Educación

Sección a cargo de

Luis J. Rodríguez-Muñiz

La alta capacidad matemática: caracterización, identificación y desarrollo

por

Adela Jaime y Ángel Gutiérrez

Resumen. En este texto reflexionamos sobre diversos aspectos relacionados con los estudiantes con alta capacidad matemática desde la perspectiva de la investigación en didáctica de las matemáticas. Nos centramos en describir y comentar resultados de investigación sobre el concepto de alta capacidad matemática, la identificación de características de la misma, la identificación de estudiantes, y la atención a estos estudiantes en las aulas y fuera de ellas. Hacemos mención especial a la creatividad matemática, como característica inherente a la alta capacidad matemática, y a sus componentes, y también a la visualización, habilidad descuidada con frecuencia en las clases de matemáticas.

1. Introducción

En España y la mayoría de los países avanzados es evidente la creciente escasez de titulados universitarios en matemáticas, debida a la mayor demanda de estos titulados en el mundo económico y empresarial [17, 54], que se prevé siga aumentando en el futuro. Parte del problema es la creciente falta de titulados en matemáticas para cubrir las plazas de profesorado de matemáticas de Secundaria, como consecuencia negativa de un incremento de la demanda de matemáticos en otros ámbitos, para realizar trabajos que les resultan más atractivos o rentables que la docencia.

Desde diversos ámbitos se promueven y realizan actuaciones divulgativas para motivar a los estudiantes de Secundaria, pero, realmente, las acciones de motivación deben empezar unos años antes, en 1.º de Primaria, y deben llevarlas a cabo los profesores de cada nivel educativo en sus clases, con el apoyo de otros actores importantes, tanto las autoridades educativas como divulgadores, sociedades profesionales, etc. [33]. Es necesario plantear acciones que despierten el interés por las matemáticas de los estudiantes de los niveles preuniversitarios en general pero, sobre todo, es imprescindible evitar que se pierdan, por falta de una atención adecuada, estudiantes con una buena aptitud para las matemáticas, es decir, los que suelen denominarse estudiantes con alta capacidad matemática o con talento matemático. Con frecuencia, las habilidades matemáticas de los niños están dormidas y pueden permanecer así durante años; finalmente, es probable que se pierdan definitivamente si no son descubiertas a tiempo y los niños no reciben una formación adecuada [7].

El objetivo de este artículo es realizar un recorrido, que no pretende ser exhaustivo, por la investigación sobre los estudiantes con **alta capacidad matemática** (en adelante, ACM), principalmente desde la perspectiva de la investigación de la didáctica de las matemáticas (o educación matemática), tanto española como internacional. Presentaremos los problemas de investigación más destacados y las respuestas que se están dando que consideramos más interesantes, que se centran mayoritariamente en la caracterización operativa de la ACM, la identificación de estudiantes con ACM, y la atención a los estudiantes identificados para favorecer su gusto por las matemáticas y el desarrollo de sus capacidades relacionadas con esta ciencia.

Una buena formación inicial y continua del profesorado de matemáticas es fundamental para el tratamiento adecuado por el sistema educativo real de los estudiantes con ACM, por lo que se están realizando también considerables esfuerzos de investigación en esta línea; no obstante, aquí no vamos a abordar este tema.

Terminamos esta introducción haciendo dos precisiones terminológicas:

- En las publicaciones de didáctica de las matemáticas sobre este tema se suelen usar, generalmente como equivalentes, los términos **talento matemático y alta(s) capacidad(es) matemática(s)** para aludir a los estudiantes que destacan en matemáticas por encima de sus compañeros.
- Al hablar de **problemas** de matemáticas y de **resolución de problemas**, adoptamos el significado dado por la didáctica de las matemáticas: «un problema es una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de resolverla. Además, esa dificultad debe ser intelectual más que computacional» ([58, p. 74]). La aclaración de la segunda frase es importante: convertir un enunciado verbal en una ecuación es un problema para un estudiante de 1.º de ESO; invertir con papel y lápiz una matriz 27×27 es una tarea difícil, pero no es un problema. Llamamos **ejercicio** a una tarea matemática que no es un problema para el individuo que está tratando de resolverla.

2. Diversas aproximaciones a la alta capacidad y la superdotación

La psicología educativa distingue variantes en la manifestación de un nivel intelectual superior a la media y habla de personas precoces, talentosas, superdotadas, genios, prodigios y otros tipos más específicos [46], siendo la distinción entre superdotación y talento la más importante, por ser los dos tipos más frecuentes entre los estudiantes. Actualmente, la mayoría de los autores consideran que la superdotación corresponde a un alto nivel intelectual en (casi) todos los campos académicos y el talento corresponde a un alto nivel intelectual en un campo específico o en unos pocos campos [50].

Nuestro objetivo es presentar la actividad investigadora desarrollada en el área de didáctica de las matemáticas, pero es conveniente conocer, aunque sea superficialmente, algunas propuestas hechas desde la psicología, pues los psicólogos fueron los primeros en desarrollar el estudio de la superdotación y la alta capacidad en diferentes campos, en particular en matemáticas. A continuación presentamos muy brevemente las ideas centrales de los principales modelos psicólogos de superdotación; en [34] y, sobre todo, en las publicaciones originales y recientes de los autores citados, se puede tener un conocimiento más completo de estas teorías.

J. S. Renzulli ha desarrollado la **teoría de los tres anillos**. Este autor identifica tres tipos de rasgos personales (figura 1): creatividad (producción de respuestas o resultados novedosos u originales), compromiso con la tarea (motivación e interés por completar las tareas que se le plantean) y habilidad por encima de la media (para comprender y utilizar nuevos conocimientos). Las personas superdotadas son las que poseen de manera bien definida y desarrollada los tres rasgos [55].

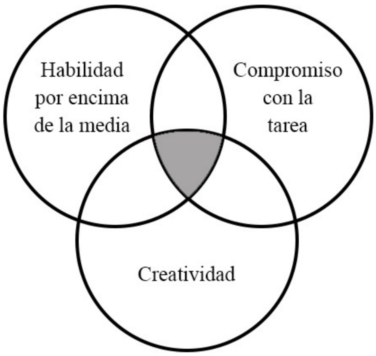


Figura 1: Diagrama de la teoría de los tres anillos de Renzulli ([55]).

La superdotación influye y es perceptible tanto en actividades académicas como en cualquier otro ámbito de la vida. Por ello, F. J. Mönks ha creado una teoría basada en incorporar a la de los tres anillos entornos de interacciones sociales: familia, colegio y amigos [42] (citado en [46]).

F. Gagné ha propuesto el **modelo integral de desarrollo del talento** (CMTD por sus siglas en inglés), que propone tener en cuenta componentes biológicos y educativos (figura 2). Por una parte, la **predisposición genética** permite o dificulta el desarrollo de capacidades naturales excepcionales o **dones** (en inglés, *gifts*), los cuales se pueden transformar en talentos. Los **catalizadores** son factores que favorecen o imposibilitan esos cambios y pueden ser intrapersonales y ambientales [25].

