Matemáticas en las aulas de Secundaria

Sección a cargo de

Luisa Cuadrado

Con esta propuesta quiero inaugurar mi cargo como responsable de esta sección y poner de manifiesto la gran responsabilidad y emoción con la que afronto este reto. Me gustaría invitar a todo el profesorado de matemáticas a que elija este espacio para compartir experiencias enriquecedoras, innovadoras y así dar difusión a esa maravillosa profesión a la que nos dedicamos. Además pretendo que sea un punto de encuentro entre la matemática superior y la que desarrollamos a pie de obra.

Sin levantar el lápiz del papel

por

Luisa Cuadrado y Rafael Crespo

Resumen. En ocasiones, el hecho de generalizar o simplificar conceptos matemáticos para poder explicarlos en niveles inferiores hace que se escapen algunos matices, cuando no errores, sobre los propios conceptos, generando conflictos cognitivos en el alumnado. Este es el caso de la continuidad de las funciones de una variable real. Con este artículo pretendemos unificar criterios sobre esta definición y realizar una propuesta de actividades para el aula, que permitan que el alumnado tenga una noción unívoca del concepto aun cuando se generalice.

1. La importancia de las definiciones

Adaptar los conceptos y definiciones matemáticas a niveles inferiores tanto en la enseñanza secundaria como en bachillerato no es una tarea sencilla, pero es importante darse cuenta de la necesidad de hacerlo con el rigor que la definición requiere.

Cuando presentamos en el aula un concepto o definición nuevo, hemos de ser conscientes de que estamos creando en la psiquis del estudiantado lo que los autores Tall y Vinner, en el artículo «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity» [7], acuñaron como *esquema* *conceptual* o *concept image*. Dicho esquema conceptual está formado por las imágenes mentales, propiedades o procesos que el estudiantado va conformando a lo largo de su vida académica y que no tiene por qué coincidir con la definición formal. Un ejemplo claro de esto es la definición de función. Si bien el estudiantado sabría identificar qué es una función, pocos sabrían redactar una definición formal de la misma; curiosamente, es lo que le ha pasado a lo largo de la historia a la comunidad matemática hasta que Euler dio el primer concepto riguroso y amplio de función en pleno siglo XVIII.

En el transcurso de la vida académica del estudiantado, la imagen conceptual puede ir variando, ampliándose o modificándose, conformando lo que será la idea real que se tiene sobre esa definición. El problema surge cuando los esquemas previos o definiciones entran en conflicto con las definiciones posteriores; entonces la información no puede ser simplemente añadida a la que ya poseen, porque ambas son incompatibles [4].

La continuidad como concepto pone de manifiesto este conflicto, reforzado por las contradicciones que existen en los diferentes libros de texto que se usan en las etapas de secundaria. La consecuencia es que, cuando el alumnado llega a bachillerato o a los primeros cursos universitarios, ha conformado dos ideas diferentes del concepto de continuidad, una de manera gráfica y otra de manera analítica, no teniendo muy claro cuál de las dos es correcta y la relación entre ellas.

A continuación intentaremos poner un poco de luz en la definición de continuidad, matizando los conflictos que generan las diferentes definiciones. Y, como parte final de este artículo, añadiremos propuestas para el aula con la idea de conformar una imagen del concepto de función que trate de impedir la aparición de los conflictos ya mencionados entre el estudiantado.

2. ¿CUÁNDO UNA FUNCIÓN ES CONTINUA?

Es necesario hacer un recordatorio de la definición formal que encontramos en la mayoría de los primeros cursos de Análisis Matemático en las facultades de ciencias, ya que la mayoría de errores radican en la pérdida de información que se produce cuando se aligera la definición formal.

DEFINICIÓN 1 (**Continuidad en un punto**). Sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ una función; diremos que f es *continua* en $p \in D$ si, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $|x - p| < \delta$, $x \in D$, se cumple $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ [5, capítulo 4, págs. 91–94].

Esencialmente, el significado geométrico de esta definición se podría interpretar como se observa en la figura 1, es decir, dada una banda horizontal determinada por las rectas $y = f(p) - \varepsilon$ e $y = f(p) + \varepsilon$, encontramos una banda vertical determinada por las rectas $x = p - \delta$ y $x = p + \delta$ tal que dentro del rectángulo $]p - \delta, p + \delta[\times]f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon[$ encontraremos la gráfica de la función [3, capítulo 9, págs. 183–199].

Además, hay que añadir varias consideraciones dependiendo de las características de p, ya que en los cursos de bachillerato no es esta la definición utilizada para el estudio de la continuidad, por la complejidad que supone. La definición predominante

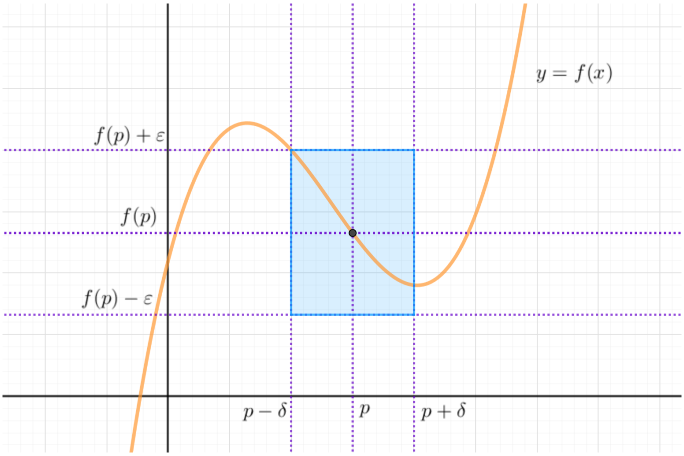

Figura 1: Interpretación gráfica de función continua en un punto.

es la que usa el concepto de límite, para la cual es necesario el concepto de *punto de acumulación*.

