolución y la reproducción de las esquinas del triángulo en la figura 8 y la representación del mencionado efecto en la figura 9 que explicaremos enseguida.

2.5. EL EFECTO DE TALBOT

En esta subsección trataremos de explicar brevemente el efecto de Talbot. Para profundizar en este maravilloso efecto y leer más sobre su historia y detalles, sugiero al lector consultar los trabajos [24] y [26, sección 1.3], donde se podrán encontrar más referencias, y también [5].

Tomemos una rejilla de difracción, es decir, una placa de material opaco en la que se han cortado muchas rendijas verticales, paralelas y muy juntas entre sí. ¿Qué es lo que ocurre cuando, en una sala oscura, se envía un rayo de luz hacia esta rejilla y la atraviesa? Es decir, si colocamos una pantalla en el otro lado de la rendija, ¿qué es lo que se plasma? Esta es la misma pregunta que se debió de hacer Henry Fox Talbot hacia 1830 cuando realizó el experimento.

Talbot, hombre ilustrado y verdadero polímata, fue un científico inglés formado en Cambridge, miembro de la Royal Society y del parlamento británico, con importantes contribuciones en disciplinas variadas: matemáticas, óptica, química, botánica, arqueología y, probablemente por lo que más se le recuerda, fotografía. En efecto, fue el inventor del calotipo, el predecesor de la fotografía moderna junto al célebre daguerrotipo.

Volviendo al efecto que nos ocupa, puede ser que esperemos ver un patrón similar al de la rejilla reflejado en la pantalla. Pues sí, pero no. Es verdad que veremos un patrón de rejilla en la pantalla, pero ese patrón cambiará de manera aparentemente caótica dependiendo de la distancia que haya entre la pantalla y la rejilla. La alfombra de Talbot que se muestra en la figura 9 es una manera visual de recoger este fenómeno simplificado a dos dimensiones. En ella, el color blanco representa la luz, y el negro, la oscuridad. Debemos pensar en que la rejilla ha sido *aplastada* en la dirección de las rendijas, de tal manera que estas se convierten en puntos. La rejilla se correspondería entonces con el lado izquierdo de la alfombra (en coordenadas cartesianas del plano, la recta $x = 0$), con cuatro rendijas representadas. Si ponemos la pantalla (también aplastada, por lo que será una línea vertical) en $x = z_T$, vemos las rendijas en el mismo lugar que las de la rejilla. Pero si ponemos la pantalla en $x = z_T/2$, ¡las rendijas se han movido de sitio! Y en $x = z_T/4$, se han duplicado. Y si buscamos $x = z_T/3$, se triplican. Recomiendo vivamente consultar la referencia online [62] de un laboratorio virtual de la Universidad de Viena, donde podremos experimentar con el efecto de Talbot de manera interactiva. Es realmente clarificador.

Todo esto nos debería sonar. Sorprendentemente, encontramos el mismo fenómeno que observamos en las esquinas del hilo poligonal en la figura 8, aun cuando los dos experimentos nada tienen que ver. Como suele pasar frecuentemente, esto se debe a que ambos obedecen las leyes de una misma ecuación o expresión, en esta ocasión la ecuación libre de Schrödinger. En el caso del flujo binormal, vimos que la transformación de Hasimoto nos llevaba a la NLS, cuya solución podíamos entender gracias a la solución lineal. En cuanto al efecto de Talbot, si interpretamos la luz como una onda, podemos analizarla mediante la ecuación de ondas, o alternatively a través de su versión estacionaria, la ecuación de Helmholtz. Tomando la denominada aproximación paraxial, muy frecuente y razonable en óptica pero difícilmente justificable desde el punto de vista matemático, se puede lograr la solución