El modelo de las **inteligencias múltiples** de H. Gardner ha alcanzado un alto reconocimiento internacional. Gardner considera la inteligencia como multidimensional y formada por diversos componentes, relacionados pero diferentes, que pueden tener distintos niveles de desarrollo en un individuo. Por ello, habla de **las inteligencias**

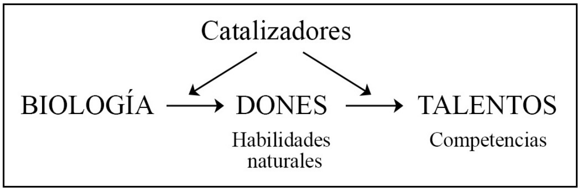


Figura 2: Diagrama de la teoría de superdotación de Gagné (elaboración propia).

de una persona. Según [26], hay ocho inteligencias: lingüística, lógico-matemática, espacial, corporal-cinética, musical, interpersonal, intrapersonal y naturalista (aunque, desde entonces, ha definido más inteligencias). Además, [26] habla de «talento» como la presencia de una capacidad superior en alguna de las inteligencias y de «altas capacidades» cuando la existencia de capacidad superior está generalizada a las diversas inteligencias.

3. La alta capacidad matemática

De manera intuitiva y simplificadora, podemos decir, como [16], que un estudiante tiene ACM cuando su capacidad matemática se sitúa significativamente por encima de la media. Si bien la formulación anterior parece clara, hay diversos matices sobre qué se entiende por cada uno de los aspectos que intervienen en el concepto anterior. La capacidad matemática se puede referir a realizar diversas actividades matemáticas, como resolución de problemas, aprendizaje de contenidos y algoritmos complejos, etc., de manera claramente superior a la media de sus compañeros de curso, es decir con más rapidez, eficacia y éxito. Sin embargo, para hacer esta idea operativa y útil para las prácticas docente e investigadora, hay que darle una forma más concreta, tarea en absoluto trivial por las múltiples variables que intervienen en la ACM, matemáticas, educativas, curriculares, cognitivas, afectivas, culturales, entre otras. Podemos encontrar varias definiciones de ACM [37], como:

- Krutetskii denomina talento matemático a «una agrupación única de habilidades matemáticas que abre la posibilidad de un desempeño con éxito en la actividad matemática (o, pensando en los escolares, la posibilidad de un dominio creativo de la asignatura)» ([36, p. 77]).
- Leikin afirma que «un estudiante tiene alta capacidad matemática si muestra un alto nivel de rendimiento matemático respecto al grupo de referencia y es capaz de producir ideas matemáticas que son nuevas respecto a su historial educativo» ([38, p. 3]).
- Bicknell considera que los estudiantes con ACM son «aquellos que tienen unas habilidades matemáticas especiales o quienes se involucran en pensamiento matemático cualitativamente diferente» ([5, p. 63]).
- Para Parish, los estudiantes con ACM son «aquellos que poseen unas aptitudes naturales (o instintivas) inusualmente altas para comprender conceptos mate-

máticos y que, por tanto, se diferencian sustancialmente de sus compañeros en la forma como ven, comprenden y aprenden matemáticas» ([47, p. 515]).

- Borovik y Gardiner [7] no definen explícitamente la ACM, pero la caracterizan mediante diversos rasgos matemáticos de los estudiantes, que no solo son innatos, sino que pueden desarrollarse y florecer en un entorno de aprendizaje favorable para ello.

Como vemos, hay elementos comunes en las definiciones, la habilidad matemática por encima de la media y la producción de formas de pensar y resolver problemas diferentes de las habituales. No deben pasar desapercibidas las matizaciones de [38] «respecto al grupo de referencia» y «respecto a su historial educativo», que indican que la ACM es algo relativo. En un contexto (p. ej., un grupo de clase ordinario), un estudiante puede destacar claramente respecto de sus compañeros, mientras que en otro contexto (p. ej., un grupo del Proyecto Estalmat —descrito en la sección 6— o una olimpiada) ese mismo estudiante puede no destacar o, incluso, resultar relativamente rezagado respecto de sus compañeros de ese momento. Análogamente, la forma como un estudiante ha resuelto un problema puede ser o no una señal de ACM, dependiendo de sus conocimientos previos, si antes había o no estudiado determinados contenidos matemáticos o resuelto problemas similares.

V. Krutetskii fue un psicólogo ruso que, en los años 1950, desarrolló una impresionante investigación sobre las personas con ACM. Los resultados de sus estudios se publicaron en ruso en 1968 y en inglés en 1976 [36]. Este investigador afirma que las habilidades matemáticas existen de forma dinámica, que se forman y desarrollan mediante la actividad, lo cual precisa que ciertos factores externos y afectivos sean favorables y, además, que el propio estudiante desee esforzarse y trabajar. Actualmente está asumido que la ACM es dinámica; por ejemplo, en [7] se alude a la necesidad de un entorno educativo adecuado para que las aptitudes naturales de un estudiante se desarrollen. Se trata de una visión dinámica y compleja de la ACM que asume que, por una parte, son necesarias ciertas características biológicas innatas de los estudiantes (alto potencial matemático) y, por otra, es necesario proporcionar a los que poseen ese alto potencial las oportunidades educativas adecuadas para que lo desarrollen [37]. Además, resultado de esta combinación de características biológicas y educativas, dentro del conjunto de estudiantes con ACM hay diferencias notables entre las capacidades matemáticas que unos y otros estudiantes muestran en un momento dado, como pueden comprobar los profesores que imparten talleres de matemáticas a grupos específicos de estudiantes con ACM. La diferencia entre dos estudiantes puede deberse a que tienen potenciales diferentes, pero también a que, con el mismo potencial, hayan tenido distinta dedicación y formación.

El sistema educativo debe ocuparse de detectar a los estudiantes con ese potencial matemático para procurar que lo desarrollen y alcancen el máximo rendimiento matemático posible. Por ello, podemos observar que el mayor esfuerzo de la investigación en didáctica de las matemáticas sobre la ACM se centra en estos dos aspectos, con objetivos concretos de investigación dirigidos a proporcionar a los actores involucrados (autoridades educativas, profesores, padres y estudiantes) información y productos que les permitan entender cómo piensan matemáticamente y qué sentimientos hacia las matemáticas tienen los estudiantes con ACM de los diferentes niveles educativos, identificar con eficacia y fiabilidad a los estudiantes que puedan llegar a tener ACM, y disponer de materiales y metodologías de enseñanza adecuados a las necesidades y formas de aprendizaje de estos estudiantes.

Un obstáculo con el que nos encontramos es la variedad de tópicos sobre los estudiantes con ACM en la sociedad en general y en el mundo educativo en particular. Algunos muy extendidos se refieren a que estos estudiantes son muy buenos realizando cálculos aritméticos, que sus calificaciones en matemáticas son siempre las mejores, que aprenden las matemáticas sin ayuda, o que socialmente son algo raros y se aíslan de sus compañeros. Sin embargo, la realidad muestra que se trata de un colectivo de estudiantes que no se diferencia del global de la misma edad, con estudiantes buenos y malos calculadores, con calificaciones mejores y peores, etc., y necesitando, como los demás, la ayuda de sus profesores para aprender matemáticas.

