Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2022.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 425. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Para cada $x \geq 0$, sea $y = g(x)$ la única raíz positiva de la ecuación $ye^y = x$. Probar que

$$\int_0^\infty \frac{g^2(xe^{-x})}{x}\,dx = \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{6}.$$

Problema 426. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales positivos tales que $a \geq b \geq c$ y $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Probar que

$$a + b + c + \frac{b(a^2 - c^2)}{2ac} \geq 3.$$

Problema 427. *Propuesto por Marian Cucoanes, Rumanía, y Juan José Isach Mayo, España.*

Se considera un triángulo ABC tal que $3\angle BAC + \angle ACB = 2\pi$. Sean I y r el incentro y el inradio del triángulo ABC. Sean J y r_1 el incentro y el inradio del triángulo AIC. Sea D el punto de intersección de las rectas IJ y AC. Finalmente, sean K y r_2 el incentro y el inradio del triángulo AID. Probar que

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}.$$

PROBLEMA 428. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si $0 < a \leq b$, probar que

$$\left(\int_a^b \sqrt{\log^2 x + 2\log x + 2}\, dx \right)^2 \geq (b-a)^2 + \log^2 \left(\frac{b^b}{a^a} \right).$$

PROBLEMA 429. *Propuesto por Emilio Fernández Moral, Logroño, y Mercedes Sánchez Benito, Madrid.*

En un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa BC, sean K, L y M, respectivamente, los puntos medios de los lados AB, BC y AC, sea Γ la semicircunferencia de diámetro BC que contiene el punto A, y sean r_1 y r_2, respectivamente, las mediatrices de los segmentos AB y AC. Sean $D = r_1 \cap \Gamma$ y $E = r_2 \cap \Gamma$.

Por un lado, sean γ_1 la circunferencia inscrita en el triángulo CML y γ_1^* la circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente exteriormente a γ_1. Sea K' el punto de intersección entre γ_1^* y r_1 para el que se cumple que D es interior al segmento KK'. Sea R' el punto medio de $K'D$ y sea R el simétrico de R' respecto de D. Sea Ψ_1 la elipse de focos R y R' que pasa por K'.

Por otro lado, sean γ_2 la circunferencia tangente a la recta AB en el punto K y tangente también a la recta BC, y γ_2^* la circunferencia que pasa por los puntos A y C y es tangente exteriormente a γ_2. Sean H y H' los puntos de intersección entre γ_2^* y r_2, denominando H a aquel para el que se cumple que E es interior al segmento MH. Sea P el punto medio de EH y sea P' el simétrico de P respecto del punto medio J del segmento HH'. Sea Ψ_2 la elipse de focos P y P' que pasa por H.

Calcular el cociente entre las áreas interiores a Ψ_1 y Ψ_2 en función de los lados de ABC.

PROBLEMA 430. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los números de Fibonacci, definidos por la relación de recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{8}}\, dx \geq \frac{\alpha}{4e},$$

donde $a_n = \sqrt[n]{n!\, F_n}$ y $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.

Problema 431. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales no negativos y λ un número real tal que $\lambda \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Probar que

$$\frac{1}{\lambda+1}\sum_{k=1}^{n} e^{a_k} \geq \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda+e^{a_k}}.$$

Problema 432. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Determinar los $a, b, c \in \mathbb{N}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-c}}}} = c, \\ \sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+c}}}} = c, \\ \sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{a-\sqrt{b+c}}}} = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Soluciones

Problema 401. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Probar que

$$\int_0^\infty \frac{\log\left(x^4+6x^2+1\right)}{1+x^2}\,dx = \pi\log\left(2+2\sqrt{2}\right).$$

Solución enviada por Daniel Văcaru, Piteşti, Rumanía.

Como

$$x^4+6x^2+1 = (x^2+(1-\sqrt{2})^2)(x^2+(1+\sqrt{2})^2),$$

denotando por I la integral a evaluar, tenemos $I = I_1 + I_2$, donde

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\log(x^2+(1-\sqrt{2})^2)}{1+x^2}\,dx \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_0^\infty \frac{\log(x^2+(1+\sqrt{2})^2)}{1+x^2}\,dx.$$

Ahora, usando la identidad [1, 4.295.1]

$$\int_0^\infty \frac{\log(\mu x^2+\beta)}{\gamma+x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma}}\log(\sqrt{\mu\gamma}+\sqrt{\beta}), \quad \operatorname{Re}\beta,\, \operatorname{Re}\mu > 0, \quad |\arg\gamma| < \pi, \quad (1)$$

deducimos que

$$I_1 = \pi\log\sqrt{2} \qquad \text{y} \qquad I_2 = \pi\log(2+\sqrt{2}),$$

y el resultado se obtiene inmediatamente.

REFERENCIAS

[1] I. S. Gradshteyn y I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, séptima edición, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

También resuelto por A. Álamo, B. Bradie, L. Glasser, G. C. Greubel, Kee-Wai Lau, J. C. López y R. Mendoza (conjuntamente), J. Nadal, J. Polo, P. Refolio, B. Salgueiro, A. Stadler y el proponente.