Definición 2 (**Punto de acumulación**). Sea $D \subset \mathbb{R}$; diremos que un número real p es un *punto de acumulación* de D si para todo $\delta > 0$ se cumple $]p - \delta, p + \delta[\setminus \{p\} \cap D \neq \varnothing$, es decir, en cada uno de esos intervalos hay puntos de D distintos de p [6, capítulo 21, pág. 637].

Cuando un punto $p \in D$ no es de acumulación se llama *punto aislado*, y por tanto es obvio que se cumplirá que $]p - \delta, p + \delta[\cap D = \{p\}$ para un cierto $\delta > 0$.

Definición 3 (**Límite y continuidad**). Sea $f : D \to \mathbb{R}$ una función, y p un punto de acumulación de su dominio; diremos que f tiende a $l \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a p si, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - p| < \delta$, $x \in D$, se cumple $|f(x) - l| < \varepsilon$.

En tal caso, escribimos

$$\lim_{x \to p} f(x) = l.$$

Por tanto, si una función es **continua** en un **punto** p **de su dominio**, que es de **acumulación**, se cumplirá que

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Por otra parte, si p es un **punto aislado, la función siempre será continua en ese punto** (basta tomar, para cualquier ε, el correspondiente δ de la definición de punto aislado).

Es importante destacar que la continuidad es un concepto local y se realiza punto a punto. Al hablar de la continuidad de la función, solo se estudiará en los puntos de su dominio, que clasificaremos bien como aislados, bien como de acumulación [1, sección 4.2, págs. 115–117].

3. Errores sobre la continuidad

Para observar cuáles son los errores comunes que se cometen sobre el concepto de continuidad, primero analizaremos algunos libros de texto de 3º ESO de diferentes editoriales, donde el concepto se ve desde un punto de vista gráfico, para pasar a los de bachillerato, cuando se introduce de manera analítica.

Veamos tres definiciones encontradas en libros de texto de 3º ESO, siendo la primera de ellas la más generalizada:

DEFINICIÓN 4A: *«Una función f es continua si podemos dibujarla sin levantar el bolígrafo del papel».*

DEFINICIÓN 4B: *«Una función f es continua si su gráfica no tiene saltos».*

DEFINICIÓN 4C: *«Una función f es continua en un intervalo de su dominio si su gráfica se puede trazar en ese intervalo de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel».*

Apliquemos estas definiciones a la función $f(x) = 1/x$ representada en la figura 2.

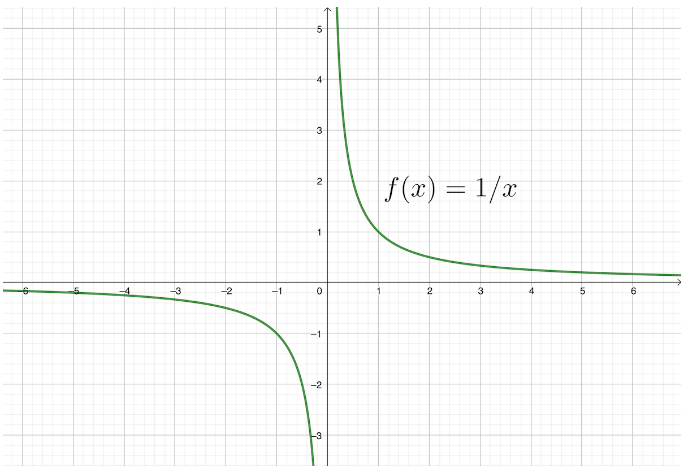

Figura 2: Función de proporcionalidad inversa.

¿Esta función se traza levantando el bolígrafo del papel? Sí. Por tanto esta función no es continua según la definición 4A. ¿Tiene saltos? Sí. Por tanto no es continua según la definición 4B. En cambio, según la definición 4C la función dependería de los intervalos de su dominio. Es evidente que existen contradicciones entre ellas y la definición formal; analicémoslas.

En las definiciones 4A y 4B podemos observar que, además de no considerar si los puntos donde se produce la discontinuidad son o no del dominio, están confundiendo continuidad con contigüidad. Este error, generalizado en secundaria, tiene su origen en una de las primeras definiciones de continuidad formulada en 1791 por Louis Arbogast: «La ley de la continuidad se rompe de nuevo cuando las diferentes partes de una curva no se unen entre sí [. . .] Llamaremos a este tipo de curvas no contiguas, porque todas sus partes no son contiguas, y lo mismo ocurre con las funciones no contiguas» [2]. Por tanto, es obvio que no es completamente acertada una definición que hable exclusivamente de trazados y/o saltos.