4. Características de la alta capacidad matemática

Continuamos este recorrido tratando aspectos concretos de la investigación sobre la ACM. El principal es la identificación de características diferenciadoras de los estudiantes con ACM. Es necesario saber qué buscar en un estudiante para poder discriminar si tiene o no ACM. Iniciamos este recorrido con la obra de Krutetskii.

4.1. La investigación de Krutetskii sobre la ACM

Los estudios de Krutetskii son la base sobre la que empezaron a trabajar los primeros didactas interesados por la ACM y, a pesar del tiempo transcurrido, [36] sigue siendo un referente obligado para quienes, desde la didáctica de las matemáticas, nos dedicamos a ahondar en las características de los estudiantes con ACM. Su investigación se basó en 12 años de experimentos centrados principalmente en la resolución por una muestra de 192 estudiantes de primaria y secundaria (6 a 17 años) de conjuntos de problemas cuidadosamente creados y seleccionados, la mayoría de aritmética, álgebra y geometría, con dificultades baja, media y alta. A una parte de los estudiantes se les realizó un seguimiento, observándolos durante varios años. A los demás estudiantes, se les observó una vez. Esto le permitió comparar las respuestas de estudiantes de distintos cursos que habían resuelto los problemas al mismo tiempo y comparar las respuestas dadas por los mismos estudiantes cuando estaban en diferentes cursos. Entre los principales resultados de las investigaciones de Krutetskii, está un conjunto de **características de los estudiantes con ACM** ([36, pp. 350–351]):

- Habilidad para la percepción formalizada del material matemático, para comprender la estructura formal de un problema.
- Habilidad de pensamiento lógico en el terreno de las relaciones cuantitativas y espaciales, símbolos numéricos y literales; habilidad para pensar en símbolos matemáticos.

- Habilidad para la generalización rápida y amplia de relaciones, operaciones y objetos matemáticos.
- Habilidad para abreviar el proceso de razonamiento matemático y el sistema de operaciones correspondientes; habilidad para pensar en estructuras abreviadas.
- Flexibilidad de los procesos mentales durante la actividad matemática.
- Buscar la claridad, simplicidad, economía y racionalidad de las resoluciones.
- Habilidad para la reconstrucción rápida y libre de la dirección de un proceso mental, cambiando de un pensamiento directo a uno inverso (reversibilidad del proceso mental durante el razonamiento matemático).
- Memoria matemática (memoria generalizada para relaciones matemáticas, características típicas, esquemas de argumentos y demostraciones, métodos de resolución de problemas y principios de enfoque).
- Mentalidad matemática.

Algunas de dichas características evolucionan con la edad y la formación, siendo un signo de ACM en estudiantes con cierta edad y formación matemática pero no en otros estudiantes mayores y de cursos superiores. Por ejemplo, expresarse de manera formalizada al hacer matemáticas es un signo de ACM en estudiantes de Primaria, pero no lo es en estudiantes de 2.º curso de Bachillerato. Por el contrario, otras características son aplicables a estudiantes de cualquier edad y formación matemática, como la habilidad para cambiar la dirección de procesos mentales.

Otro resultado fundamental de [36] es su caracterización de tres tipos de **pensamiento matemático** usados para procesar la información matemática:

- **Pensamiento analítico**: se caracteriza por un obvio predominio de un componente lógico-verbal muy bien desarrollado frente a un componente pictórico-visual débil. Estos estudiantes operan fácilmente con esquemas abstractos; no necesitan apoyo visual para visualizar objetos o patrones durante la resolución de problemas, ni siquiera cuando las relaciones matemáticas dadas en el problema «sugieren» conceptos visuales (p. 317).
- **Pensamiento geométrico**: se caracteriza por un componente pictórico-visual muy bien desarrollado, y podemos provisionalmente hablar de su predominio sobre un componente lógico-verbal bien desarrollado. Estos estudiantes sienten la necesidad de interpretar visualmente una expresión o relación matemática abstracta y demuestran gran ingenio para ello: en este sentido, relativamente hablando, para ellos lo figural reemplaza con frecuencia a lo lógico. Pero, si no logran crear soportes visuales, visualizar objetos o diagramas para resolver problemas, tienen dificultades para operar con esquemas abstractos. Insisten en tratar de operar con esquemas, imágenes y conceptos visuales incluso cuando es posible resolver fácilmente el problema razonando y el uso de elementos visuales es superfluo o difícil (p. 321).
- **Pensamiento armónico**: se caracteriza por un relativo equilibrio entre los componentes lógico-verbal y pictórico-visual bien desarrollados, con el primer

componente en posición dominante. Los estudiantes son bastante ingeniosos en su interpretación visual de relaciones abstractas, pero sus imágenes y esquemas visuales están subordinados al análisis lógico-verbal. Tienen éxito implementando tanto aproximaciones analíticas como pictórico-geométricas al resolver muchos problemas (p. 326). Una cantidad significativa de estudiantes con ACM (23 de 34 estudiantes) de los experimentos de [36] eran de tipo armónico.

Estos tipos de pensamiento no solo permiten entender la forma de pensar de los estudiantes con ACM, sino la de todos los estudiantes, pues cualquier estudiante de matemáticas muestra signos de su preferencia por algún tipo de pensamiento. Los profesores de matemáticas tienen su propio tipo de razonamiento preferido, que proyectan inconscientemente al impartir clase. Los estudiantes comprenden mejor las matemáticas cuando se les explican usando su tipo de pensamiento preferido. Lo más probable es que, en cualquier grupo medianamente numeroso de estudiantes, haya estudiantes analíticos y geométricos; por ello, es necesario que los profesores, sea cual sea su tipo de pensamiento preferido, combinen los estilos analítico y geométrico.

Los estudios de [1] y [2] son un ejemplo de uso de los pensamientos analítico y geométrico por estudiantes de Primaria al resolver problemas. Han usado **problemas de patrones geométricos** para crear unidades de enseñanza de álgebra temprana [6] para 4.º a 6.º de Primaria, algunos con ACM. Este tipo de problemas presentan una representación gráfica de los primeros términos de una progresión aritmética y piden a los estudiantes calcular los valores de varios términos concretos y expresar una relación general que permita calcular el valor de cualquier término. La figura 3 muestra las primeras preguntas de un problema de patrones geométricos.

En una clase quieren hacer un jardín juntando macetas de flores. Mira cómo crece el jardín cada día.

a) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 5? ¿Cómo lo sabes?
b) ¿Cuántas macetas tendrá el jardín el día 28? ¿Cómo lo sabes?
c) Explícale a un niño que vive en otra ciudad cómo puede adivinar la cantidad de macetas que habrá en el jardín un día cualquiera.

Figura 3: Problema de patrones geométricos.