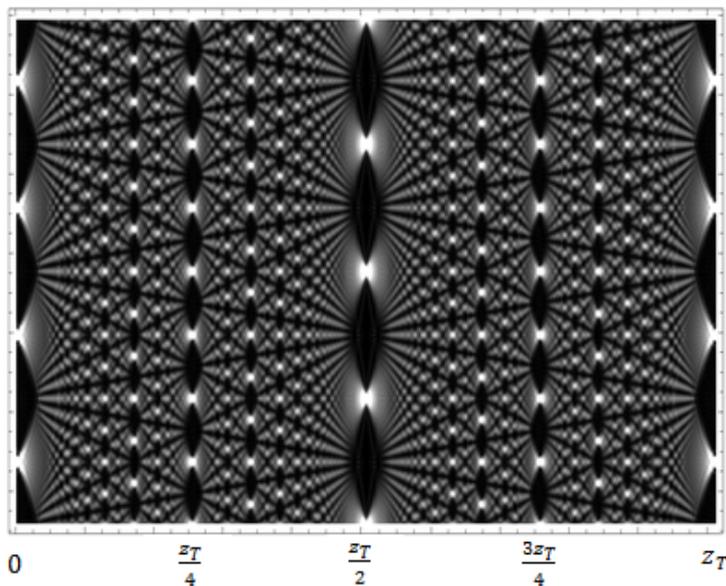


Figura 9: La alfombra de Talbot.

$\psi_M(s)$ que vimos en (20) si tomamos el valor $M = 2\pi$. Véanse [26, sección 1.3.1 y apéndice A] para conocer más detalles.

¿Y por qué ocurre el efecto de Talbot? Esencialmente, es una consecuencia de la difracción de las ondas. La luz, como onda que es, se difracta al atravesar una rendija, que pasa a comportarse como una fuente de ondas esféricas. Si se iluminan todas las rendijas, cada una de ellas actuará como una fuente independiente, y todas las ondas resultantes interferirán entre sí. Analizar tal amasijo de ondas y sus correspondientes frentes no es una tarea trivial y tiene, como hemos visto, consecuencias inesperadas. Para convencernos de ello, basta con probar con una rejilla con solo dos rendijas. Este experimento fue el que realizó Thomas Young en 1804 y se le denomina *experimento de Young* o, quizás más popularmente, *experimento de la doble rendija*. Con él, Young pudo convencer a la comunidad científica de la época de que la teoría corpuscular de Newton era incorrecta y que era necesario adoptar los postulados de la teoría ondulatoria de Huygens. Y es que los resultados del experimento solo se pueden explicar mediante la naturaleza ondulatoria de la luz, ya que la pantalla no muestra dos rendijas como sugeriría la teoría newtoniana, sino muchas más. Este hecho se explica de manera sencillamente genial en el video divulgativo *The original double slit experiment* <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0> del canal Veritasium [63].

Pues bien, el efecto de Talbot no es más que una generalización del experimento de la doble rendija. De hecho, podríamos llamarlo *experimento de la múltiple rendija*, dado que las leyes que gobiernan el resultado son exactamente las mismas que las que generan el patrón de la doble rendija. El inconveniente es que mientras que el experimento con una rendija es muy sencillo y el de la doble rendija se puede deducir

esquemáticamente, la complejidad aumenta considerablemente según incrementamos el número de rendijas (véase la figura 10), y no queda más remedio que lanzarse a por un modelo que lo describa satisfactoriamente. Se habla de esos modelos en trabajos como [7, 8].

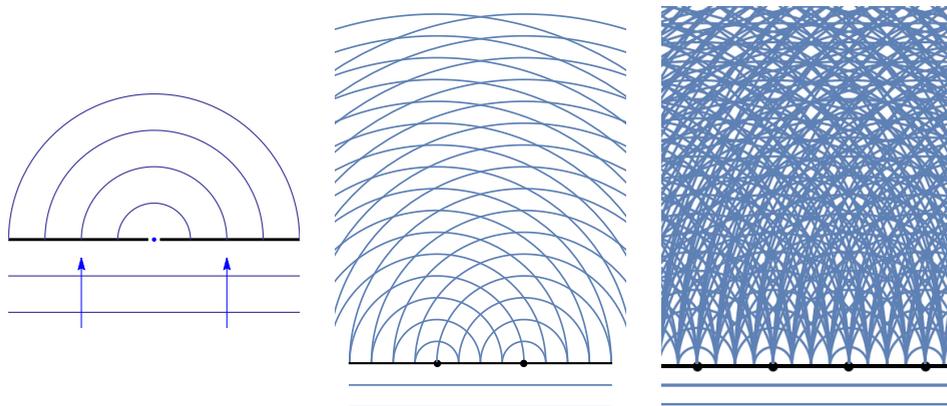


Figura 10: En la izquierda, el experimento con una rendija que muestra la difracción de la onda. En el medio, el experimento de la doble rendija. El efecto óptico hace que se aprecien rectas blancas que manan desde el punto medio entre ambas rendijas: es el patrón que genera la interferencia de las dos ondas circulares (de nuevo, recomiendo ver <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0>). En la derecha, el experimento de Talbot. La complejidad de la interferencia no permite averiguar el resultado a simple vista.