En cuanto a la definición 4C, da por hecho que la función estará definida a intervalos, lo que descarta los puntos aislados que serían puntos del dominio de la función y en los que habría que hacer especial mención. ¿A qué buena parte del alumnado que conoce el concepto de continuidad sorprenderíamos al afirmar que la función $1/x$ es continua?

Analicemos ahora algunos libros de texto del primer curso de bachillerato. En todos ellos se define la continuidad de una función en un punto en base a la definición de límite (definición 3). Cabe destacar que solo en uno de esos textos se indica claramente que el punto donde se va a analizar la continuidad debe pertenecer al dominio de la función.

El conflicto conceptual aparece cuando se intenta hacer una clasificación de los tipos de discontinuidades, a saber:

1. <u>*Discontinuidad evitable*</u>: Una función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en un punto $x = a$, cuando:

   a) La función no está definida en $x = a$ pero existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

   b) La función está definida en $x = a$ y existe $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

   (En tres de las cuatro fuentes consultadas se asume que la función puede no estar definida en a.)

2. <u>*Discontinuidad inevitable de salto finito*</u>: Una función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto finito en un punto $x = a$, si existen sus límites laterales en ese punto, pero son distintos, siendo el salto la diferencia entre ambos resultados.

3. <u>*Discontinuidad inevitable de salto infinito*</u>: Una función $f(x)$ presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en un punto $x = a$, si al menos alguno de los límites laterales es infinito. (En una de las editoriales, a esta discontinuidad se la denomina *discontinuidad asintótica*).

El primer conflicto que subyace en todas las definiciones, y que produce mayor impacto, es que para poder clasificar una discontinuidad es necesario que el punto donde la estudiamos esté en el dominio, por lo que la definición de discontinuidad evitable sería incorrecta. Este mismo razonamiento se usaría para las discontinuidades de salto finito e infinito, ya que debería aclararse como condición necesaria la pertenencia del punto al dominio.

Otra matización importante que puede evitar un concepto erróneo de la continuidad de una función, es cómo se redactan tanto las preguntas como las respuestas al realizar el análisis de la continuidad. Estamos acostumbrados a usar frases como: «la función es continua en todos los reales menos en. . . », cuando realmente deberíamos enfocarnos en «los puntos de discontinuidad son. . . »

Un ejemplo de ello sería el análisis de la continuidad de una función racional, por ejemplo $f(x) = x/(1 - x^2)$.

El alumnado puede encontrar un texto donde se le diga que la función es continua en todos los reales menos en $x = 1$ y $x = -1$. En cambio, como la función no está definida en esos puntos, sería más esclarecedor decir que la función es continua en su dominio, es decir, no presenta ninguna discontinuidad. Ahora bien, para cualquier valor que le diéramos tanto en $x = 1$ o en $x = -1$, nos conduciría a una discontinuidad de salto infinito, pero sería otra función. Cosa diferente es que la gráfica de la función tenga las rectas $x = 1$ y $x = -1$ como asíntotas.

Se presenta un caso nada desdeñable en el estudio de la continuidad en los extremos de un intervalo, por ejemplo la función $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$. Es necesario introducir los conceptos de límite por la izquierda y por la derecha, aunque alguno de ellos no tenga sentido, como el caso citado. En nuestro ejemplo, la función cumple la definición de límite en el punto 0, que es de acumulación del dominio, pese a no estar definida en los negativos y es, por tanto, continua en $x = 0$. Quizás el error provenga en pensar en la tangente a la curva en cero como una vertical.

Finalmente, constatamos que toda aproximación entendible en cursos elementales de una clasificación de discontinuidades será insuficiente, ya que el alumnado que consulte bibliografía sobre el tema puede encontrarse con funciones cuyas discontinuidades no tengan cabida en ninguno de los casos citados, como las funciones de tipo Dirichlet de las que hablaremos en la parte final.

4. Propuestas para el aula

4.1. Propuestas para el estudio de la continuidad gráficamente. La continuidad de Mario

La primera propuesta va dirigida al alumnado que tenga una noción casi nula del concepto de continuidad de una función, y se orientará a introducir dicho concepto de manera gráfica.

La idea es presentar las funciones como el recorrido del personaje del famoso videojuego *Mario Bros.*, y analizar cuáles son los movimientos que este realiza para «pasarse toda la pantalla». Para ello, cometemos la «infracción» de considerar los puntos como ladrillos y el objetivo es que Mario pueda recorrer todos los ladrillos. Las restricciones que se deben tener en cuenta son que Mario no puede saltar al vacío si hay huecos, tanto si el hueco es de un ladrillo, como si es de más.

Además, para evitar la idea de que se confunda recorrer con contigüidad, nos permitiremos otra licencia: utilizaremos las famosas «tuberías» del juego para que Mario pueda seguir recorriendo los ladrillos pese a que el tramo no continúe. La aparición de una tubería *no* indicará que la función sufre una discontinuidad, simplemente que el camino continúa por otra parte, como pasa en el juego.

Otra de las ventajas que nos produce la existencia de tuberías es que nos servirá para hacer un movimiento habitual en videojuegos como el de Mario. Dicho movimiento consiste en que un personaje salga por arriba de la pantalla y aparezca por abajo; así podremos caracterizar funciones con asíntotas verticales, ya que la tubería permitiría salir por la parte superior de la pantalla ($+\infty$), y volver por la parte inferior ($-\infty$), o viceversa.

