Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri Ramírez y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 28 de febrero de 2022.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 411 (Corrección). *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Probar que en todo triángulo ABC, si las longitudes de los lados BC, CA y AB son, respectivamente, a, b y c, las longitudes de las alturas desde los vértices A, B y C son, respectivamente, h_a, h_b y h_c, y el área es F, se cumple la desigualdad

$$a^4(h_b^2+h_c^2)+b^4(h_c^2+h_a^2)+c^4(h_a^2+h_b^2)\geq 32\sqrt{3}\,F^3.$$

Problema 412 (Corrección). *Propuesto por Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Roma, Italia.*

Sea

$$\mathrm{Li}_2(z)=-\int_0^z\frac{\log(1-t)}{t}\,dt$$

la función dilogaritmo. Probar que

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}-\frac{2+\sqrt{3}}{2}i\right)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right)\right)=\frac{11}{144}\pi^2-\frac{\log^2(2+\sqrt{3})}{4}.$$

PROBLEMA 417. *Propuesto por José Luis Arregui, Universidad de La Rioja, Logroño.*

Dado un número natural n fijo, vamos a seleccionar un valor natural entre 1 y n (aquí, y en lo que sigue, «entre a y b» siempre incluye a los extremos a y b) usando un proceso de varias etapas, tras el cual nos quedaremos con el valor final de una secuencia de valores naturales intermedios. Tomamos $n_0 = n$, y obtenemos n_1 con probabilidad uniforme entre 1 y n_0; entonces obtenemos n_2 entre n_0 y n_1 con probabilidad uniforme; después n_3 entre n_1 y n_2 con probabilidad uniforme; y así sucesivamente. Terminamos el proceso en cuanto $n_j = n_{j-1}$, y nos quedamos con el número n_j. Para cada k entre 1 y n, ¿cuál es la probabilidad de que el número seleccionado sea k?

PROBLEMA 418. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En el triángulo ABC se tiene $\angle ABC = \angle BCA > \pi/3$. Sean O, I y H el circuncentro, el incentro y el ortocentro, respectivamente, del triángulo. Si $OI = 3$ y $HI = 2$, calcular el área de ABC.

PROBLEMA 419. *Propuesto por George Stoica, Saint John, New Brunswick, Canadá.*

Sea f una función convexa perteneciente a la clase $C^1(\mathbb{R})$. Si existen dos valores fijos $x_1, x_2 \in [0,1]$ para los que $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(x_2)$, probar que $f'(x_1) = f'(x_2)$.

PROBLEMA 420. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Se denotan por h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas del triángulo ABC y por s su semiperímetro. Probar la desigualdad

$$\sum_{\text{cíclica}} \frac{h_a}{h_b h_c (h_b + h_c)} \geq \frac{9}{2s^2}.$$

PROBLEMA 421. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathcal{H}_n F_{2n}}{4^n} = \frac{2}{29} \log\left(\frac{16}{5}\right) - \frac{44}{29\sqrt{5}} \log\varphi,$$

donde $\mathcal{H}_n$ es el n-ésimo número armónico alternado, definido por

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k},$$

$\{F_n\}_{n\geq 0}$ son los números de Fibonacci, dados por la relación de recurrencia $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 2$, con $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$, y $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ es la razón áurea.

Problema 422. *Propuesto por Toyesh Prakash Sharma (estudiante), St. C. F. Andrews School, Agra, India.*

Sea

$$a_n = 1 + \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} m^2 \int_0^1 (\log x)^{m-1}\, dx, \qquad n \geq 1.$$

Evaluar $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$.

Problema 423. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales positivos y p un entero positivo. Si consideramos $a_{n+1} = a_1$, probar las desigualdades

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(pa_k + (p-1)a_{k+1})a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \frac{2p-1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(p^2 a_k^2 + p(p-1)a_k a_{k+1} + (p-1)^2 a_{k+1}^2)a_k^{p+1}}{a_k^p + (p-1)a_{k+1}^p} \geq \frac{3p^2 - 3p + 1}{p} \sum_{k=1}^{n} a_k^3.$$

Problema 424. *Propuesto por Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" Secondary School, Buzău, Rumanía.*

Sean m un entero no negativo y

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2 - k + 1}\right), \qquad n \geq 1.$$

Calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+1} - a_n^{m+1} \right).$$

Soluciones

Problema 393. *Propuesto por Dorin Marghidanu, "A. I. Cuza" National College, Corabia, Rumanía.*

Si $x_1, \ldots, x_n$ son números reales, probar que

$$x_1\sqrt{1 + x_1^2} + x_2\sqrt{2 + x_2^2} + \cdots + x_n\sqrt{n + x_n^2} < x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \frac{n(n+1)}{4}.$$

Primera solución, enviada por Henry Ricardo, Westchester Area Math Circle, Nueva York, EE.UU.