NOTA. La mayor parte de las soluciones recibidas basan su argumentación en probar la identidad

$$\int_0^\infty \frac{\log(a+x^2)}{1+x^2}\,dx = \pi\log(1+\sqrt{a}), \qquad a \geq 0. \tag{2}$$

Es fácil demostrar este resultado usando derivación bajo el signo integral. En efecto, si tomamos

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\log(a+x^2)}{1+x^2}\,dx, \qquad a \geq 0,$$

con el cambio de variable $x = 1/t$ es claro que

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\log(1/t^2)}{1+t^2}\,dt = -F(0)$$

y, por tanto, $F(0) = 0$. Además, justificando adecuadamente la derivación de la integral,

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty \frac{dx}{(a+x^2)(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{1-a}\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{a+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{2\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}, \qquad a \geq 0. \end{aligned}$$

(El caso $a = 1$, en un principio, debería estudiarse de manera independiente pero es fácil comprobar que $F'(1) = \pi/4$ y la identidad anterior también se cumple en este caso.) Así,

$$F(a) = F(0) + \int_0^a F'(x)\,dx = \pi\log(1+\sqrt{a}).$$

Finalmente, puede comprobarse de manera elemental que (2) permite dar una sencilla prueba de (1) cuando $\beta \geq 0$ y $\mu, \gamma > 0$.

PROBLEMA 402. *Propuesto por Ángel Plaza de la Hoz, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, Las Palmas.*

Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los números de Pell, que satisfacen la relación de recurrencia $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$, con $n \geq 1$, y valores iniciales $P_0 = 0$ y $P_1 = 1$. Probar que

$$P_n^2 + \sum_{k=0}^{n} P_k^2 = \frac{P_{2n+2} + P_{2n-1} - 3(-1)^n}{8}, \qquad n \geq 1.$$

Solución enviada (independientemente) por B. Bradie, Christopher Newport University, Newport News, VA, EE.UU., y G. C. Greubel, Newport News, VA, EE.UU.

Sea $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los números de Pell-Lucas, definidos por la misma relación de recurrencia que los números de Pell pero con los valores iniciales $Q_0 = Q_1 = 2$. Tomando $\alpha = 1+\sqrt{2}$ y $\beta = 1-\sqrt{2}$, los números de Pell y de Pell-Lucas admiten las fórmulas de tipo Binet

$$P_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha^n - \beta^n) \qquad \text{y} \qquad Q_n = \alpha^n + \beta^n. \tag{1}$$

Notar que podemos considerar $Q_{-1} = -2$ cuando sea necesario.

Puesto que $\alpha\beta = -1$, las relaciones (1) implican inmediatamente que

$$P_n^2 = \frac{1}{8}(Q_{2n} - 2(-1)^n).$$

Así, reescribiendo la relación de recurrencia para los números de Pell-Lucas de la forma

$$Q_{2n} = \frac{1}{2}(Q_{2n+1} - Q_{2n-1}),$$

tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} P_k^2 &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n}(Q_{2k} - 2(-1)^k) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(Q_{2k+1} - Q_{2k-1}) - (1+(-1))^n\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}(Q_{2n+1} - Q_{-1}) - (1+(-1))^n\right) = \frac{1}{16}(Q_{2n+1} - 2(-1)^n).\end{aligned}$$

Finalmente, usando la identidad $Q_n = P_{n+1}+P_{n-1}$, que nuevamente puede deducirse de manera elemental de (1), deducimos que

$$\begin{aligned}P_n^2 + \sum_{k=0}^{n} P_k^2 &= \frac{1}{8}(Q_{2n} - 2(-1)^n) + \frac{1}{16}(Q_{2n+1} - 2(-1)^n)\\ &= \frac{1}{16}(Q_{2n+1} + 2Q_{2n} - 6(-1)^n) = \frac{1}{8}(P_{2n+2} + P_{2n-1} - 3(-1)^n),\end{aligned}$$

tal y como queríamos probar.

También resuelto por M. Gea, L. González, V. Milchev (dos soluciones), J. Nadal, J. Polo, C. Sacristán, A. Stadler, S. Stewart y el proponente.

Nota. La mayor parte de las soluciones recibidas han basado su argumentación en el uso de las fórmulas de tipo Binet para los números de Pell y Pell-Lucas. Sin embargo, en algunas soluciones han aparecido interesantes propiedades de los números de Pell.