Consideraremos que el camino que recorre Mario sufre una discontinuidad en estos tres casos:

- Cuando uno de los ladrillos que deberían seguir el camino está más alto o más bajo (discontinuidad evitable), ya que Mario modifica su camino con dos pequeños saltos, uno para llegar al ladrillo y otro para bajar.
- Cuando, en vez de un solo ladrillo, una colección de ladrillos está subido o bajado (discontinuidad de salto finito), ya que Mario modifica su camino porque debe dar un salto para continuarlo.
- Cuando, pese a haber salido por una tubería vertical (asíntota vertical) de la pantalla, hay un ladrillo suelto o una colección de ladrillos en el lugar donde debería continuar el camino. Diríamos entonces que Mario debe bajar dando un salto infinito para poder llegar a ese ladrillo.

En cuanto a los contenidos previos, se sobreentiende que el alumnado ya es conocedor de qué es el dominio de una función.

Empezaríamos mostrando funciones constantes y realizando diferentes modificaciones, en cuanto a su dominio y a sus tramos, para ir forjando una imagen clara de la definición.

En la figura 3 vemos la parte inicial de la propuesta. Se explicaría que se trata de una función constante cuyo dominio son todos los reales y cuya gráfica es una recta horizontal, por tanto es continua en todos los puntos, ya que Mario recorre todos los puntos del dominio sin interrupciones.

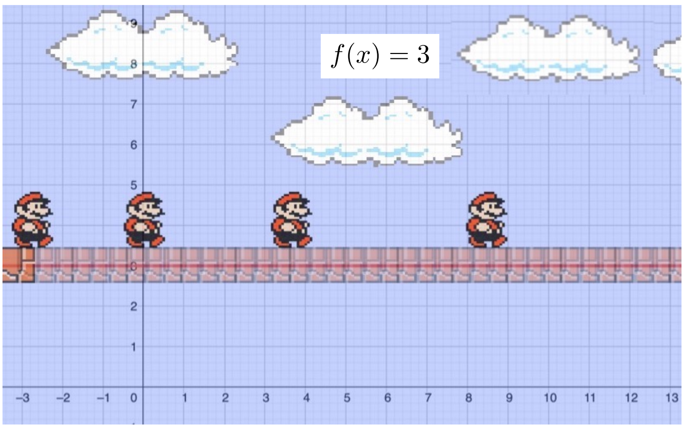

Figura 3: La función constante.

Para que la idea de continuidad no se relacione exclusivamente con las funciones lineales, se añade la representación de la función cuadrática (figura 4). Antes de comenzar se analizará su dominio.

La idea es que el alumnado entienda que el camino que recorre Mario no tiene por qué ser lineal, puede tener escalones, pero que en ningún caso hay interrupciones para

Figura 4: La función cuadrática.

empezarlo o acabarlo y, además, Mario debe recorrer todos los ladrillos sin dejarse ninguno.

Después de estas dos representaciones empezaríamos a hacer modificaciones distinguiendo funciones, unas con discontinuidades y otras con un dominio diferente al de todos los reales, para generar la deseada imagen conceptual.

La siguiente función que se propondrá será la misma función constante de la primera propuesta a la que se le ha eliminado un punto, por ejemplo el punto $(2, 3)$. La representaríamos usando el software de geometría dinámica GeoGebra y se preguntaría al alumnado *¿cuál es el dominio de la función?* Una vez aclarado esto, la siguiente pregunta sería *¿es posible que Mario recorra todos los ladrillos?, ¿cómo?* Es el momento de hablar de «*tuberías*». La analogía es que cuando llega lo más próximo a $x = 2$ el camino acaba y Mario no podría saltar al vacío o al hueco que queda en $x = 2$; pero el camino continúa en otro lugar. Es como si en el juego entrara por una tubería y saliera por otra (como en un agujero de gusano). Se explicaría que eso no indica que haya una discontinuidad, simplemente que entra por un lado y sale por otro. En la figura 5 se muestra cómo quedaría el esquema con las tuberías.

Diríamos que esta función es continua en todo su dominio, es decir en $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, porque Mario no ha tenido que realizar saltos. En $x = 2$ no hay una discontinuidad, simplemente el camino no existe, es decir, que no es del dominio.

Después de esta conclusión, haríamos una pequeña modificación de la misma función y se le preguntaría al alumnado *¿qué pasaría si además de faltar un punto, la función no continuara por el mismo camino?* La imagen quedaría como nos muestra la figura 6.

Se espera que lleguen a la conclusión de que se trata del mismo caso, ya que no nos importa tanto la manera en la que sigue, sino la posibilidad o no de recorrer todos los ladrillos. Con esto, intentamos reforzar la idea de los intervalos de continuidad además de descartar la equivalencia entre continuidad y contigüidad. Así se concluiría que la función es continua en todo su dominio.