Pongamos $X = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. El resultado se obtiene aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y completando cuadrados. En efecto,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i\sqrt{i+x_i^2} &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i|\sqrt{i+x_i^2} \le \sqrt{X}\sqrt{1+2+\cdots+n+X}\\ &= \sqrt{X^2+\frac{n(n+1)}{2}X} = \sqrt{\left(X+\frac{n(n+1)}{4}\right)^2-\frac{n^2(n+1)^2}{16}}\\ &< X+\frac{n(n+1)}{4} = x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+\frac{n(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Segunda solución, enviada por Ioan Viorel Codreanu, Satulung, Maramures, Rumanía.

En primer lugar, es claro que

$$x_k\sqrt{k+x_k^2} \le |x_k|\sqrt{k+x_k^2} = \sqrt{x_k^2(k+x_k^2)}, \qquad k = 1,\ldots,n.$$

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica implica que

$$\sqrt{x_k^2(k+x_k^2)} < x_k^2 + \frac{k}{2}, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

con desigualdad estricta, ya que $x_k^2 \neq k + x_k^2$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k\sqrt{k+x_k^2} < \sum_{k=1}^{n}\left(x_k^2+\frac{k}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \frac{n(n+1)}{4}.$$

Tercera solución, enviada por Ángel Plaza, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Gran Canaria.

Basta demostrar la desigualdad cuando $x_1, \ldots, x_n$ son números reales positivos. Puesto que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$, es suficiente probar que $x\sqrt{k+x^2} < x^2 + k/2$ para $x > 0$ y $k = 1, \ldots, n$, lo que es cierto, ya que

$$\left(\frac{k}{2}+x^2\right)^2 - \left(x\sqrt{k+x^2}\right)^2 = \frac{k^2}{4} > 0.$$

También resuelto por H. Allahuerdiyev, F. D. Aranda, C. Beade, H. Bin Yoo, B. Bradie, A. Espuny, G. García, L. Giugiuc, L. González, Kee-Wai Lau, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru, T. Zvonaru y el proponente.

NOTA. Las tres soluciones publicadas son una muestra de las técnicas que se han usado en todas las soluciones recibidas.

Problema 394. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Evaluar la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} H_{n/2},$$

donde

$$H_x = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\, dt$$

es la extensión de los números armónicos para $x \in \mathbb{R}$, con $x > -1$.

Solución enviada por A. Stadler, Herrliberg, Suiza.

Veamos que el valor de la suma es $-3\zeta(3)/8$, donde ζ denota la función zeta de Riemann.

Usando integración por partes obtenemos la representación

$$H_{n/2} = -\frac{n}{2}\int_0^1 t^{n/2-1}\log(1-t)\, dt$$

y, denotando por S la suma a evaluar, deducimos que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\int_0^1 t^{n/2-1}\log(1-t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^{n/2}\right)\frac{\log(1-t)}{t}\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{t})\log(1-t)}{t}\, dt = \int_0^1 \frac{\log(1+u)\log(1-u^2)}{u}\, du, \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha efectuado el cambio de variable $t = u^2$. El intercambio de la suma y la integral en el desarrollo anterior puede justificarse utilizando el teorema de la convergencia dominada. Ahora resulta sencillo comprobar que

$$\log(1+u)\log(1-u^2) = \frac{3}{4}\log^2(1-u^2) + \frac{1}{4}\log^2\left(\frac{1-u}{1+u}\right) - \log^2(1-u).$$