Por ejemplo, en la solución enviada por Polo se utiliza la identidad

$$P_{n+k} = P_{n+1}P_k + P_nP_{k-1}, \tag{2}$$

que puede probarse fácilmente teniendo en cuenta que

$$\begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{n+k+1} & P_{n+k} \\ P_{n+k} & P_{n+k-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+k} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \\ &= \begin{pmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{k+1} & P_k \\ P_k & P_{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P_{n+1}P_{k+1} + P_nP_k & P_{n+1}P_k + P_nP_{k-1} \\ P_nP_{k+1} + P_{n-1}P_k & P_nP_k + P_{n-1}P_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y (2) se sigue inmediatamente. Además, de (2), tomando $k = n + 1$, se obtiene la identidad

$$P_{2n+1} = P_{n+1}^2 + P_n^2.$$

Por otro lado, la segunda solución de Milchev se basa en el estudio de funciones generatrices de sucesiones asociadas a los números de Pell. Entre otras, él encuentra las relaciones

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n P_n^2 = \frac{x - x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} P_k^2 = \frac{x}{(1-x)(1-6x+x^2)}$$

utilizando que ambas sucesiones satisfacen la relación de recurrencia $a_{n+2} = 5a_{n+1} + 5a_n - a_{n-1}$ con valores iniciales apropiados.

PROBLEMA 403. *Propuesto por Ovidiu Furdui y Alina Sîntămărian, Technical University of Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, Rumanía.*

Evaluar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^3 \left(\zeta(5) - 1 - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} - \cdots - \frac{1}{n^5} \right) - \frac{1}{4n} \right).$$

Primera solución, enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Probaremos que la suma de la serie es $\frac{1}{16} + \frac{\zeta(3)}{4} - \frac{\pi^2}{12}$.

Por inducción sobre M, podemos probar que se verifica la identidad

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{M} \left(n^3 \left(\zeta(5) - 1 - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} - \cdots - \frac{1}{n^5} \right) - \frac{1}{4n} \right) \\ = \frac{M^2(M+1)^2}{4} \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n^5} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Entonces, como

$$\frac{1}{4M^4} = \int_M^\infty \frac{dx}{x^5} > \sum_{n=M+1}^\infty \frac{1}{n^5} > \int_{M+1}^\infty \frac{dx}{x^5} = \frac{1}{4(M+1)^4},$$

deducimos que

$$\lim_{M\to\infty} \frac{M^2(M+1)^2}{4} \sum_{n=M+1}^\infty \frac{1}{n^5} = \frac{1}{16},$$

y el resultado ya es inmediato.

Segunda solución, enviada por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.

Denotando por S la suma a evaluar, probaremos que $S = \frac{1}{16} + \frac{\zeta(3)}{4} - \frac{\pi^2}{12}$.

Si $H_n^{(p)} = \sum_{k=1}^n 1/k^p$ es el n-ésimo número armónico generalizado de orden p, con $p \in \mathbb{N}$, es claro que

$$S = \sum_{n=1}^\infty n^3 \left(\zeta(5) - H_n^{(5)} - \frac{1}{4n^4}\right).$$

Recordemos que, según la fórmula de sumación de Abel, si tenemos dos sucesiones de números reales $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ y tomamos $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, entonces, si $\lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1}$ existe y $\sum_{n=1}^\infty A_n(b_n - b_{n+1})$ converge, se tiene que $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ converge y

$$\sum_{n=1}^\infty a_n b_n = \lim_{n\to\infty} A_n b_{n+1} + \sum_{n=1}^\infty A_n(b_n - b_{n+1}). \tag{1}$$

Tomando $a_n = n^3$ y $b_n = \zeta(5) - H_n^{(5)} - \frac{1}{4n^4}$ en (1), como $A_n = \sum_{k=1}^n k^3 = n^2(n+1)^2/4$ y

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^5} + \frac{1}{4(n+1)^4} - \frac{1}{4n^4},$$

tendremos, supuesto que el límite exista y que la serie sea convergente,

$$S = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} n^2(n+1)^2 \left(\zeta(5) - H_{n+1}^{(5)} - \frac{1}{4(n+1)^4}\right) + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^\infty n^2(n+1)^2 \left(\frac{1}{(n+1)^5} + \frac{1}{4(n+1)^4} - \frac{1}{4n^4}\right).$$

Consideremos las sucesiones $\alpha_n = b_{n+1}$ y $\beta_n = 1/(n^2(n+1)^2)$. Podemos comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$$

y, además,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\beta_{n+1} - \beta_n} = -\frac{1}{16}\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(10n^3 + 40n^2 + 55n + 26)}{(n+1)^3(n+2)^3} = 0.$$

Entonces, aplicando el caso 0/0 del criterio de Stolz-Cesàro, concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} n^2(n+1)^2\left(\zeta(5)-H_{n+1}^{(5)}-\frac{1}{4(n+1)^4}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\beta_n}=0$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}S&=-\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10n^3+10n^2+5n+1}{n^2(n+1)^3}\\&=-\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{7}{(n+1)^2}-\frac{4}{(n+1)^3}\right)-\frac{1}{8}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\frac{1}{16}+\frac{\zeta(3)}{4}-\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

Tercera solución, enviada por Alfonso Álamo Zapatero, BBVA CIB, Madrid.