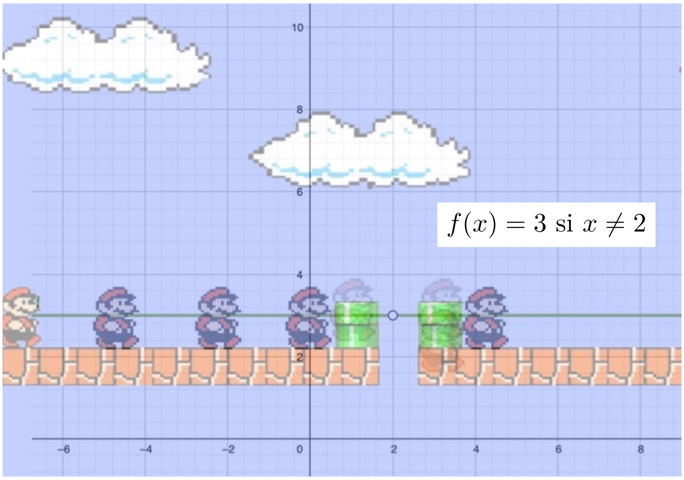

Figura 5: Función constante excepto en $x = 2$.

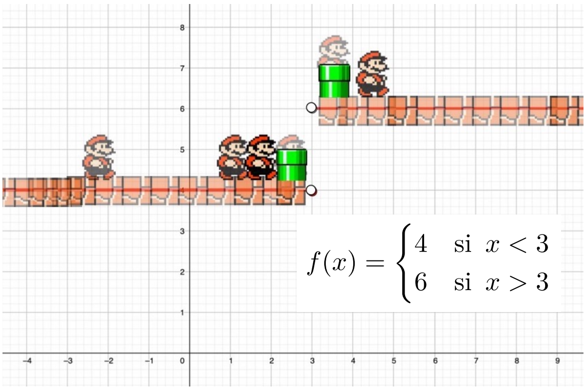

Figura 6: Función definida a trozos continua con dos intervalos.

Una vuelta más de rosca es cuando esas ramas se alejan, dejando un intervalo entre ellos. *¿Qué pasaría si todos los ladrillos de la derecha los desplazo y dejo un hueco?* Obtenemos la figura 7.

El primer trabajo que habría que realizar sería el cálculo del dominio. Se preguntaría, además, *¿importaría que se cogieran, o no,* $x = 3$ *y* $x = 5$*?, ¿cambiaría algo el lugar de la tubería?* La idea es que entiendan que el camino que recorre Mario no tiene saltos ni modificaciones y que, como en el caso anterior, la función es continua en su dominio. Lo que ocurre es que en este caso en vez de faltar un ladrillo (punto) faltan unos cuantos más (intervalo).

Una manera de enriquecer esta actividad sería representar la gráfica y que fuera el alumnado quien decidiera cuándo pone tuberías y cuándo no.

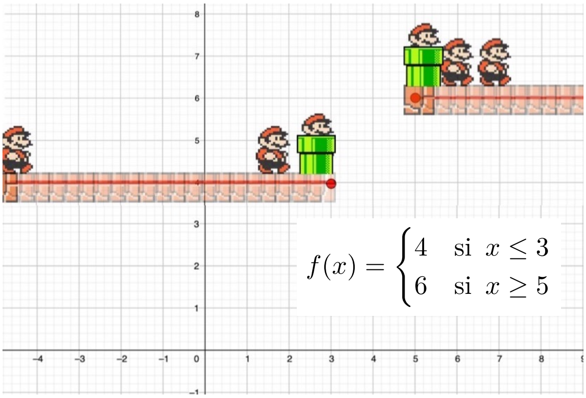

Figura 7: Función definida a trozos continua con intervalos separados.

Por último, se hablaría de añadir un punto aislado, utilizando la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 2, \\ 4 & \text{si } x = 4, \\ 5 & \text{si } x > 5. \end{cases}$$

Además de analizar el dominio de la función, es importante que el alumnado entienda que Mario debe recorrer todos los cuadrados sin dejarse ninguno (dominio) y que no puede saltar al vacío. En la figura 8 se muestra cómo quedaría el esquema con las tuberías.

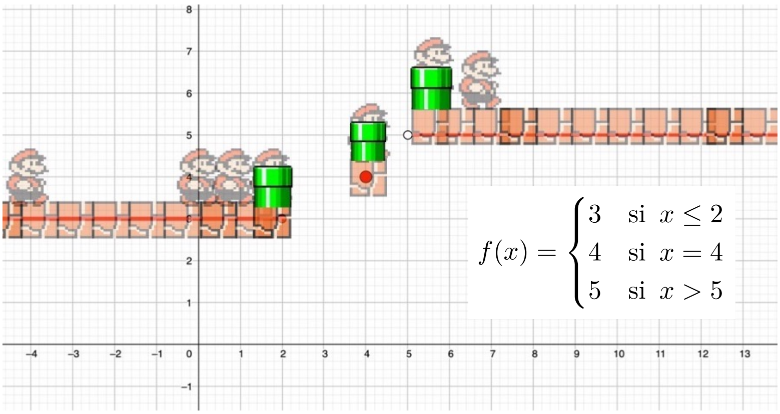

Figura 8: Función continua con dos intervalos y un punto aislado.