3. CONCLUSIÓN

La función de Riemann juega un papel imprevisto en la evolución de hilos de torbellino poligonales y toma así una naturaleza geométrica nunca explorada hasta hace poco. Así, surgen preguntas naturales que hemos explorado y respondido, a veces parcialmente, y probablemente muchas otras podrían ser propuestas.

Desde un punto de vista más físico, y tomando el camino de los trabajos sobre multifractalidad de Jaffard, la función de Riemann está también ligada con el estudio de turbulencia, una perspectiva que no hemos tratado en este artículo pero que es rica y profunda. El hecho de que la función de Riemann satisfaga el formalismo multifractal de Frisch y Parisi hace pensar que podría jugar un papel relevante en el estudio de propiedades físicas desde un punto de vista matemático. Por ejemplo, en [10], siguiendo tanto los trabajos mencionados de Jaffard como a Frisch [31], indagamos sobre el concepto de intermitencia y la posibilidad de adaptarlo al lenguaje matemático, y en este contexto probamos que la función de Riemann es una función intermitente. Son, sin duda alguna, temas interesantísimos, pero lo dejaremos para la siguiente ocasión.

REFERENCIAS

- [1] A.-M. AMPÈRE, Recherche sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration du théorème de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque, *J. Éc. polytech.* **13** (1806), 148–181, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k433669p/f149.image>.
- [2] V. BANICA Y L. VEGA, The initial value problem for the binormal flow with rough data, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **48** (2015), no. 6, 1423–1455.
- [3] V. BANICA Y L. VEGA, Evolution of polygonal lines by the binormal flow, *Ann. PDE* **6** (2020), no. 1, Paper No. 6, 53 pp.
- [4] V. BANICA Y L. VEGA, Riemann's non-differentiable function and the binormal curvature flow, *prepublicación*, <http://arxiv.org/abs/2007.07184>.
- [5] M. BERRY, I. MARZOLI Y W. SCHLEICH, Quantum carpets, carpets of light, *Phys. World* **14** (2001), no. 6, 39–46.
- [6] M. V. BERRY, Quantum fractals in boxes, *J. Phys. A* **29** (1996), no. 20, 6617–6629.
- [7] M. V. BERRY Y J. GOLDBERG, Renormalisation of curlicues, *Nonlinearity* **1** (1988), no. 1, 1–26.
- [8] M. V. BERRY Y S. KLEIN, Integer, fractional and fractal Talbot effects, *J. Modern Opt.* **43** (1996), no. 10, 2139–2164.
- [9] B. BOLZANO, *Functionenlehre, Spisy Bernarda Bolzano – Bernard Bolzano's Schriften*, vol. 1, Královská Česká Spolecnost Nauk, 1930.
- [10] A. BORITCHEV, D. ECEIZABARRENA Y V. VILAÇA DA ROCHA, Riemann's non-differentiable function is intermittent, *prepublicación*, <https://arxiv.org/abs/1910.13191>.
- [11] P. L. BUTZER Y E. L. STARK, “Riemann's example” of a continuous nondifferentiable function in the light of two letters (1865) of Christoffel to Prym, *Bull. Soc. Math. Belg. Sér. A* **38** (1986), 45–73 (1987).
- [12] M. C. CELLÉRIER, Note sur les principes fondamentaux de l'analyse, *B. Sci. Math.* **14** (1890), 142–160, <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k9621739d/f146.item.r=140>.
- [13] F. CHAMIZO Y A. CÓRDOBA, Differentiability and dimension of some fractal Fourier series, *Adv. Math.* **142** (1999), no. 2, 335–354.
- [14] F. CHAMIZO Y A. UBIS, Some Fourier series with gaps, *J. Anal. Math.* **101** (2007), 179–197.
- [15] F. CHAMIZO Y A. UBIS, Multifractal behavior of polynomial Fourier series, *Adv. Math.* **250** (2014), 1–34.
- [16] V. CHOUSIONIS, M. B. ERDOĞAN Y N. TZIRAKIS, Fractal solutions of linear and nonlinear dispersive partial differential equations, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **110** (2015), no. 3, 543–564.
- [17] L. S. DA RIOS, Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **22** (1906), no. 1, 117–135.