Probaremos el siguiente resultado más general: para $p\in\mathbb{N}$, con $p\geq 3$,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{p-2}\left(\zeta(p)-1-\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3^p}-\cdots-\frac{1}{n^p}\right)-\frac{1}{(p-1)n}\right)\\&\qquad=\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p-1}\sum_{j=1}^{p-2}\binom{p-1}{j}B_j(\zeta(j+1)-1)\end{aligned}$$

donde $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de los números de Bernoulli. En particular, tomando $p=5$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^3\left(\zeta(5)-1-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}-\cdots-\frac{1}{n^5}\right)-\frac{1}{4n}\right)=\frac{1}{16}+\frac{\zeta(3)}{4}-\frac{\pi^2}{12},$$

que es el valor solicitado.

Fijemos $p\in\mathbb{N}$, con $p\geq 3$. Por simplicidad, denotaremos

$$\mathrm{FH}(n,r)=\sum_{j=1}^{n}j^r\qquad\text{y}\qquad a_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^p}.$$

Si S_N es la sucesión de sumas parciales de la suma a evaluar, se puede escribir

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}n^{p-2}a_n-\frac{H_N}{p-1},$$

donde H_N es el N-ésimo número armónico. Ahora, usando sumación por partes,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}n^{p-2}a_n&=\mathrm{FH}(N,p-2)a_{N+1}-\sum_{n=1}^{N}\mathrm{FH}(n,p-2)(a_{n+1}-a_n)\\&=\mathrm{FH}(N,p-2)a_{N+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{\mathrm{FH}(n,p-2)}{(1+n)^p}.\end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud de la estimación

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^p} = \zeta(p) - \frac{1}{(p-1)N^{p-1}} + O\Big(\frac{1}{N^p}\Big),$$

que puede obtenerse directamente de la fórmula de Euler-Maclaurin, se sigue que

$$a_n = \frac{1}{(p-1)n^{p-1}} + O\Big(\frac{1}{n^p}\Big); \tag{2}$$

y, como, por la fórmula de Faulhaber,

$$\mathrm{FH}(n,r) = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} B_j (1+n)^{r+1-j}, \tag{3}$$

llegamos a

$$\mathrm{FH}(N, p-2) a_{N+1} = \frac{1}{(p-1)^2} + O\Big(\frac{1}{N}\Big).$$

Además, aplicando de nuevo (3), deducimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{\mathrm{FH}(n,p-2)}{(1+n)^p} &= \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=0}^{p-2} \binom{p-1}{j} \frac{B_j}{(1+n)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{j=0}^{p-2} \binom{p-1}{j} B_j \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+n)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p-2} \binom{p-1}{j} B_j \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+n)^{j+1}} + \frac{H_{N+1}-1}{p-1}.
\end{aligned}$$

De este modo, puesto que

$$\frac{H_{N+1}-1}{p-1} - \frac{H_N}{p-1} = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{N+1} - 1\right),$$

llegamos a

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} S_N &= \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{p-1} \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{p-2} \binom{p-1}{j} B_j \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(1+n)^{j+1}} + \frac{1}{N+1} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-1} \sum_{j=1}^{p-2} \binom{p-1}{j} B_j (\zeta(j+1) - 1),
\end{aligned}$$

que es el resultado buscado.

También resuelto por B. Bradie, J. Mozo, A. Stadler, D. Văcaru y los proponentes. Se han recibido dos soluciones incorrectas.

PROBLEMA 404. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean α, β, γ y δ números reales no negativos tales que $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$. Probar que

$$\frac{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+5\alpha\beta\gamma\delta}{9} \geq \frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\delta^2\alpha^2+\delta^2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

La desigualdad propuesta es equivalente a

$$f(\alpha,\beta,\gamma,\delta) := (\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\delta^4+5\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) - 9(\alpha^2\beta^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2\delta^2+\gamma^2\delta^2\alpha^2+\delta^2\alpha^2\beta^2) \geq 0.$$

Puesto que $f(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ es una función simétrica en las variables α, β, γ y δ, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $\alpha \leq \beta \leq \gamma \leq \delta$. Además, existen números reales no negativos r, s, t y u tales que $\alpha = r$, $\beta = r+s$, $\gamma = r+s+t$ y $\delta = r+s+t+u$. Así, usando, por ejemplo, *Mathematica*, tenemos