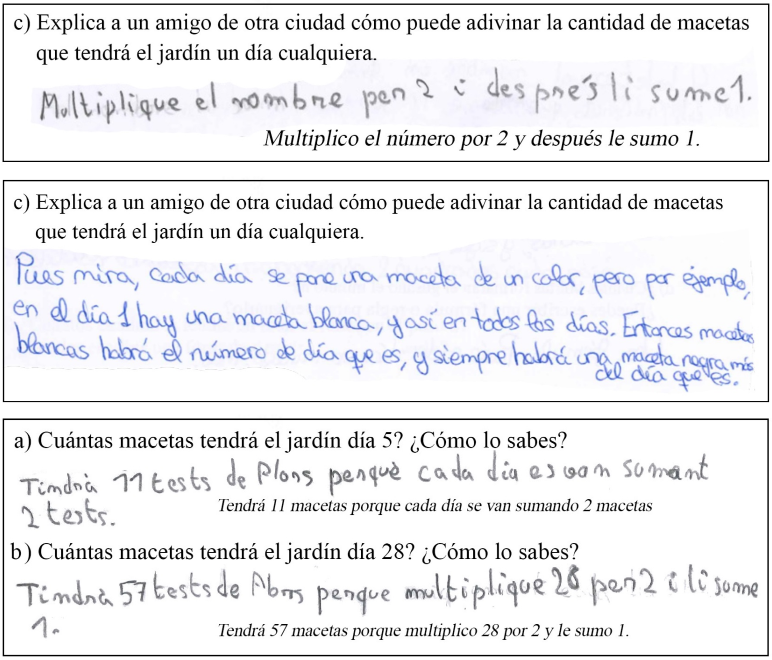
Un estudiante con pensamiento analítico podría contar la cantidad de macetas que hay cada día mostrado (3, 5 y 7) y darse cuenta de que en el jardín hay 2 macetas más cada día y responder contando de 2 en 2 hasta llegar al día pedido o multiplicando el valor del día por 2 y sumando 1 (figura 4a). Un estudiante con pensamiento geométrico puede notar que el jardín tiene macetas blancas (tantas como el día) y negras (una más), para responder sumando el valor del día y el (valor del día + 1) o multiplicando el valor del día por 2 y sumando 1 (figura 4b).

Un estudiante con pensamiento armónico podría usar una estrategia (aritmética o geométrica) para responder unas preguntas y la otra estrategia para responder otras preguntas, para adaptarse al cambio de complejidad (figura 4c, el estudiante usa pensamiento analítico en la pregunta a y pensamiento geométrico en la b).

a)

b)

c)


c) Explica a un amigo de otra ciudad cómo puede adivinar la cantidad de macetas que tendrá el jardín un día cualquiera.

Multiplique el nombre per 2 i després li sume 1.

Multiplico el número por 2 y después le sumo 1.

c) Explica a un amigo de otra ciudad cómo puede adivinar la cantidad de macetas que tendrá el jardín un día cualquiera.

Pues mira, cada día se pone una maceta de un color, pero por ejemplo, en el día 1 hay una maceta blanca, y así en todos los días. Entonces macetas blancas habrá el número de día que es, y siempre habrá una maceta negra más del día que es.

a) Cuántas macetas tendrá el jardín día 5? ¿Cómo lo sabes?

Tindrà 11 tests de flors perquè cada dia es van sumant 2 tests.

Tendrá 11 macetas porque cada día se van sumando 2 macetas

b) Cuántas macetas tendrá el jardín día 28? ¿Cómo lo sabes?

Tindrà 57 tests de flors perquè multiplique 28 per 2 i li sume 1.

Tendrá 57 macetas porque multiplico 28 por 2 y le sumo 1.

Figura 4: Respuestas al problema del jardín: a) analítica, b) geométrica y c) armónica.

En [22], mostramos otros ejemplos de respuestas de tipos analítico y geométrico, en el contexto de una enseñanza experimental de geometría 3D en 6.º de Primaria.

4.2. Otras investigaciones sobre las características de la ACM

El listado de características de los estudiantes con ACM de [36] es aceptado por los didactas actuales y algunos de ellos han investigado para identificar otras características de estos estudiantes. En particular, es importante completar las características generales propuestas por Krutetskii con otras específicas de diferentes áreas de las matemáticas. Así, [27] identifica algunas características de los estudiantes con ACM relacionadas con la resolución de problemas:

- **Formulación espontánea de problemas**. Ante una situación matemática nueva, el estudiante puede plantear preguntas acerca de aspectos de la situación y buscar él mismo las respuestas.
- **Flexibilidad en el manejo de datos**. Estos estudiantes tienden a realizar una variedad de enfoques y estrategias para resolver problemas o a modificar la forma de resolverlos para hacerlo de otra manera más rápida o interesante.

- **Habilidad para la organización de datos**. Para resolver problemas que incluyen conjuntos de datos (por ejemplo, de funciones o estadística), los estudiantes con ACM tienden a organizar los datos en listas, tablas o cualquier otra estructura que les ayude a analizarlos e identificar regularidades o relaciones.
- **Originalidad de interpretación**. Los estudiantes pueden evitar los caminos trillados y evidentes y visualizar perspectivas diferentes.
- **Habilidad para la transferencia de ideas**. Son capaces de utilizar conocimientos adquiridos en un contexto matemático para resolver problemas o responder a preguntas en otro contexto diferente novedoso para ellos.

Heinze [32] realizó experimentos con estudiantes alemanes de 2.º a 4.º grados (6 a 10 años) con ACM y ordinarios, confirmando que los estudiantes con ACM fueron mucho más rápidos resolviendo los problemas, hicieron análisis lógicos de los datos y fueron mucho más sistemáticos al resolver problemas de combinatoria. Además, observaron dos características diferenciadoras de los estudiantes con ACM:

- Alta habilidad para verbalizar y explicar sus soluciones.
- Habilidad para comprender la estructura matemática de un problema.

En [34] presentamos una lista de características de los estudiantes con ACM recogidas de diversos autores, que se están usando como criterios de identificación, y ejemplos de experimentos. Algunas características son específicas de las matemáticas, mientras que otras son válidas para la alta capacidad en cualquier área.

4.2.1. Investigaciones sobre ACM y visualización

Krutetskii, después de presentar las que considera características de la ACM, mencionadas arriba, alude a otros componentes del razonamiento matemático que «no son obligatorios en la estructura de la alta capacidad matemática», entre los que incluye «una habilidad para los conceptos espaciales» y «una habilidad para visualizar relaciones y dependencias matemáticas abstractas» ([36, p. 351]). Esto parece contradecir su propuesta del tipo de pensamiento geométrico y sus datos que muestran que estudiantes con ACM lo empleaban al resolver problemas, lo cual ha inducido a investigadores más recientes a abordar esta cuestión, que han mostrado que el uso de visualización en la resolución de problemas de matemáticas puede proporcionar también características diferenciadoras de los estudiantes con ACM.

Presmeg [48] estudia los motivos por los que, en una muestra de estudiantes con ACM de grado 12 (2.º de Bachillerato), menos del 20 % usaban el pensamiento geométrico, e identifica factores externos e internos que pueden explicar este resultado. Entre los externos, destaca la naturaleza formal de las matemáticas estudiadas en ese nivel educativo, que potencia el uso del pensamiento analítico e inhibe el uso del geométrico. Entre los internos, identifica la preferencia de bastantes estudiantes por los métodos de trabajo no visuales debido a la necesidad de usar estos métodos para tener buenos resultados académicos, si bien la mayoría de ellos usaban métodos visuales, mediante ciertos tipos de imágenes mentales [49]. Esto lleva a Presmeg a concluir que los estudiantes de este nivel educativo que prefieren el pensamiento puramente geométrico tienen más dificultades en clase que los armónicos y analíticos.