Como la condición es que recorra todos los ladrillos, es necesario que haya una tubería, ya que sería la única solución para llegar a ese punto aislado porque no podría saltar hacia él, puesto que caería al vacío. Por tanto, podemos concluir que Mario no ha tenido que realizar saltos en el mismo camino, sino que ha entrado y salido por la tubería en todos los ladrillos/puntos del dominio, lo que es equivalente a que la función es continua en su dominio.

Una vez analizadas estas funciones es el momento de presentar el primer tipo de discontinuidad. La propuesta será el análisis de una función constante a la que se le ha movido un ladrillo, es decir la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 4, \\ 3 & \text{si } x \neq 4. \end{cases}$$

Se pide al alumnado que calcule cuál es su dominio y que piense si es necesario o no añadir tuberías. *¿Podrá Mario recorrer todos los ladrillos?* En este caso no hay huecos, simplemente un ladrillo se ha subido un poco.

Es entonces cuando se les dice que Mario deberá hacer una modificación en cómo recorre el camino, dando un pequeño salto para subir a ese ladrillo y después bajando para seguir su camino. La figura 9 muestra cómo quedaría el esquema de las tuberías.

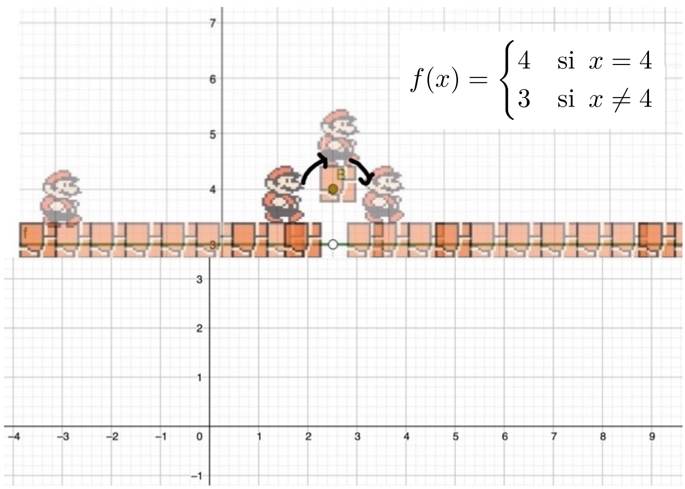

Figura 9: Discontinuidad evitable.

Como Mario debe hacer una pequeña modificación en su camino, concluiríamos que la función es discontinua en ese punto, además la llamaríamos evitable ya que solamente con bajar el ladrillo a su sitio la función sería continua (aunque fuese otra).

Lo natural después de este paso es mover todo ese bloque de ladrillos, haciendo que, además de ese ladrillo que se ha subido, todo el camino continuara a partir de él. Esto se muestra en la figura 10. Se trata de la función

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \leq 3, \\ 6 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

En esta nueva función se vuelve a hacer la reflexión de si su dominio son todos los reales o no, y si existen huecos. Se vuelve a insistir en que, al no haber huecos, Mario debe hacer un pequeño salto para seguir su camino, y se dice entonces que la función tiene en $x = 3$ una discontinuidad que llamaremos de salto finito.

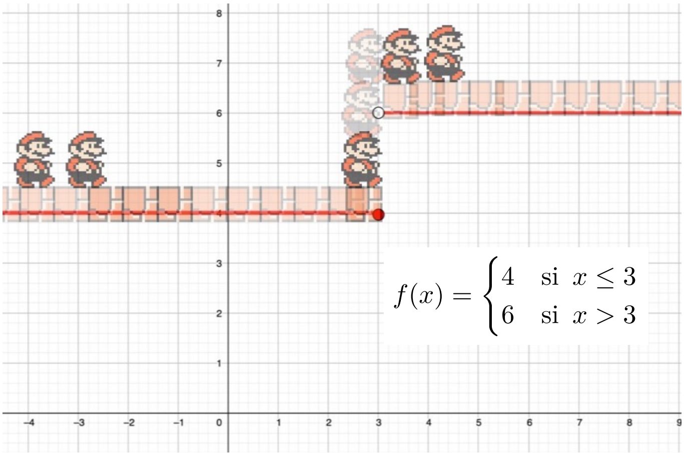

Figura 10: Discontinuidad de salto.

Y por fin llegamos a la más complicada, la discontinuidad de salto infinito y sus variantes. Aquí, como ya hemos explicado, colocaremos la tubería en la parte superior o inferior de la pantalla, según convenga para identificar que el camino de Mario se va al infinito; además, reforzaremos el concepto de que, pese a que un punto no esté en el dominio, el camino es continuo.

La primera función que representamos es $1/x$, preguntando al alumnado si será necesario o no poner tuberías. La contestación sería que sí es necesario poner este tipo de tuberías especiales que hacen que Mario salga por un lado de la pantalla y aparezca por el otro porque en medio hay un ladrillo que no está y se produciría un salto en el vacío. En la figura 11 se muestra cómo quedaría el esquema con las tuberías.

Es evidente que Mario entra y sale por la tubería como en las otras ocasiones y no hace ninguna modificación en su camino, por lo que podemos decir que la función es continua en su dominio.

Pero *¿qué pasaría si añadimos un ladrillo en el punto $x = 0$? ¿Lo podría recorrer?* La figura 12 muestra cómo quedaría el esquema con las tuberías.