$$\begin{aligned}
&f(r, r+s, r+s+t, r+s+t+u)\\
&= 24r^4s^2 + 59r^3s^3 + 51r^2s^4 + 15rs^5 + 32r^4st + 118r^3s^2t + 136r^2s^3t + 50rs^4t\\
&\quad + 32r^4t^2 + 160r^3st^2 + 255r^2s^2t^2 + 145rs^3t^2 + 20s^4t^2 + 64r^3t^3 + 208r^2st^3\\
&\quad + 196rs^2t^3 + 52s^3t^3 + 56r^2t^4 + 116rst^4 + 53s^2t^4 + 24rt^5 + 24st^5 + 4t^6\\
&\quad + 16r^4su + 59r^3s^2u + 68r^2s^3u + 25rs^4u + 32r^4tu + 160r^3stu + 255r^2s^2tu\\
&\quad + 145rs^3tu + 20s^4tu + 96r^3t^2u + 312r^2st^2u + 294rs^2t^2u + 78s^3t^2u + 112r^2t^3u\\
&\quad + 232rst^3u + 106s^2t^3u + 60rt^4u + 60st^4u + 12t^5u + 24r^4u^2 + 101r^3su^2\\
&\quad + 153r^2s^2u^2 + 95rs^3u^2 + 20s^4u^2 + 106r^3tu^2 + 300r^2stu^2 + 276rs^2tu^2\\
&\quad + 82s^3tu^2 + 141r^2t^2u^2 + 273rst^2u^2 + 129s^2t^2u^2 + 88rt^3u^2 + 88st^3u^2 + 22t^4u^2\\
&\quad + 37r^3u^3 + 98r^2su^3 + 89rs^2u^3 + 28s^3u^3 + 85r^2tu^3 + 157rstu^3 + 76s^2tu^3\\
&\quad + 72rt^2u^3 + 72st^2u^3 + 24t^3u^3 + 18r^2u^4 + 34rsu^4 + 17s^2u^4 + 32rtu^4 + 32stu^4\\
&\quad + 16t^2u^4 + 6ru^5 + 6su^5 + 6tu^5 + u^6 \geq 0
\end{aligned}$$

puesto que todos los coeficientes son positivos. La igualdad a cero de $f(r, r+s, r+s+t, r+s+t+u)$ ocurrirá si y solo si $r = t = u = 0$ o $s = t = u = 0$. Por tanto, en la desigualdad inicial, como $\alpha = r \neq 0$ por la hipótesis $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, la igualdad se verificará si y solo si $\alpha = \beta = \gamma = \delta$.

También resuelto por J. Nadal y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 405. *Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, León.*

En el triángulo escaleno ABC, la circunferencia inscrita es tangente al lado BC en el punto D y al lado AC en el punto E. Sea M el punto medio de BC y supongamos que AD es paralelo a EM. Probar que la recta DE corta a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en dos puntos, uno de ellos situado en la mediatriz del segmento AC y el otro en la mediatriz de BC.

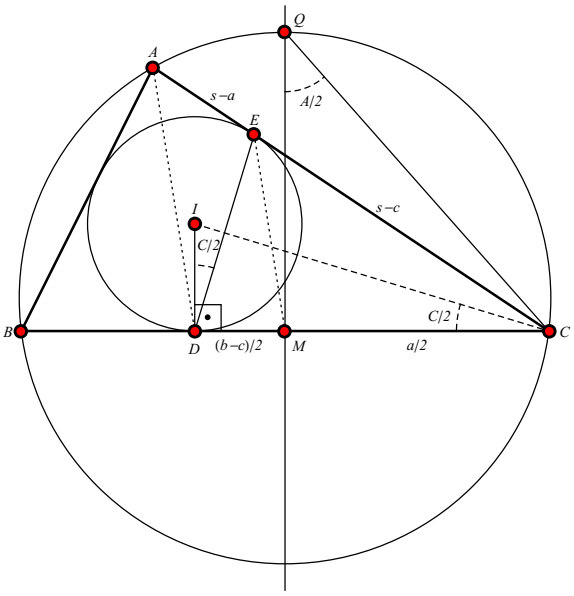

Figura 1: Esquema para la primera solución del Problema 405.

Primera solución, enviada por Titu Zvonaru, Comăneşti, Rumanía.

Sean a, b y c, respectivamente, las longitudes de los lados BC, CA y AB, s el semiperímetro y r el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo. Podemos suponer $b > c$. Sea Q el punto de intersección de la mediatriz de BC con la circunferencia circunscrita que está situado al mismo lado de la recta BC que el vértice A. Se sabe que $CD = CE = s - c$, $AE = s - a$ y $ME = \frac{a}{2} - (s - b) = \frac{b-c}{2}$.

También (ver la figura 1), $\angle CQM = \frac{A}{2}$, de manera que

$$QM = \frac{a}{2\tan(A/2)} = \frac{a(s-a)}{2r}.$$

Por otro lado, como AD y EM son paralelos se tiene $\frac{a}{b-c} = \frac{s-c}{s-a}$, de manera que

$$\tan(\angle QDM) = \frac{QM}{DM} = \frac{a(s-a)}{2r}\cdot\frac{2}{b-c} = \frac{s-a}{r}\cdot\frac{s-c}{s-a} = \frac{s-c}{r} = \tan\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\Big). \quad (1)$$

Y, como el triángulo CDE es isósceles, se tiene $\angle EDM = \angle EDC = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$. De (1) resulta que $\angle QDC = \angle QDM = \angle EDC$ y que, por consiguiente, los puntos D, E y Q son colineales.

Para la mediatriz de AC la prueba es similar.