En Primaria y ESO la situación es completamente diferente, pues todavía no está presente el desarrollo formal de las matemáticas. Por ello, es conveniente disponer de experiencias que muestren características de ACM relacionadas con la visualización en contextos escolares específicos numérico-aritméticos, geométricos, (pre-)algebraicos, funcionales, aleatorios, etc. Así, [18] reflexionan sobre las características de los estudiantes con ACM y, después de recordar las diferencias que hay en el contexto escolar entre estudiantes analíticos y geométricos (visualizadores), plantean la necesidad de observar a los estudiantes trabajando en una diversidad de contextos, para que unos y otros puedan poner en juego sus habilidades. Centrado en la ESO, [51] analiza las habilidades de visualización que utiliza un grupo de estudiantes con ACM al resolver una secuencia de actividades de enriquecimiento curricular centradas en la visualización. Comprueba que dichos estudiantes utilizan la mayoría de las habilidades de visualización presentadas en [29], lo cual confirma el interés de plantear actividades que requieran visualización en la formación de los estudiantes de ACM. En el inicio de Primaria, [24] realiza experimentos con niños de 4–5 años basados en resolución de problemas aritméticos con software educativo y observa estrategias de conteo y visuales. En conclusión, planteando problemas de tipos diversos, al alcance de todos sus alumnos, los profesores podrán observar una diversidad de estrategias de resolución e identificar a los niños que usan estrategias avanzadas o eficaces, los cuales posiblemente tengan ACM.

El estudio de [20] confirma esta propuesta. Se basa en la implementación en un aula ordinaria de 6.º de Primaria de una secuencia de problemas para la enseñanza de propiedades de poliedros y el desarrollo de habilidades de visualización. Los problemas versan sobre desarrollos planos, rotaciones y secciones de cubos (la figura 5 muestra un problema). Un objetivo era identificar a estudiantes que mostraran ACM en el uso de visualización al resolver los problemas. Los resultados indican que los problemas planteados sirven para discriminar la ACM en ese contexto y que, por tanto, es posible incluir la visualización entre los contextos matemáticos en los que los estudiantes con ACM pueden mostrar comportamientos diferenciados, como el uso de las habilidades de visualización de formas sofisticadas.

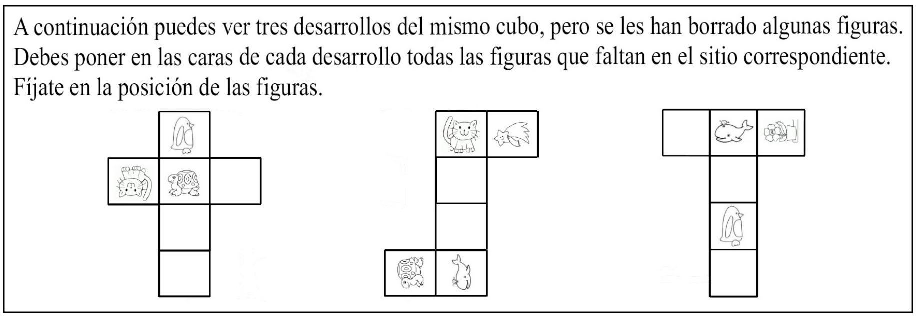


Figura 5: Problema de desarrollos de cubos.

Como parte de una investigación sobre identificación de estudiantes de Primaria con ACM, en [44] se analizan las habilidades de visualización que ponen en juego estudiantes de 2.º y 6.º de Primaria en las tres últimas fases de la olimpiada matemática nacional de Costa Rica; la figura 6 muestra el problema de visualización planteado en la última fase en cada grado. Los estudiantes con peores resultados en la olimpiada emplearon pocas o ninguna habilidades, y no supieron utilizarla bien, y los estudiantes con mejores resultados sí emplearon las habilidades y lo hicieron eficazmente. Estos resultados servirán de base para crear grupos de problemas adecuados para que todos los estudiantes mejoren sus habilidades de visualización y que, además, los estudiantes con ACM desarrollen al máximo su potencial de visualización.

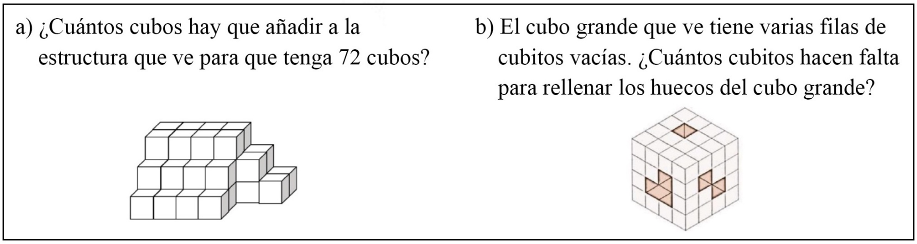


Figura 6: Problemas de visualización de la última fase de la olimpiada de a) 2.º y b) 6.º grados.

4.3. La ACM y la creatividad matemática

Aunque la investigación moderna de la creatividad se inició a mediados del siglo XX, sigue habiendo poco consenso sobre cómo definir la creatividad y cuáles son sus características centrales; por ejemplo, en [61] se informa de recopilaciones recientes de más de 100 definiciones de creatividad. En el contexto de las matemáticas, tampoco existe consenso sobre cómo definir, identificar o evaluar la creatividad matemática [40]. Actualmente hay una opinión generalizada de que la creatividad es parte inherente de la actividad matemática [40], y muchos estudios afirman que la creatividad es un subcomponente de la ACM [37], como muestra la recopilación de [35] de investigaciones que relacionan la creatividad matemática y la ACM.

La caracterización de creatividad matemática que actualmente es más utilizada y operativa se basa en una definición de creatividad general de Torrance, y se centra en actividades de resolución y de formulación de problemas. Considera que la creatividad matemática está formada por tres componentes [39]:

- **Fluidez**: hace referencia a la continuidad en la producción de ideas, al flujo de asociaciones y al uso de conocimiento adecuado. En la práctica, cuando se usa la resolución de problemas para evaluar la creatividad, la fluidez se mide habitualmente por la cantidad de soluciones válidas de un problema que un estudiante puede dar.

- **Flexibilidad**: se muestra al producir diversas ideas pertinentes, cambiar el enfoque en la resolución de un problema o encontrar diferentes resoluciones. En términos operativos, los investigadores fijan criterios para considerar dos resoluciones de un problema como diferentes y cuentan la cantidad de soluciones diferentes producidas por los estudiantes.
- **Originalidad**: corresponde a la utilización por un estudiante de relaciones entre contenidos matemáticos, procedimientos de resolución, etc., diferentes de los usuales en los estudiantes de su curso. Para evaluar la originalidad de los estudiantes, generalmente se tienen en cuenta las diferentes resoluciones correctas producidas por los estudiantes observados y se identifican las menos frecuentes y que se alejan de las resoluciones estándar esperables en ese contexto escolar.

Una manera de mostrar flexibilidad es modificando, durante la resolución de un problema, el camino de resolución. Esto se puede ver en las experimentaciones de [10], quienes analizan la flexibilidad de estudiantes de Secundaria planteándoles varios problemas, uno de ellos basado en un patrón geométrico de una progresión aritmética. Los autores identifican un tipo de resoluciones en el que los estudiantes pasan del procedimiento recursivo a uno funcional. Este cambio de estrategia permite a los estudiantes resolver correctamente el problema.