Aquí es necesario que el alumnado entienda que Mario coge la tubería para salir, pero que, si saliera por la otra directamente, se dejaría un ladrillo por recorrer; pero es un caso diferente al de la figura 8, ya que en este caso el dominio de la función sí son todos los reales, es decir, que hay ladrillos en toda la pantalla aunque algunos no se vean. Así que la única manera de recorrer el que queda suelto es salir de la pantalla, volver a entrar dando un «gran salto» (salto infinito), usar ese ladrillo y después volver a salir, como si «llevara una cuerda». En consecuencia, en ese punto

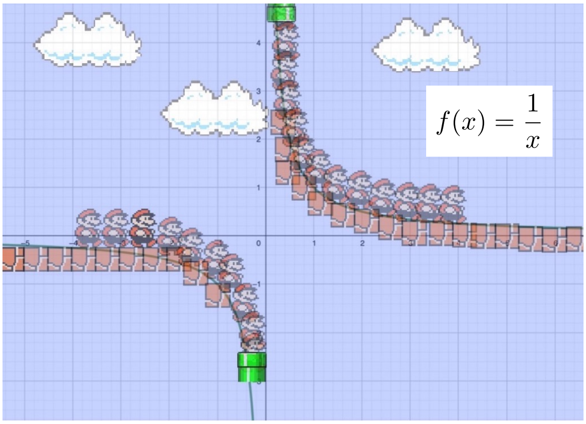

Figura 11: Representación de la función $f(x) = 1/x$.

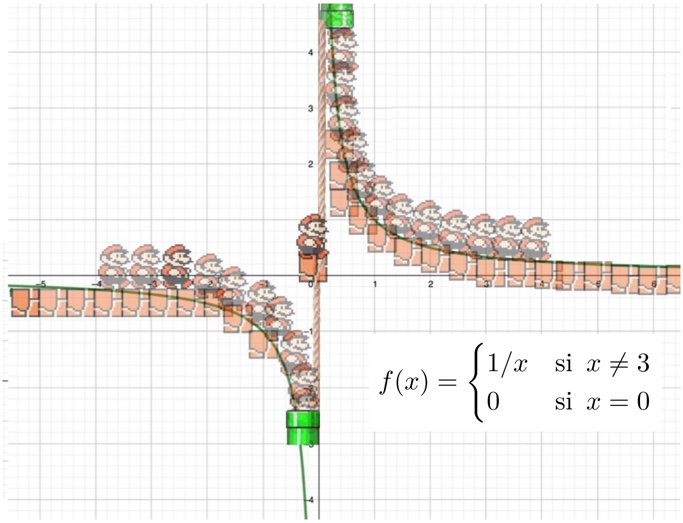

Figura 12: Discontinuidad de salto infinito.

ha tenido que hacer una modificación de su camino realizando un «gran salto» y, por tanto, hay una discontinuidad que llamaremos de salto infinito.

Otra variante de este tipo de funciones, sería la representada en la figura 13. Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-3} & \text{si } x < 3, \\ x - 1 & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

Primero se les presentaría la función y, como en las ocasiones anteriores, se calcularía su dominio. El alumnado deberá darse cuenta de que hace falta poner una

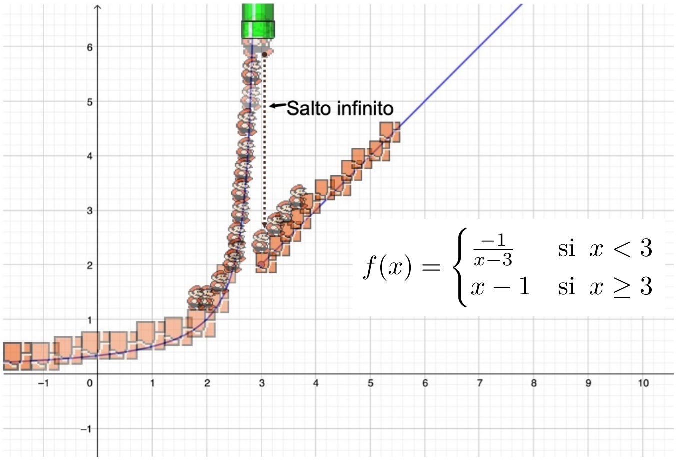

Figura 13: Discontinuidad de salto infinito (segundo ejemplo).

tubería porque Mario tiene que seguir el camino hacia el infinito, pero que seguidamente tiene que volver a saltar para poder coger la otra rama del camino, y que no hay ningún vacío que le permita hacer el camino sin ese salto. Además se concluiría que en ese punto/ladrillo, $x = 3$, se produce una discontinuidad de salto infinito.

Todos estos ejemplos pueden ir modificándose añadiendo funciones diferentes de las constantes. De esta manera, crearíamos una batería de ejercicios para que el alumnado asimile y se conforme una imagen de la definición de la continuidad de una función en cada punto. Además, recalcamos la importancia de hacerse preguntas y plantear alternativas, una vez se analiza la función, para ir más allá del simple concepto.

4.2. Propuesta para el estudio de la continuidad en funciones con contexto. El conflicto cognitivo

Las propuestas que vienen a continuación son indicadas para crear un conflicto cognitivo que haga cambiar la imagen conceptual del alumnado de bachillerato, que ya ha creado un concepto erróneo de lo que es una función continua. Antes de comenzar con la batería de ejercicios, se recalcaría la importancia de que el estudio de la continuidad de una función en un punto pasa por la condición de que ese punto esté en el dominio.