Además, aplicando, respectivamente, los cambios de variable $u = \sqrt{1-v}$, $u = (1-v)/(1+v)$ y $u = 1-v$, tenemos que

$$\frac{3}{4}\int_0^1 \frac{\log^2(1-u^2)}{u}\, du = \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\log^2 v}{1-v}\, dv,$$

$$\frac{1}{4}\int_0^1 \log^2\left(\frac{1-u}{1+u}\right)\frac{du}{u} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log^2 v}{1-v}\, dv + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log^2 v}{1+v}\, dv$$

y

$$\int_0^1 \frac{\log^2(1-u)}{u}\, du = \int_0^1 \frac{\log^2 v}{1-v}\, dv.$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\log^2 v}{1-v}\,dv + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\log^2 v}{1+v}\,dv \\
&= -\frac{3}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 v^k \log^2 v\,dv + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 v^k\log^2 v\,dv \\
&= -\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3} = -\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^3} = -\frac{3}{8}\zeta(3),
\end{aligned}
$$

y la prueba está terminada. Nuevamente, el teorema de la convergencia dominada nos permite realizar el intercambio de la suma y la integral en el cálculo anterior.

También resuelto por B. Bradie, P. Fernández, M. L. Glasser, Kee-Wai Lau, B. Salgueiro y el proponente. Se ha recibido una solución incompleta.

PROBLEMA 395. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Las longitudes de los lados de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ son números enteros distintos. El ángulo en el vértice A es agudo y mayor de $70°$, y la longitud de la diagonal AC es 2020. Encontrar un valor posible para la longitud de la diagonal BD y para el ángulo agudo entre ambas diagonales.

Solución enviada por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León.

Veamos el caso particular en que la diagonal AC pudiera ser un diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero cíclico. Si en este caso hubiera soluciones para las que $70° < \angle BAD < 90°$, no nos haría falta seguir buscando otras configuraciones.

Usaremos las siguientes notaciones para distancias y ángulos (ver la figura 1):

$$
\begin{gathered}
a = AB, \quad b = BC, \quad c = CD, \quad d = DA, \quad e = AC, \quad f = BD, \\
A = \angle BAD, \quad \lambda = \angle ACB = \angle ADB, \quad \mu = \angle CBD = \angle CAD.
\end{gathered}
$$

Comprobaremos la condición $70° < A < 90°$ calculando el coseno de este ángulo mediante la expresión

$$
\cos A = \cos(90° - \lambda + \mu) = \operatorname{sen}\lambda\cos\mu - \cos\lambda\operatorname{sen}\mu = \frac{ad - bc}{e^2}.
$$

Por otra parte, el teorema de Ptolomeo permite obtener

$$
f = \frac{ac + bd}{e},
$$

con lo cual, si E es el punto de intersección de las diagonales AC y BD del cuadrilátero y ponemos $E = \angle AED$ (véase la figura 1) para el ángulo agudo entre las mismas, tenemos

$$
\operatorname{sen} E = \operatorname{sen}(\lambda + \mu) = \frac{ad + bc}{e^2}.
$$

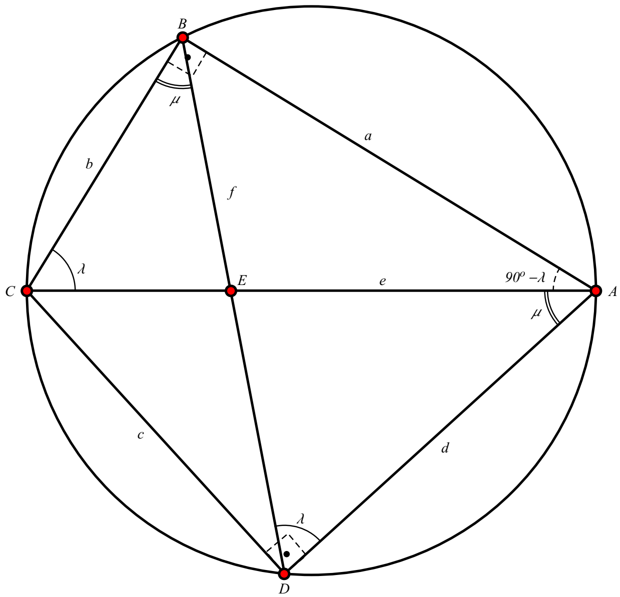

Figura 1: Esquema para la solución al Problema 395.