En relación con la flexibilidad, es necesario tener en cuenta que, en ocasiones, los estudiantes con ACM son capaces de identificar desde el primer momento, con frecuencia antes de lo esperado por el investigador o el profesor, una estrategia de resolución correcta y eficaz, por lo que no necesitan modificarla, como puede observarse en [1]. Por tanto, que un estudiante con ACM no muestre flexibilidad al resolver un problema no significa que no la tenga desarrollada.

Para evaluar la originalidad, en [39] utilizan la idea de **problemas con múltiples resoluciones**, que son problemas abiertos que pueden ser resueltos de diversas maneras; [37] y [39] muestran ejemplos de resoluciones de problemas de este tipo. En estos problemas es posible valorar las tres características mencionadas anteriormente para la creatividad, pero principalmente la originalidad.

En [34] analizamos la respuesta de un estudiante con ACM que, para dibujar un polígono regular de 20 lados, usa el ángulo exterior (figura 7) en vez de, como es usual, el ángulo central.

Esta metodología ha sido usada por [56] para analizar la relación entre creatividad y ACM. Para ello, seleccionaron 6 estudiantes del Proyecto Estalmat y 5 estudiantes del máster de formación del profesorado de Secundaria con grados en matemáticas o física. Les plantearon varios problemas con múltiples resoluciones con la consigna de que debían resolverlos por tantos caminos distintos como se les ocurriera. Los resultados muestran que 4 estudiantes de Estalmat fueron los que mostraron mayor creatividad, a bastante distancia de los estudiantes del máster.

Por su parte, [9] propone diversos tipos de actividades de resolución y planteamiento de problemas que pueden realizar los estudiantes para fomentar el desarrollo de cada componente de la creatividad: resolver problemas con varias interpretaciones, estrategias de resolución o soluciones, y formular varios problemas a partir del

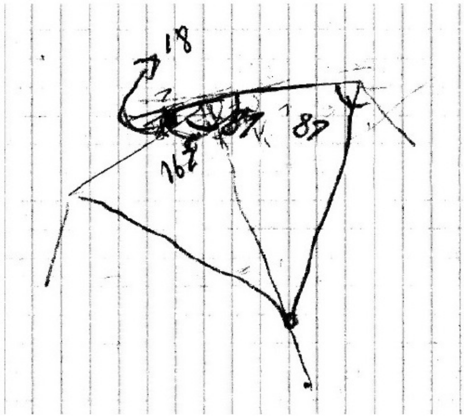


Figura 7: Dibujo de un polígono regular usando el ángulo exterior.

mismo contexto fomenta la fluidez; resolver un problema de varias formas y formular problemas que tengan varias formas de resolución o formular problemas haciendo variaciones en los datos iniciales fomenta la flexibilidad; hacer que los estudiantes vean diferentes resoluciones o soluciones de un problema y después generen una diferente y que vean diferentes formulaciones de problemas, acordes a ciertos requisitos, y posteriormente formulen otros enunciados diferentes fomenta la originalidad.

5. Identificación de estudiantes con alta capacidad matemática

Al hablar de identificación de la ACM, es normal observar en primer lugar cómo se desenvuelven los estudiantes en las clases de matemáticas de su centro escolar y prestar atención a los estudiantes con **alto rendimiento académico** (con buenas notas en matemáticas). Sin embargo, no todos los estudiantes con alto rendimiento académico tienen ACM; el motivo es que la ACM tiene que ver con el éxito en la resolución de problemas, mientras que el alto rendimiento académico tiene que ver con el éxito en los exámenes [38]. El sistema educativo español favorece la evaluación en matemáticas mediante la resolución de ejercicios rutinarios, cálculos algorítmicos, memorización de definiciones y propiedades, etc. Esta metodología lleva a que estudiantes aplicados y con buena memoria pueden obtener las mejores notas, aunque sepan los contenidos con poca profundidad y no sean capaces de resolver problemas no rutinarios, es decir, estudiantes que no tienen ACM. Por otra parte, no todos los estudiantes con ACM tienen alto rendimiento académico; por ejemplo, hay estudiantes con ACM cuyo interés o motivación por destacar en sus clases es escaso, lo que les lleva a tratar de no obtener notas muy buenas.

En la investigación de [20] que hemos descrito antes, su autora comparó las calificaciones en matemáticas de diez estudiantes con sus resultados en la unidad de enseñanza experimental. Sus resultados (figura 8) muestran muy alta correlación entre el rendimiento académico y el éxito en la resolución de los problemas experimentales de los mejores estudiantes del grupo (A1, A2, A9 y A10), pero en los demás estudiantes se obtiene menor correlación, siendo en casi todos los casos mayor el rendimiento académico que el éxito en la unidad de enseñanza experimental.

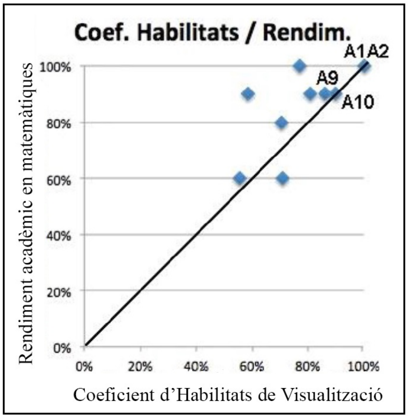


Figura 8: Comparación entre rendimiento académico y ACM en visualización ([20]).

Otra relación importante que hay que analizar es entre superdotación y ACM. El sistema educativo español, igual que los de otros países, utiliza el **cociente intelectual** (CI, o IQ en inglés) como herramienta para el reconocimiento de los estudiantes superdotados. Se considera que un estudiante es superdotado cuando su CI es igual o superior a 130. Los test estandarizados de CI están formados por varias partes, que evalúan diferentes componentes de razonamiento (verbal, numérico, espacial, lógico, memoria), pero solo algunos de estos tienen que ver con el razonamiento matemático. Por ello, un estudiante puede obtener más de 130 puntos (superdotado) con la parte matemática baja (sin ACM) o no alcanzar 130 puntos (no superdotado) aunque la parte matemática sea alta (con ACM).

Con frecuencia, se usan test psicométricos para identificar a estudiantes con ACM. Estos test suelen estar formados por ítems de elección múltiple, lo cual hace que sean poco válidos para evaluar por sí solos la capacidad matemática. Un defecto que tienen es que no pueden evaluar la creatividad, pues la creatividad se muestra cuando los estudiantes tienen la oportunidad de descubrir elementos matemáticos o relaciones entre ellos, pero los ítems de los test psicométricos no dan lugar a su uso [41, 37]. Otro defecto es que estos ítems no permiten identificar cuál de los diversos procesos de razonamiento matemático y resolución posibles ha seguido cada estudiante. No obstante, en ocasiones los didactas de las matemáticas usan en sus investigaciones uno de estos test, o un fragmento del test, en combinación con otras herramientas matemáticas adecuadas. En [16] se concluye que basar la identificación de estudiantes con ACM exclusivamente en test psicométricos de inteligencia lleva a dejar sin identificar a estudiantes con ACM.