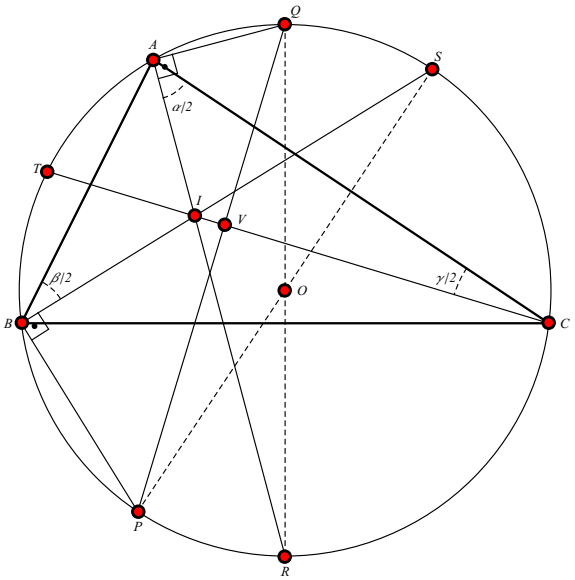

Figura 2: Primer esquema para la segunda solución del Problema 405.

Segunda solución, enviada por el proponente.

Sean Q y P, respectivamente, los puntos donde la circunferencia circunscrita al triángulo ABC corta a las bisectrices exteriores de los ángulos CAB y CBA. Como $\angle IAQ = \frac{\pi}{2}$, el punto Q pertenece a la mediatriz de BC, que es un diámetro de la circunferencia circunscrita (figura 2) y, del mismo modo, el punto P pertenece a la mediatriz de AC. Para resolver el problema probaremos que los puntos D, E, Q y P están alineados.

El triángulo CDE es isósceles, así que la recta DE es perpendicular a CI, siendo I el incentro del triángulo ABC. Pero también es perpendicular a CI la recta PQ ya que, aplicando el teorema del ángulo interior a una circunferencia se tiene, utilizando que $\angle POR = \angle QOS$, donde O es el circuncentro, $V = PQ \cap CI$, T es el punto de intersección de la recta CI con la circunferencia circunscrita, y α, β y γ los ángulos de ABC,

$$\begin{aligned} 2\angle QVT &= \angle TOA + \angle AOQ + \angle POR + \angle ROC \\ &= 2\angle ICA + 2\angle IBA + 2\angle IAC \\ &= \gamma + \beta + \alpha = \pi. \end{aligned}$$

De modo que, si probamos que $CI \perp DQ$, habremos visto que DE y PQ son la misma recta y el problema quedará resuelto. Para esto, lo que vamos a hacer es probar que $DH \perp CQ$, siendo $H = CI \cap QM$. Porque de ahí, puesto que $QH \perp CD$, se deduce que entonces H es el ortocentro del triángulo CDQ, y se concluye que $CH \perp DQ$, luego que $CI \perp DQ$, como queremos.

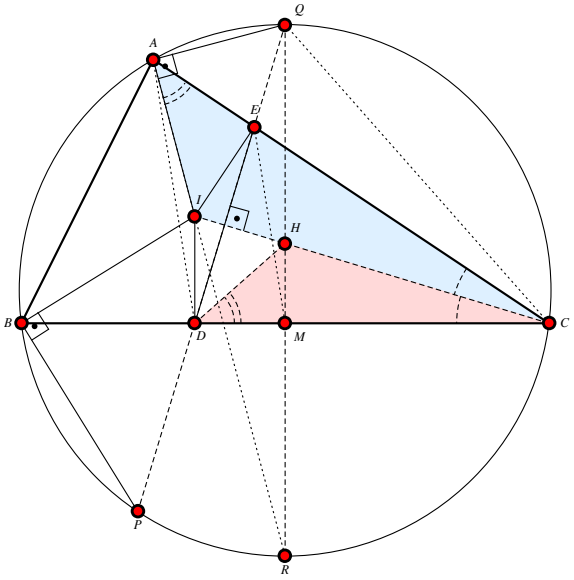

Figura 3: Segundo esquema para la segunda solución del Problema 405.

Si miramos el triángulo isósceles BCQ (figura 3) vemos que $\angle DCQ = \angle BCQ = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, y entonces nos basta probar que $\angle HDC = \frac{\alpha}{2}$. Pero esto se sigue de que los triángulos CAI y CDH son semejantes, ya que se tiene $\angle ICA = \angle HCD$ y, como $ID \parallel HM$, $AD \parallel EM$ por hipótesis y $CD = CE$, aplicando dos veces el teorema de Tales resulta

$$\frac{CI}{CH} = \frac{CD}{CM} = \frac{CE}{CM} = \frac{CA}{CD}.$$

También resuelto por F. D. Aranda, J. Nadal y A. Stadler. Se ha recibido una solución incompleta.

Problema 406. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

En el triángulo ABC, los puntos D, E y F están en los lados BC, AC y AB, respectivamente, y son tales que las cevianas AD, BE y CF concurren en un punto M. Las áreas de los triángulos AME, BMF y CMD son iguales, respectivamente, a 70, 56 y 30.

(a) Encontrar las áreas de los triángulos BMD, CME y AMF.

(b)⋆ ¿Quedan determinadas las longitudes de las cevianas AD, BE y CF por los datos del enunciado? ¿Queda determinado el triángulo ABC por los datos del enunciado?