Podemos iniciar ahora la búsqueda de soluciones con a, b, c y d enteros distintos y $e = 2020$, partiendo de las cuatro posibles descomposiciones de 2020^2 como suma de dos cuadrados:

$$2020^2 = 400^2 + 1980^2 = 868^2 + 1824^2 = 1212^2 + 1616^2 = 1344^2 + 1508^2.$$

Haremos corresponder (AB, BC) y (CD, DA) con dos parejas distintas elegidas entre $(400, 1980)$, $(868, 1824)$, $(1212, 1616)$ y $(1344, 1508)$, pudiendo además permutar el orden interno de los componentes de cualquiera de las parejas. La siguiente tabla muestra algunas combinaciones de a, b, c y d que verifican $a^2 + b^2 = 2020^2 = c^2 + d^2$ y para las cuales el ángulo A cumple los requisitos del enunciado. En cada caso se calculan también f, $\cos A$, A, $\operatorname{sen} E$ y el ángulo agudo E mediante las fórmulas dadas previamente.

a	b	c	d	f	$\cos A$	A	$\operatorname{sen} E$	E
1980	400	1824	868	$\frac{197936}{101}$	$\frac{12363}{51005}$	$\approx 75.97°$	0.6	$\approx 36.87°$
1824	868	1616	1212	1980	$\frac{20}{101}$	$\approx 78.58°$	$\frac{2236}{2525}$	$\approx 62.32°$
1824	868	1508	1344	$\frac{9696}{5}$	$\frac{7}{25}$	$\approx 73.74°$	$\frac{9401}{10201}$	$\approx 67.16°$
1616	1212	1344	1508	1980	$\frac{20}{101}$	$\approx 78.58°$	$\frac{2516}{2525}$	$\approx 85.16°$
1616	1212	1508	1344	$\frac{10064}{5}$	$\frac{213}{2525}$	$\approx 85.16°$	$\frac{99}{101}$	$\approx 78.58°$

Así concluimos el problema, con la satisfacción de haber encontrado un par de soluciones en las que la longitud de la diagonal BD también es un número entero.

También resuelto por C. Beade, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

NOTA. Todas las soluciones recibidas tratan el caso particular en que AC es un diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero. La solución de Stadler es similar a la publicada y presenta una tabla con las mismas soluciones que ésta. En las soluciones del proponente y de Beade se explora brevemente la posibilidad de encontrar soluciones del problema en las que la diagonal AC no sea un diámetro de la circunferencia circunscrita al cuadrilátero. Beade encuentra una solución explícita, partiendo de que sea $\cos(\angle ABC) = -\cos(\angle ADC) = k$ con k racional, pues entonces, resolviendo en enteros positivos las ecuaciones $x^2 + y^2 \pm 2kxy = 2020^2$ y «yuxtaponiendo» una solución de la ecuación con signo $+$ con una solución de la ecuación con signo $-$ es posible que se puedan obtener soluciones satisfaciendo los requisitos del problema. Así, por ejemplo, combinando la solución $(1616, 2020)$ obtenida para $k = -\frac{2}{5}$ con la solución $(880, 1500)$ obtenida para $k = \frac{2}{5}$ resulta el cuadrilátero de lados $(1616, 2020, 880, 1500)$, que constituye una solución admisible del problema.

PROBLEMA 396. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $x, y, z, t \in (0, 1)$ tales que $3\sqrt{3}(xyz + yzt + ztx + txy) = 4$. Probar que

$$\frac{yzt}{x(1-x^2)} + \frac{ztx}{y(1-y^2)} + \frac{txy}{z(1-z^2)} + \frac{xyz}{t(1-t^2)} \geq 2.$$

Solución enviada por Daniel Văcaru, Piteşti, Rumanía.

Consideremos la función $f(x) = x(1-x^2)$ con $x \in (0, 1)$. Como $f'(x) = 1-3x^2 = 0$ si y solo si $x = \sqrt{3}/3$, es claro que $f(x) \leq f(\sqrt{3}/3) = 2\sqrt{3}/9$ para $x \in (0, 1)$. Entonces $1/(x(1-x^2)) \geq 9/(2\sqrt{3})$ y, por tanto,

$$\frac{yzt}{x(1-x^2)} + \frac{ztx}{y(1-y^2)} + \frac{txy}{z(1-z^2)} + \frac{xyz}{t(1-t^2)} \geq \frac{9}{2\sqrt{3}}(xyz + yzt + ztx + txy) = 2,$$

donde en el último paso se ha usado la relación dada para los valores x, y, z y t.

También resuelto por C. Beade, L. Giugiuc, Kee-Wai Lau, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 397. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC de área F y sean m_a, m_b y m_c, respectivamente, las longitudes de las medianas desde los vértices A, B y C. Probar que

$$6F \leq am_a + bm_b + cm_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Solución enviada por Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.