La línea de pensamiento sería la siguiente: empezaríamos haciendo un diálogo socrático, preguntando a varias personas de la clase *¿le has dado de comer al gato?* [2]. Si analizamos las respuestas, a la contestación *«no»*, se le pueden asimilar varias alternativas. No, porque no tengo gato, o no porque realmente no le he dado de comer. Esto es exactamente la diferencia entre que una función no sea continua en un punto o que simplemente no esté definida en dicho punto.

Para reforzar este debate se presentarían dos funciones: $f(x) = \frac{1}{x+5}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

Si f tiene una discontinuidad en $x = -5$, ¿no tendría entonces g una discontinuidad también en ese punto?

Ahora veamos las funciones definidas a trozos que tanto se estudian en los cursos de bachillerato. Las propuestas habituales se focalizan en añadir puntos para que la función sea continua, pero ¿y si la propuesta la hacemos a la inversa? Sea la función siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x \leq 3, \\ 6x - 1 & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

¿Cómo podrías hacer para que fuera continua? Las soluciones tradicionales pasarían por cambiar alguna de las funciones por la que está compuesta, pero ¿y si modificamos el dominio? Solamente quitando el punto $x = 3$, la función pasa a ser una función (distinta) y continua en su dominio.

Por último, y si el nivel de conocimientos del estudiantado es el suficiente, sobre todo en bachilleratos de ciencias, se podrían definir funciones que fueran discontinuas en todos los puntos. Consideremos la función de Dirichlet que toma el valor 1 en los racionales y cero en los irracionales. Esto es:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si proponemos al estudiantado que dibuje la función con el software o las *apps* habituales, o bien dejaría la pantalla en blanco o la representación que daría serían dos rectas paralelas (que engañosamente podría indicar que no es una función). El problema conceptual es entender que en todo intervalo hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

5. Conclusión

Al encontrarnos en el aula, a distintos niveles, hay que poner al alumnado frente a un concepto que debe incorporar a su particular «pecunio matemático». Si, incluso con buena fe, le escondemos información, o se la presentamos incompleta, podemos generarle bien en su aprendizaje presente o futuro, conflictos cognitivos. Tengamos en cuenta que no solo nos tiene a nosotros, profesorado de paso, sino al libro de texto (si existe), a profesorado virtual en YouTube, apuntes a capazos en la red, e incluso comparaciones entre diferentes profesores o centros. Hoy todo se sabe y se discute.

La primera reacción ante un conflicto es la negación de la presunción de inocencia del profesorado *«Oiga, eso está mal, que lo he visto en…»*. En segundo lugar el edificio de las matemáticas se tambalea si, eligiendo tres libros, una profesora y un profesor distintos, dan cinco versiones diferentes. La unicidad de criterios brilla por su ausencia y clama una reflexión, cuanto menos.

Con el ejemplo de la continuidad (no es el único, desgraciadamente), hemos querido poner de manifiesto la necesidad de armonizar tanto los mensajes, como los niveles a los que se dirige ese mensaje, desde la secundaria al bachillerato e incluso a los primeros cursos universitarios. Nuestra experiencia nos dice que es falsa la creencia de que el alumnado no entiende definiciones rigurosas, siempre y cuando vayan acompañadas de ejemplos y contraejemplos que las enmarquen adecuadamente. Quizás porque aprendimos el épsilon y el delta sin más, nos levanta ronchas. Sin embargo, cuando nuestro colega de Física les pregunta qué error tienen de margen en cada factor para garantizarse un error previamente fijado del producto, nadie se escandaliza.

La mente humana evoluciona de lo particular a lo general. Encontrar los escalones adecuados para acompañar al alumnado es nuestra misión, adaptándolos a las circunstancias y momentos.

REFERENCIAS

[1] S. ABBOT, *Understanding Analysis*, 2.ª ed., UTM, Springer, 2015.

[2] R. DIMITRIĆ, Is the function $1/x$ continuous at 0?, *ArXiv: General Mathematics*, 2012, `https://arxiv.org/abs/1210.2930`.

[3] M. DE GUZMÁN, *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático: Elementos básicos del análisis*, 2.ª ed., Pirámide, 1996.

[4] F. MARTÍNEZ Y J. J. MARTÍNEZ, El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones, *Épsilon* **31** (2014), no. 1, 9–20.

[5] W. RUDIN, *Principios de análisis matemático*, 3.ª ed., McGraw Hill, 1980.

[6] M. SPIVAK, *Calculus: Cálculo infinitesimal*, 2.ª ed., Reverté, 1988.

[7] D. TALL Y S. VINNER, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educ. Stud. Math.* **12** (1981), 151–169.

LUISA CUADRADO SÁEZ, COMPLEJO PREUNIVERSITARIO MAS CAMARENA, PATERNA (VALENCIA)
Correo electrónico: `luisa.cuadrado7@gmail.com`

RAFAEL CRESPO GARCÍA, DEPARTAMENT D'ANÀLISI MATEMÀTICA, UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Correo electrónico: `rafael.crespo@uv.es`