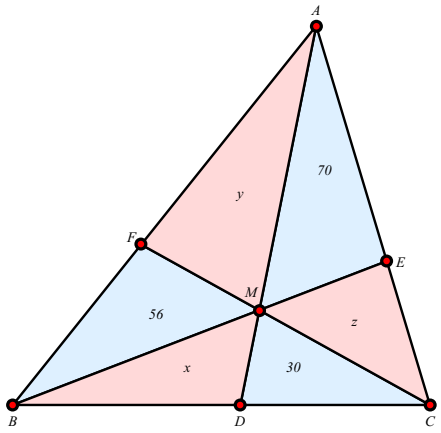

Figura 4: Esquema para la solución del Problema 406.

Solución enviada por Antonio M. Oller Marcén, Centro Universitario de la Defensa, Zaragoza.

Llamemos x, y y z, respectivamente, a las áreas de los triángulos BMD, AMF y CME (ver la figura 4).

(a) Nos fijamos primero en la ceviana AD. Como los triángulos AMB y MDB tienen la misma altura correspondiente al común vértice B, sus áreas están en la misma razón que las longitudes de las bases AM y MD. Lo mismo sucede con los triángulos AMC y MDC. Por lo tanto,

$$\frac{56+y}{x} = \frac{AM}{MD} = \frac{70+z}{30}.$$

Consideraciones análogas para los triángulos con bases en las cevianas BE y CF dan, respectivamente,

$$\frac{30+x}{z} = \frac{BM}{ME} = \frac{56+y}{70} \qquad \text{y} \qquad \frac{70+z}{y} = \frac{CM}{MF} = \frac{30+x}{56}.$$

El sistema que forman las tres ecuaciones anteriores se puede resolver con facilidad (para empezar, por ejemplo, multiplicando miembro a miembro y simplificando se obtiene $xyz = 30 \cdot 56 \cdot 70$, la relación que da el teorema de Ceva, que puede agilizar las cuentas). De hecho, el sistema solo tiene una solución con $x, y, z > 0$ y está dada por

$$(x, y, z) = (40, 84, 35).$$

(b) La respuesta es negativa a ambas preguntas.

Para la primera, comencemos con un triángulo cualquiera, ABC, de área 1. Elegimos sobre el segmento BC el punto D tal que $BD = \frac{4}{3}DC$. A continuación, tomamos sobre el segmento AD el punto M tal que $AM = \frac{7}{2}MD$. Pongamos después

que BM corte al segmento AC en el punto E, y que CM corte al segmento AB en el punto F. Resulta relativamente sencillo, argumentando a partir de las razones en las que están divididos los segmentos BC y AD, considerando los distintos triángulos que aparecen y denotando con $[XYZ]$ el área del triángulo XYZ, ver que (consultar, por ejemplo, [1])

$$[BMD] = \frac{8}{63}, \quad [CMD] = \frac{6}{63}, \quad [BMF] = \frac{8}{45},$$
$$[AMF] = \frac{28}{105}, \quad [AME] = \frac{2}{9} \quad \text{y} \quad [CME] = \frac{1}{9}.$$

Entonces, si aplicamos una dilatación de razón $\sqrt{315}$ (que multiplicará las áreas por 315), obtendremos un triángulo que va a cumplir las condiciones del enunciado. Como el triángulo ABC de partida es totalmente arbitrario, salvo por su área, resulta evidente a partir de aquí que las condiciones del enunciado no determinan el triángulo. Únicamente determinan que su área total debe ser igual a 315.

Para la segunda: es evidente que dado un triángulo de área 315, la construcción anterior determina los puntos D, E y F de manera única (es decir, el punto D es el único punto del segmento BC tal que $BD = \frac{4}{3}DC$, etc.). Este hecho, junto con la posibilidad de llevar a cabo la construcción para cualquier triángulo de área 315, implica que los datos del enunciado tampoco determinan de manera unívoca las longitudes de las cevianas. Por ejemplo, podemos considerar la familia de triángulos rectángulos con ángulo recto en B y área 315. Resulta evidente que la longitud de la ceviana AD no es fija (de hecho, si $BC = a$ y $AB = c = \frac{630}{a}$, se tiene $AD = \sqrt{\left(\frac{4a}{7}\right)^2 + \left(\frac{630}{a}\right)^2}$).

En definitiva, las condiciones del enunciado fijan el área del triángulo, las razones en las que el punto M divide a las tres cevianas y las razones en las que los puntos D, E y F dividen a los lados del triángulo. Pero no fijan ni las longitudes de los lados ni las de las cevianas. Al hilo de este problema, el trabajo citado [1] puede ser de interés.

Referencias

[1] A. M. Oller Marcén, Rational ratios and concurrent cevians, *Math. Mag.* **86** (2013), 265–269.

También resuelto por F. D. Aranda, C. Beade, A. Stadler, T. Zvonaru y el proponente (en su caso, solo el apartado (a)).