Sean h_a, h_b y h_c las longitudes de las alturas del triángulo ABC. Como $m_a \geq h_a$, $m_b \geq h_b$ y $m_c \geq h_c$, se tiene

$$am_a + bm_b + cm_c \geq ah_a + bh_b + ch_c = 6F.$$

Por otro lado, como $4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, etc., llegamos a que $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz deducimos que

$$am_a + bm_b + cm_c \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$

En ambas desigualdades la igualdad se cumple si y solo si ABC es un triángulo equilátero.

También resuelto por F. D. Aranda, C. Beade, S. H. Brown, I. V. Codreanu, L. Giugiuc, Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. Sáez, B. Salgueiro, A. Stadler, D. Văcaru, V. Vicario, y los proponentes. Se ha recibido una solución incorrecta.

Nota. Como apuntan los proponentes, el problema presenta un refinamiento de la desigualdad de Ionescu-Weitzenböck $6F \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ (véase [1]). Dado que la igualdad en ésta se alcanza si y solo si ABC es equilátero, lo mismo vale para las dos desigualdades del problema enunciado. Salgueiro analiza muy cumplidamente el caso de la igualdad en la segunda de ellas, que él también prueba con Cauchy-Schwarz como se hace en la solución presentada. A lo largo de una original (y larga) solución de esa segunda desigualdad, Vicario repasa varias desigualdades geométricas, como la 4.4 de Weitzenböck, pero también las 4.10 y 4.12 de [1].

Referencias

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

Problema 398. *Propuesto por Larry Glasser, Clarkson University, Potsdam, Nueva York, EE.UU.*

Evaluar la integral

$$\int_0^\pi \frac{(\arctan(\cot\phi \operatorname{sen}\theta))^2}{1 + \cos\theta}\, d\theta, \qquad 0 < \phi \leq \pi/2.$$

Solución enviada por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.

Si denotamos por $I(\phi)$ la integral a evaluar, con $0 < \phi \leq \pi/2$, probaremos que

$$I(\phi) = 2\pi \left(\operatorname{cosec}\phi \log(\operatorname{sen}\phi) + \cot\phi \log\left(\cot\frac{\phi}{2}\right)\right).$$

En primer lugar, usando el cambio de variable $x = \tan\theta/2$ deducimos que

$$I(\phi) = \int_0^\infty \arctan^2\left(\frac{2x\cot\phi}{1+x^2}\right) dx. \tag{1}$$

Usando el cambio $\cot\phi = \operatorname{senh}\alpha$, para $\alpha \geq 0$, que es equivalente a

$$e^\alpha = \cot\frac{\phi}{2}, \tag{2}$$

y aplicando las identidades

$$\arctan u - \arctan v = \arctan\left(\frac{u-v}{1+uv}\right), \qquad uv > -1,$$

y

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}, \qquad x > 0,$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{2x\operatorname{senh}\alpha}{1+x^2}\right) &= \arctan\left(\frac{xe^\alpha - xe^{-\alpha}}{1+x^2}\right) \\
&= \arctan(xe^\alpha) - \arctan(xe^{-\alpha}) \\
&= \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{xe^\alpha}\right)\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{xe^{-\alpha}}\right)\right) \\
&= \arctan\left(\frac{e^\alpha}{x}\right) - \arctan\left(\frac{e^{-\alpha}}{x}\right) \\
&= \int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha} \frac{x}{x^2+t^2}\, dt.
\end{aligned}$$

De este modo la integral en (1) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
I(\phi) &= \int_0^\infty \left(\int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha} \frac{x}{x^2+t^2}\, dt\right)\left(\int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha} \frac{x}{x^2+u^2}\, du\right) dx \\
&= \int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha}\int_{e^{-\alpha}}^{e^\alpha}\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+t^2)(x^2+u^2)}\, dx\, dt\, du,
\end{aligned}$$

donde en el último paso se ha aplicado un cambio en el orden de integración, que puede justificarse por la positividad del integrando. Ahora, usando la descomposición en fracciones simples

$$\frac{x^2}{(x^2+t^2)(x^2+u^2)} = \frac{t^2}{t^2-u^2}\cdot\frac{1}{x^2+t^2} - \frac{u^2}{t^2-u^2}\cdot\frac{1}{x^2+u^2}$$