Varias investigaciones han comparado los resultados de identificación de estudiantes con ACM mediante test psicométricos y resolución de problemas seleccionados, concluyendo todas ellas que la resolución de problemas proporciona resultados más fiables que los test, pues estos producen más cantidad de falsos positivos y falsos negativos. Así, en [11] comparan los resultados obtenidos por niños de 12–13 años en el test de inteligencia de Raven y en una batería de problemas aritméticos multiplicativos creada por ellos. También en [45], trabajando con estudiantes de 9 a 12 años, emplean el PAT (*Progressive Achivement Test in Mathematics*, test estandarizado usado en Nueva Zelanda), la nominación de sus profesores y padres, y una batería de problemas de matemáticas. En [16] comparan la eficacia para identificar estudiantes de 6.º de Primaria con ACM de una batería de problemas usados en Estalmat y los subtest directamente relacionados con matemáticas del test de inteligencia PMA de Thurstone. Por su parte, en [52] se administra a estudiantes de Estalmat varios test psicológicos y una batería de problemas de geometría. Por tanto, para averiguar si un estudiante tiene ACM hay que ver cómo hace matemáticas, es decir, cómo resuelve problemas de matemáticas.

Otras investigaciones han comparado las resoluciones de problemas realizadas por estudiantes ordinarios y con ACM, con el objetivo de identificar rasgos característicos de ACM. Estos estudios concluyen que los estudiantes con ACM tienen más éxito resolviendo problemas complejos y que sus estrategias de resolución pueden ser más elaboradas. Pero tener buenas heurísticas de resolución de problemas no es suficiente para explicar las diferencias entre unos estudiantes y otros. Hay otros componentes, a los que están prestando atención los investigadores en didáctica de las matemáticas [38]. Entre estos se encuentran las formas de entender las matemáticas o de establecer relaciones entre contenidos matemáticos aparentemente alejados, el uso de la intuición (Jaime y Gutiérrez [34] muestran un ejemplo), la perspicacia (*insight*), las ideas repentinas (el ¡ajá!), el interés por los retos matemáticos, la actitud y otros. Por ejemplo, Leikin [37] afirma que el éxito en la resolución de problemas basada en la perspicacia puede usarse como indicador de ACM.

No es razonable, ni fiable, afirmar que un estudiante tiene ACM porque ha resuelto con éxito problemas de un tipo concreto (p. ej., problemas basados en la combinatoria) o centrados en una determinada área de las matemáticas escolares. Es necesario valorar la forma de resolver diversos tipos de problemas y problemas de todas las áreas de las matemáticas accesibles para el estudiante, teniendo en cuenta su edad y su formación matemática previa. Por ello, se están realizando investigaciones dirigidas a describir y analizar las actuaciones de los estudiantes de diferentes edades o niveles educativos cuando resuelven problemas de distintos tipos y contenidos, con el objetivo de identificar formas de actuación que puedan considerarse propias de los estudiantes con ACM, o claramente más frecuentes en estos estudiantes que en los de capacidad matemática media.

En esta línea de investigación, además de numerosas publicaciones internacionales, en España hay estudios centrados en una diversidad de contextos matemáticos y niveles educativos que tienen en común su objetivo de caracterizar el razonamiento de estudiantes con ACM cuando resuelven determinados problemas: álgebra temprana, en contextos de problemas de patrones geométricos en 4.º–6.º de Primaria

[1, 2, 30] y de pensamiento funcional en 6.º de Primaria [14]; resolución de problemas aritméticos de estructura multiplicativa en 6.º de Primaria y 2.º de ESO [3, 11, 12]; geometría plana [28]; geometría espacial en Primaria y ESO [20, 22, 21, 60]; probabilidades [57]; pensamiento computacional en 1.º y 2.º de Primaria [15]; visualización [51, 31]; combinatoria [43].

En el contexto general del uso de la resolución de problemas de matemáticas para identificar a estudiantes con ACM, se diferencian dos líneas de investigación: sobre la **resolución de problemas** (*problem solving*) por los estudiantes y sobre la **formulación de problemas** (*problem posing*) por los estudiantes. En las páginas anteriores hemos descrito y mencionado numerosas publicaciones centradas en la resolución de problemas. La actividad de formulación de problemas consiste en pedir a los estudiantes que propongan problemas de matemáticas que cumplan determinados requisitos. Un clásico recomendable en este tema es [8], publicado por primera vez en 1983. Se puede proponer la formulación de problemas de varias formas:

- Resolver un problema y formular otros relacionados.
- Resolver un problema y formular otros con los mismos datos.
- Formular varios problemas a partir de un contexto y, en ocasiones, resolverlos el propio estudiante o los compañeros.

Diversos investigadores (por ejemplo, [19]) han observado que los estudiantes con nivel matemático alto formulan problemas con mayor dificultad de cálculo, con sistemas numéricos o figuras de más complejidad, mayor planificación y más operaciones que los estudiantes de menor nivel matemático. Al observar a estudiantes de 16–17 años, en [23] se concluye que los estudiantes con ACM formulan problemas de mayor riqueza, utilizan diversos tipos de números, requieren varios pasos para su resolución, son de demanda cognitiva alta, muestran un nivel metacognitivo mayor, mayor fluidez de ideas y relación entre los hechos.

6. Acciones para el desarrollo de la alta capacidad matemática

En esta sección vamos a comentar acciones dirigidas a atender las necesidades de formación matemática de los estudiantes con ACM. Estas acciones se pueden dividir en dos grandes bloques: curriculares (que forman parte de la actividad reglada de los centros de enseñanza) y extracurriculares (las demás). No hemos dividido esta sección en dos apartados porque la mayor parte de las ideas que presentamos son válidas para su uso en ambos contextos.

Independientemente del contexto educativo en el que se sitúe cada estudiante con ACM, todos ellos necesitan recibir una enseñanza adaptada a sus características personales (lo que nuestro sistema educativo llama adaptación curricular). Como hemos visto en las páginas anteriores, hay notables diferencias entre unos y otros estudiantes con ACM, por lo que no se puede pretender elaborar materiales educativos concretos válidos para todos los estudiantes con ACM de un mismo curso. De hecho, en [18] indican que la selección e implementación de contenidos escolares para estudiantes con ACM debe hacerse basándose en la capacidad de los estudiantes concretos y no en las prescripciones del currículo, que se centran en la edad cronológica de los estudiantes y los contenidos de cursos anteriores.

La investigación en didáctica de las matemáticas está en condiciones de ofrecer a los profesores, por una parte, información sobre las características cognitivas, afectivas, actitudinales, etc., de los estudiantes con ACM, para que sean conscientes de las particularidades de sus alumnos con ACM y puedan conectar con ellos. Por otra parte, puede ofrecerles también propuestas metodológicas dirigidas a desarrollar el potencial matemático de los estudiantes con ACM y también puede ofrecerles materiales de trabajo, generalmente centrados en la resolución de problemas, para llevar a sus clases, posiblemente con algunas adaptaciones. La adecuada formación inicial y permanente del profesorado es clave.