Problema 407. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Probar que en cualquier triángulo ABC se cumple la desigualdad

$$\frac{\tan^2(1^\circ)\tan^2(2^\circ)\tan^2(3^\circ)}{h_a} + \frac{\tan^2(2^\circ)}{h_b} + \frac{\tan^2(1^\circ)}{h_c} > \frac{(2\sqrt{2}+1)\tan^2(3^\circ)}{7s},$$

siendo h_a, h_b, h_c las longitudes de las tres alturas y s el semiperímetro del triángulo.

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

Probaremos la desigualdad

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}}{s}, \tag{1}$$

válida para números reales $x, y, z \geq 0$ cualesquiera.

Sean a, b y c las longitudes de los lados, $s=(a+b+c)/2$ el semiperímetro y Δ el área del triángulo ABC. Pongamos $u := s-a$, $v := s-b$ y $w := s-c$. Se tiene $u+v=c$, $v+w=a$, $w+u=b$ y $u+v+w=s$. Además, por la fórmula de Herón,

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{uvw(u+v+w)}.$$

De esta forma, usando que $\Delta = ah_a/2 = bh_b/2 = ch_c/2$, la desigualdad (1) es equivalente a

$$\begin{aligned} ax+by+cz &\geq 3\sqrt{3}\frac{\Delta}{s}\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)} \\ &= 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{uvw}{u+v+w}}\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}. \end{aligned}$$

Ahora, como

$$ax+by+cz=(v+w)x+(w+u)y+(u+v)z=u(y+z)+v(z+x)+w(x+y),$$

la desigualdad (1) es equivalente a

$$\big(u(y+z)+v(z+x)+w(x+y)\big)\sqrt{u+v+w}\geq 3\sqrt{3}\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}\sqrt{uvw},$$

y esta última resulta de aplicar dos veces la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Con esto queda probada (1).

Así, tomando $x=\tan^2(1^\circ)\tan^2(2^\circ)\tan^2(3^\circ)$, $y=\tan^2(2^\circ)$ y $z=\tan^2(1^\circ)$, solo nos quedaría comprobar que se cumple

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}>\frac{2\sqrt{2}+1}{7}\tan^2(3^\circ), \tag{2}$$

lo que puede hacerse con una calculadora: a la izquierda el valor es aproximadamente 0.002149, mientras que el valor a la derecha es aproximadamente 0.001502.

También resuelto por J. Nadal, D. Văcaru y el proponente.

NOTA. Văcaru y el proponente usan en sus respectivas soluciones la desigualdad de Bergström

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{a_k}\geq\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2,$$

válida para $x_k \in \mathbb{R}$ y $a_k > 0$, para $k = 1, \ldots, n$ (y con igualdad solo si $\frac{x_1}{a_1} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$). El proponente, además, prueba y usa la desigualdad $h_a + h_b + h_c < \frac{7s}{2\sqrt{2}+1}$, mientras que Văcaru utiliza la desigualdad más fina, de Luis A. Santaló, $h_a + h_b + h_c \leq s\sqrt{3}$ [1, (6.2)] (aquí la igualdad solo se da en el caso de un triángulo equilátero), con lo cual él deja probada la desigualdad

$$\frac{\tan^2(1^\circ)\tan^2(2^\circ)\tan^2(3^\circ)}{h_a} + \frac{\tan^2(2^\circ)}{h_b} + \frac{\tan^2(1^\circ)}{h_c} > \frac{\tan^2(3^\circ)}{s\sqrt{3}},$$

más fina que la enunciada (y que también resulta con el método de Stadler: en este caso, el correspondiente valor a la derecha en la desigualdad (2) sería aproximadamente 0.001586).

Referencias

[1] O. Bottema, R. Ž. Djordjević, R. R. Janić, D. S. Mitrinović y P. M. Vasić, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff Pub., Groningen, 1969.

Problema 408. *Propuesto por Florin Stănescu, Serban Cioclescu School, Găeşti, Rumanía.*

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $C^1([0,1])$ verificando que $|f'(x)| \leq 1$ para $x \in [0,1]$ y

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Probar que

$$\left| \int_0^1 x^n f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{n+2}, \qquad n \geq 1.$$

Solución enviada por Santiago Alzate y Edwin Rivera (estudiantes), Universidad de Antioquia, Colombia.

Aplicando integración por partes se tiene

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx, \qquad n \geq 0,$$

y, usando el caso $n = 0$ para eliminar $f(1)$, llegamos a

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n f(x)\,dx &= \frac{1}{n+1}\left(\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 x f'(x)\,dx - \int_0^1 x^{n+1} f'(x)\,dx\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\left(\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 (x - x^{n+1}) f'(x)\,dx\right).\end{aligned}$$

Así, el resultado se sigue inmediatamente de la desigualdad triangular y de las hipótesis dadas para la función f. En efecto,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 x^n f(x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{n+1}\left(\left|\int_0^1 f(x)\,dx\right| + \int_0^1 (x-x^{n+1})|f'(x)|\,dx\right)\\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} + \int_0^1 (x-x^{n+1})\,dx\right) = \frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

También resuelto por Kee-Wai Lau, J. Polo, C. Sacristán, A. Stadler, D. Văcaru y el proponente.