y la identidad

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+z^2} = \frac{\pi}{2z},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \int_0^{\infty} \left[\frac{t^2}{t^2-u^2} \cdot \frac{1}{x^2+t^2} - \frac{u^2}{t^2-u^2} \cdot \frac{1}{x^2+u^2} \right] dx\, dt\, du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \left(\frac{t}{t^2-u^2} - \frac{u}{t^2-u^2} \right) dt\, du = \frac{\pi}{2} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \frac{1}{t+u}\, dt\, du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{e^{-\alpha}}^{e^{\alpha}} \big(\log(u+e^{\alpha}) - \log(u+e^{-\alpha}) \big)\, du. \end{aligned}$$

Finalmente, aplicando que

$$\int_a^b (\log(u+b) - \log(u+a))\, du = 2\big(b\log(2b) + a\log(2a) - (a+b)\log(a+b)\big),$$

se llega al resultado

$$\begin{aligned} I(\phi) &= \pi \left(e^{\alpha}\log(2e^{\alpha}) + e^{-\alpha}\log(2e^{-\alpha}) - (e^{\alpha}+e^{-\alpha})\log(e^{\alpha}+e^{-\alpha}) \right) \\ &= 2\pi \left(\alpha \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} + \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2} \log\left(\frac{2}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}} \right) \right) \\ &= 2\pi \left(\operatorname{cosec}\phi \log(\operatorname{sen}\phi) + \cot\phi \log\left(\cot\frac{\phi}{2}\right) \right), \end{aligned}$$

donde la última identidad se obtiene de la relación (2).

También resuelto por B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

Problema 399. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reales no negativos, con $n \geq 4$, tales que $a_1+a_2+\cdots+a_n = n$. Determinar los valores positivos de α para los que se cumple la desigualdad

$$n^2(n-2) + n(a_1a_2\cdots a_n)^{\alpha} \geq 2(n-1) \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j.$$

Solución enviada por el proponente.

Probaremos que la desigualdad se verifica para $\alpha \in (0,1]$. Comenzaremos demostrándola para $\alpha = 1$.

A partir de la desigualdad

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i - a_j)^2 \geq 0,$$

se obtiene, desarrollando adecuadamente, que

$$2n \sum_{1\leq i<j\leq n} a_ia_j \leq (n-1)(a_1+\cdots+a_n)^2 = (n-1)n^2$$

y, por tanto, existirá un $t \in [0,1]$ tal que

$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = \frac{n(n-1)}{2}(1-t^2). \tag{1}$$

Con esta observación, la desigualdad propuesta, en el caso $\alpha = 1$, se transforma en

$$n(n-2) + a_1 a_2 \cdots a_n \ge (n-1)^2(1-t^2). \tag{2}$$

La prueba de (2) será una consecuencia del siguiente lema, cuya demostración se va a posponer al final de la solución.

LEMA. *Si $t \in [0, 1/(n-1))$ y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales no negativos que verifican $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$ y (1), entonces se satisface que*

$$a_1 a_2 \cdots a_n \ge (1+t)^{n-1}(1-(n-1)t). \tag{3}$$

Usando el lema anterior, para obtener (2) cuando $t \in [0, 1/(n-1))$ basta probar que

$$n(n-2) + (1+t)^{n-1}(1-(n-1)t) \ge (n-1)^2(1-t^2),$$

lo que es equivalente a

$$(1+t)^{n-1} \ge 1 + (n-1)t,$$

y que se deduce de la conocida desigualdad de Bernoulli. En el caso $t \in [1/(n-1), 1]$, como $a_1 a_2 \cdots a_n \ge 0$, la desigualdad (2) se seguirá de la desigualdad $n(n-2) \ge (n-1)^2(1-t^2)$, que es cierta, ya que equivale a ser $t \ge 1/(n-1)$.

Supongamos ahora que $\alpha \in (0,1)$. Como, por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se tiene

$$a_1 a_2 \cdots a_n \le \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n = 1,$$

será $(a_1 a_2 \cdots a_n)^\alpha \ge a_1 a_2 \cdots a_n$, y la desigualdad propuesta también será cierta para esos valores de α.