- [18] G. DARBOUX, Mémoire sur les fonctions discontinues, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (2)* **4** (1875), 57–112, http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1875_2_4__57_0.
- [19] F. DE LA HOZ, C. J. GARCÍA-CERVERA Y L. VEGA, A numerical study of the self-similar solutions of the Schrödinger map, *SIAM J. Appl. Math.* **70** (2009), no. 4, 1047–1077.
- [20] F. DE LA HOZ Y L. VEGA, Vortex filament equation for a regular polygon, *Nonlinearity* **27** (2014), no. 12, 3031–3057.
- [21] F. DE LA HOZ Y L. VEGA, On the relationship between the one-corner problem and the M -corner problem for the vortex filament equation, *J. Nonlinear Sci.* **28** (2018), no. 6, 2275–2327.
- [22] P. DU BOIS-REYMOND, Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen, *J. Reine Angew. Math.* (79) (1875), 21–37.
- [23] J. J. DUISTERMAAT, Self-similarity of “Riemann’s nondifferentiable function”, *Nieuw Arch. Wisk.* **9** (1991), no. 3, 303–337.
- [24] D. ECEIZABARRENA, El efecto de Talbot: de la óptica a la ecuación de Schrödinger, *TEMat* **1** (2017), 91–106, <https://temat.es/articulo/2017-p91>.
- [25] D. ECEIZABARRENA, On the Hausdorff dimension of Riemann’s non-differentiable function, *prepublicación*, <http://arxiv.org/abs/1910.02530>.
- [26] D. ECEIZABARRENA, *A geometric and physical study of Riemann’s non-differentiable function*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), 2020.
- [27] D. ECEIZABARRENA, Geometric differentiability of Riemann’s non-differentiable function, *Adv. Math.* **366** (2020), 107091, 39 pp.
- [28] M. B. ERDOĞAN Y G. SHAKAN, Fractal solutions of dispersive partial differential equations on the torus, *Selecta Math. (N.S.)* **25** (2019), no. 1, Paper No. 11, 26 pp.
- [29] M. B. ERDOĞAN Y N. TZIRAKIS, Talbot effect for the cubic non-linear Schrödinger equation on the torus, *Math. Res. Lett.* **20** (2013), no. 6, 1081–1090.
- [30] K. FALCONER, *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*, 3.^a ed., John Wiley & Sons, 2014.
- [31] U. FRISCH, *Turbulence - The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [32] U. FRISCH Y G. PARISI, On the singularity structure of fully developed turbulence, *Proc. Enrico Fermi International Summer School in Physics* (Varenna, 1983), 84–88, North-Holland, 1985. Apéndice a «Fully developed turbulence and intermittency», por U. Frisch, <https://www.researchgate.net/publication/284646749>.
- [33] J. GERVER, The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π , *Amer. J. Math.* **92** (1970), 33–55.
- [34] J. GERVER, More on the differentiability of the Riemann function, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 33–41.