Finalmente, veamos que la desigualdad no se verifica para $\alpha > 1$. Supongamos lo contrario. Usando (1) y tomando los valores $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 1 + t$ y $a_n = 1 - (n-1)t$, con $t \in [0, 1/(n-1))$, la desigualdad propuesta sería equivalente a

$$(1+t)^{\alpha(n-1)}(1-(n-1)t)^{\alpha-1} \ge 1 + (n-1)t,$$

pero esta desigualdad no es posible, ya que

$$\lim_{t \to \left(\frac{1}{n-1}\right)^-} (1+t)^{\alpha(n-1)}(1-(n-1)t)^{\alpha-1} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \left(\frac{1}{n-1}\right)^-} 1 + (n-1)t = 2.$$

Para concluir daremos la prueba del lema auxiliar.

Demostración del lema. En primer lugar debemos observar que, para que se cumpla (1), todos los a_i deben ser estrictamente positivos. En efecto, si alguno de los a_i fuese nulo, (3) sería equivalente a $0 \geq (1+t)^{n-1}(1-(n-1)t)$, y esto implicaría $t \geq 1/(n-1)$, lo que es absurdo.

Entonces consideramos el polinomio

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - a_k),$$

donde $a_k > 0$ para todo k. Es claro que

$$P(x) = x^n - nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}(1-t^2)x^{n-2} + Q(x) + (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

donde $Q(x)$ es un polinomio de grado $n-3$ sin término independiente. La función $f(x) = P(x)/x$ tiene n raíces en $(0, \infty)$ y, por el teorema de Rolle, $f^{(n-3)}$ tendrá al menos tres raíces positivas. Como

$$f^{(n-3)}(x) = \frac{(n-3)!}{2x^{n-2}} g(x),$$

con

$$g(x) = (n-1)(n-2)x^n - 2n(n-2)x^{n-1} + n(n-1)(1-t^2)x^{n-2} - 2a_1 a_2 \cdots a_n,$$

podemos asegurar que $g(x)$ tiene al menos tres raíces positivas. Pero

$$g'(x) = n(n-1)x^{n-3}(x^2 - 2x + 1 - t^2),$$

de modo que $g'(x) = 0$ si y solo si $x = 0$, $x = 1 + t$ o $x = 1 - t$. Así, usando que $g(0) = -2a_1 a_2 \cdots a_n < 0$, que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, y que g tiene al menos tres raíces positivas, deducimos que debe ser $g(1-t) \geq 0$ y $g(1+t) \leq 0$. Pero la desigualdad $g(1+t) \leq 0$ resulta ser equivalente a (3), y la prueba está concluida. □

También resuelto por A. Stadler. Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 400. *Propuesto por Daniel Cao Labora, Universidad de Vigo, Pontevedra.*

Sea d un número entero positivo cualquiera tal que $d + 1$ es primo, y sea n un número natural. Probar que la suma

$$S_{n,d} := \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{1 + j \cdot d}$$

es un número entero si y solo si $n = 0$.

Solución enviada por José Ángel Cid, Campus de Ourense, Universidad de Vigo.

Si p es un número primo se define el *orden p-ádico* de un número natural $m > 0$, $\nu_p(m)$, como la mayor potencia de p que divide a m, es decir, $\nu_p(m) = \alpha$ si y solo si $p^\alpha \mid m$ y $p^{\alpha+1} \nmid m$. Si $a/b \in \mathbb{Q}_+$, se define su orden p-ádico mediante la fórmula

$$\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b).$$

Se puede comprobar que ν_p está bien definido en $\mathbb{Q}_+$, y que cumple las siguientes propiedades:

(i) $\nu_p(x \cdot y) = \nu_p(x) + \nu_p(y)$, $x, y \in \mathbb{Q}_+$.

(ii) Si $x, y \in \mathbb{Q}_+$ con $\nu_p(x) \neq \nu_p(y)$ entonces $\nu_p(x + y) = \text{mín}\{\nu_p(x), \nu_p(y)\}$.

Además, para cualquier $x \in \mathbb{Q}_+$, se cumple que $x \in \mathbb{N}$ si y solo si $\nu_p(x) \geq 0$ para todo primo p. Esta propiedad nos proporciona una estrategia para abordar el problema: si existe un primo p tal que $\nu_p(x) < 0$, entonces x no puede ser un número natural.

Dado el enunciado del problema es razonable probar con el número primo $p = d + 1$ (téngase en cuenta entonces que $d = p - 1$). En efecto, se cumple que para todo $r \in \mathbb{Z}$, con $r \geq 0$:

1. Si $j_r = p^r + p^{r-1} + \cdots + p + 1$ entonces
$$\nu_p(1 + j_r \cdot d) = \nu_p(1 + (p^{r+1} - 1)) = \nu_p(p^{r+1}) = r + 1.$$

2. Si $j_r < j < j_r + p^{r+1} = j_{r+1}$ entonces
$$\nu_p(1 + j \cdot d) = \nu_p(p^{r+1} + (j - j_r) \cdot d) < r + 1.$$

Por tanto, si $j_r \leq n < j_{r+1}$, aplicando reiteradamente la propiedad (ii) se sigue que

$$\nu_p(S_{n,d}) = \nu_p\left(\frac{1}{1 + j_r \cdot d}\right) = -(r + 1) < 0,$$

y el problema estaría resuelto.

El argumento anterior se extiende fácilmente al caso en que $d+1$ es potencia de un primo. El caso general ($d \in \mathbb{Z}$, con $d > 0$) también es cierto, aunque la demostración no es tan sencilla, y tiene una historia interesante que se resume a continuación.

NOTA. El caso $d = 1$ se corresponde con los números armónicos

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Es bien conocido que H_n no es un número entero para ningún $n > 1$, resultado que se remonta a 1915, [10]. En 1918, Kürschák probó que, si a es un entero positivo, los números

$$H_{a,n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \cdots + \frac{1}{a+n}$$

tampoco son enteros, salvo si $a = 1$ y $n = 0$, [7]. Pero cuando los términos de la serie armónica que se suman no son consecutivos, sí es posible obtener un número entero. Por ejemplo, $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, y un ejemplo menos trivial puede verse en [8], donde 453 términos de la serie armónica producen una suma igual a 6. Sin embargo ,ya Nagell en 1923, [9], y, de forma independiente un joven Erdős en 1932, [2], en uno de sus primeros artículos, probaron que la suma de los inversos de los términos de cualquier progresión aritmética

$$H_{a,n,d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+d} + \cdots + \frac{1}{a+nd}, \qquad a,n,d \in \mathbb{Z}, \quad a,n,d \geq 1,$$

no es un número entero (como curiosidad, el teorema de Erdős aparece también comentado en la página 158 de [5] en relación con la tesis doctoral de Ron Graham sobre fracciones egipcias). Puesto que $S_{n,d} = H_{1,n,d}$, el teorema de Nagell y Erdős resolvería el presente problema eliminando la hipótesis sobre la primalidad de $d+1$. En [1, 3, 4, 6] también puede encontrarse información interesante sobre diversas generalizaciones relacionadas con este problema.

Referencias

[1] Y. G. Chen y M. Tang, On the elementary symmetric functions of $1, 1/2, \ldots, 1/n$, *Amer. Math. Monthly* **119** (2012), 862–867.

[2] P. Erdős, Generalización de un teorema elemental de teoría de números de Kürschák (en húngaro, con resumen «Verallgemeinerung eines elementarzahlentheoretischen Satzes von Kürschák» en alemán), *Mat. Fiz. Lapok* **39** (1932), 17–24.

[3] P. Erdős y I. Niven, Some properties of partial sums of the harmonic series, *Bull. Am. Math. Soc.* **52** (1946), 248–251.

[4] Y. L. Feng, S. F. Hong, X. Jiang y Q. Y. Yin, A generalization of a theorem of Nagell, *Acta Math. Hung.* **157** (2019), 522–536.

[5] P. Hoffman, *El hombre que sólo amaba los números*, Ediciones Granica, 2000.

[6] S. F. Hong y C. L. Wang, The elementary symmetric functions of reciprocal arithmetic progressions, *Acta Math. Hungar.* **144** (2014), 196–211.

[7] J. Kürschák, Über die harmonische Reihe, *Math. Phys. Lapok* **27** (1918), 299–300.

[8] G. Martin, Egyptian fraction summing to 6, `https://www.math.ubc.ca/~gerg/papers/downloads/recsum6.pdf`

[9] T. Nagell, Eine Eigenschaft gewisser Summen, *Skrifter Oslo* **13** (1923), 10–15.

[10] L. Theisinger, Bemerkung über die harmonische Reihe, *Monatsh. Math.* **26** (1915), 132–134.

También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Nadal, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.