- [35] S. GUTIÉRREZ, J. RIVAS Y L. VEGA, Formation of singularities and self-similar vortex motion under the localized induction approximation, *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), no. 5-6, 927–968.
- [36] G. H. HARDY, Weierstrass’s non-differentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **17** (1916), no. 3, 301–325.
- [37] H. HASIMOTO, A soliton on a vortex filament, *J. Fluid Mech.* **51** (1972), no. 3, 477–485.
- [38] M. HOLSCHNEIDER Y P. TCHAMITCHIAN, Pointwise analysis of Riemann’s “nondifferentiable” function, *Invent. Math.* **105** (1991), no. 1, 157–175.
- [39] S. ITATSU, Differentiability of Riemann’s function, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **57** (1981), no. 10, 492–495.
- [40] S. JAFFARD, The spectrum of singularities of Riemann’s function, *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (1996), no. 2, 441–460.
- [41] S. JAFFARD Y Y. MEYER, Wavelet methods for pointwise regularity and local oscillations of functions, *Mem. Amer. Math. Soc.* **123** (1996), no. 587, x+110 pp.
- [42] R. L. JERRARD Y D. SMETS, On the motion of a curve by its binormal curvature, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015), no. 6, 1487–1515.
- [43] L. KAPITANSKI Y I. RODNIANSKI, Does a quantum particle know the time?, *Emerging applications of number theory* (Minneapolis, MN, 1996), IMA Vol. Math. Appl., vol. 109, 355–371, Springer, New York, 1999.
- [44] D. KLECKNER, M. W. SCHEELER Y W. T. M. IRVINE, The life of a vortex knot, *Phys. Fluids* **26** (2014), no. 9, 091105.
- [45] N. KOISO, The vortex filament equation and a semilinear Schrödinger equation in a Hermitian symmetric space, *Osaka J. Math.* **34** (1997), no. 1, 199–214.
- [46] S. KUMAR, <https://sites.google.com/view/skumar1712/simulation-videos>. Consultado el 20 de octubre de 2020.
- [47] S. KUMAR, *Vortex Filament Equation for some regular polygonal curves*, Tesis Doctoral, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), 2020.
- [48] W. LUTHER, The differentiability of Fourier gap series and “Riemann’s example” of a continuous, nondifferentiable function, *J. Approx. Theory* **48** (1986), no. 3, 303–321.
- [49] F. A. MEDVEDEV, *Scenes from the history of real functions*, Science Networks. Historical Studies, vol. 7, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
- [50] E. NEUENSCHWANDER, Riemann’s example of a continuous, ‘nondifferentiable’ function, *Math. Intelligencer* **1** (1978/79), no. 1, 40–44.
- [51] K. I. OSKOLKOV, A class of I. M. Vinogradov’s series and its applications in harmonic analysis, *Progress in approximation theory* (Tampa, FL, 1990), Springer Ser. Comput. Math., vol. 19, 353–402, Springer, New York, 1992.
- [52] K. I. OSKOLKOV, The Schrödinger density and the Talbot effect, *Approximation and probability*, Banach Center Publ., vol. 72, 189–219, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2006.

- [53] K. I. OSKOLKOV Y M. A. CHAKHKIEV, On Riemann ‘nondifferentiable’ function and Schrödinger equation, *Proc. Steklov Inst. Math.* **269** (2010), no. 1, 186–196.
- [54] K. I. OSKOLKOV Y M. A. CHAKHKIEV, Traces of the discrete Hilbert transform with quadratic phase, *Proc. Steklov Inst. Math.* **280** (2013), no. 1, 248–262.
- [55] C. PASTOR, On the regularity of fractional integrals of modular forms, *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), no. 2, 829–857.
- [56] J. PERRIN, *Les atomes*, 1913.
- [57] H. POINCARÉ, La logique et l’intuition dans la science mathématique et dans l’enseignement, *Enseign. Math.* **1** (1899), 157–162, <https://www.e-periodica.ch/digbib/view?pid=ens-001:1899:1#309>.
- [58] I. RODNIANSKI, Fractal solutions of the Schrödinger equation, *Nonlinear PDE’s, dynamics and continuum physics* (South Hadley, MA, 1998), Contemp. Math., vol. 255, 181–187, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [59] K. W. SCHWARZ, Three-dimensional vortex dynamics in superfluid He4: Line-line and line-boundary interactions, *Phys. Rev. B* **31** (1985), no. 9, 5782–5804.
- [60] S. L. SEGAL, Riemann’s example of a continuous ‘nondifferentiable’ function. II, *Math. Intelligencer* **1** (1978/79), no. 2, 81–82.
- [61] A. SMITH, The differentiability of Riemann’s functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **34** (1972), 463–468.
- [62] UNIVERSITY OF VIENNA, The Talbot effect, *Quantum Interactive* <https://interactive.quantumnano.at/advanced/quantum-experiments/talbot-effect/>. Consultado el 20 de octubre de 2020.
- [63] VERITASIAM, The original double slit experiment, <https://youtu.be/Iuv6hY6zsd0>. Consultado el 20 de octubre de 2020.

DANIEL ECEIZABARRENA, DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND STATISTICS, UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS AMHERST, ESTADOS UNIDOS

Correo electrónico: eceizabarrena@math.umass.edu