Algo común a todos los estudiantes con ACM es su interés por tareas que les resulten retadoras y su desinterés ante ejercicios que les resulten fáciles de resolver y/o rutinarios. Por tanto, los profesores deben proponerles actividades, investigaciones, problemas, etc., que sean interesantes para ellos y que les exijan un alto nivel de esfuerzo cognitivo [24, 38].

La investigación didáctica confirma una y otra vez la necesidad de tener presentes algunas ideas centrales para la formación de los estudiantes con ACM. Una de ellas es que dichos estudiantes sí necesitan atención de sus profesores; estos estudiantes comprenden rápidamente los contenidos curriculares trabajados en sus clases y resuelven con facilidad las tareas ordinarias, pero, para desarrollar su potencial matemático, requieren orientación, propuestas de temas de estudio, ayuda con los nuevos contenidos que no entienden o los problemas que no saben resolver. [12] y [53] informan sobre los resultados de sendas investigaciones en las que identificaron los errores cometidos por estudiantes con ACM en problemas aritméticos y geométricos, respectivamente.

Otra idea central es que la enseñanza a los estudiantes con ACM debe basarse en la resolución de problemas (en el sentido clásico de Polya y Schoenfeld) que supongan verdaderos retos para ellos [18, 24, 13], pero diferenciando si los problemas tienen como objetivo la identificación de la ACM o el aprendizaje de contenidos matemáticos. En lo que se refiere al aprendizaje, estos autores hacen propuestas sobre cómo modificar problemas ordinarios haciéndolos más complejos para convertirlos en retos, de forma que el nuevo problema (el reto) requiera la puesta en marcha de alguna de las características de talento matemático o el uso de alguna heurística nueva o compleja. Para la reformulación de un problema proponen varias estrategias:

- Modificando algunos datos, por ejemplo cambiando el tamaño de los números, el operando incógnita, etc.
- En aritmética, cambiando la naturaleza de los números empleados (naturales, decimales, enteros, fraccionarios, etc., o combinaciones de estos).
- Modificando algunas condiciones. Esta estrategia tiene una forma muy interesante de aplicación cuando el profesor plantea preguntas ¿Y si. . . ? o ¿Y si no. . . ? Por ejemplo, al estudiar el teorema de Pitágoras, ¿y si las figuras sobre los lados del triángulo no son cuadrados?

- Reformulando los enunciados. Se pueden crear problemas con la misma estructura matemática pero diferentes características de verbalización o de contexto.

Hemos mencionado la necesidad de plantear a los estudiantes con ACM problemas que les supongan retos y les obliguen a realizar un alto esfuerzo cognitivo. Esto plantea la cuestión de cómo valorar el nivel de reto y de esfuerzo cognitivo que esperamos que ofrezca un problema o que realmente ha supuesto su resolución para un estudiante. La investigación en didáctica de las matemáticas está utilizando varios modelos teóricos que dan respuesta a dicha cuestión. Aquí presentamos brevemente el modelo que los autores estamos usando en nuestras propias investigaciones.

Llamamos **demanda cognitiva** de un problema al esfuerzo que su resolución supone para un estudiante. La demanda cognitiva de un problema es relativa, pues depende de las características del currículo (contenidos estudiados, metodología de enseñanza, etc.) y de la forma como el estudiante ha resuelto el problema. El modelo de los **niveles de demanda cognitiva** define cuatro niveles que caracterizan diferentes formas de razonamiento y grados de esfuerzo cognitivo empleados por los estudiantes para resolver problemas. Identificando el nivel de demanda cognitiva de un estudiante con ACM al resolver un problema podemos saber si el problema le ha resultado retador, muy fácil o demasiado difícil. Las características de los niveles de demanda cognitiva son [30, 59]:

- **Memorización**: problemas que solo requieren que el estudiante reproduzca datos, propiedades, fórmulas o definiciones aprendidos previamente o información presentada explícitamente en el enunciado.
- **Procedimientos sin conexiones** a conceptos o significados: problemas en los que la respuesta correcta se obtiene realizando de manera rutinaria un proceso algorítmico ya conocido, sin necesidad de tener en cuenta contenidos matemáticos que quedan implícitos.
- **Procedimientos con conexiones** a conceptos o significados: problemas cuya respuesta correcta se obtiene realizando un proceso algorítmico no rutinario, pues es necesario tomar decisiones, para lo cual se requiere descubrir determinados contenidos matemáticos, entenderlos, y aplicarlos.
- **Hacer matemáticas**: problemas cuya resolución correcta requiere pensamiento complejo y no algorítmico, que incluye comprender los contenidos matemáticos implícitos y explorar las relaciones entre ellos.

Hemos utilizado los niveles de demanda cognitiva en experimentos de enseñanza de álgebra temprana, geometría plana y visualización, que están analizados con detalle, tanto los problemas utilizados como las respuestas de estudiantes que los resolvieron, parte de ellos con ACM [4]. Por su parte, en [57] se usan los niveles para analizar la adecuación de problemas de probabilidad planteados en varias olimpiadas.

Además de la atención que los estudiantes con ACM reciben (o deberían recibir) en sus centros de enseñanza, existen diversos tipos de actividades extracurriculares orientadas específicamente a estos estudiantes, que mayoritariamente tienen la forma de talleres de resolución de problemas, olimpiadas y otras competiciones matemáticas, cursos o campamentos de verano y páginas web.

En España, destaca el *Proyecto Estalmat* (Proyecto para el Estímulo del Talento Matemático), creado en 1998 por Miguel de Guzmán con el objetivo de identificar y estimular a estudiantes con interés por las matemáticas, para intentar desarrollar su capacidad matemática y que puedan llegar a ser buenos matemáticos. Durante dos cursos académicos, los estudiantes participan en talleres gratuitos de matemáticas los sábados por la mañana, en los que se trata una diversidad de temas y contenidos matemáticos extracurriculares. Para ser admitidos en los talleres de Estalmat, los estudiantes, de 12 o 13 años, deben pasar una prueba consistente en la resolución de varios problemas de matemáticas.

Este no es el único programa de enriquecimiento extracurricular que existe en España, pues hay asociaciones de padres o de profesores de matemáticas que organizan actividades de diverso tipo, en especial olimpiadas, dirigidas a estudiantes con ACM o, por lo menos, con interés por las matemáticas. También la investigación didáctica se ocupa de este terreno, ofreciendo programas de enriquecimiento y talleres fruto de proyectos de investigación, como el programa de enriquecimiento sobre pensamiento funcional presentado en [14].

7. Síntesis y conclusiones

En este artículo hemos querido mostrar que la investigación en didáctica de las matemáticas (o educación matemática) se está preocupando desde hace varias décadas por los estudiantes con ACM y está avanzando en el conocimiento de las formas de hacer matemáticas, creencias, motivaciones, etc., de los estudiantes con ACM, y en el diseño, experimentación y evaluación de propuestas de diverso tipo para que los profesores puedan atender adecuadamente a estos estudiantes.

Sabemos que hemos dejado temas importantes e interesantes en el tintero, como formación de profesores, afectividad, género o atención a los estudiantes con muy alta capacidad matemática, entre otros, pero hemos preferido presentar con un poco más de detalle los temas que hemos abordado, a costa de no poder tratar algunos.

Hemos hecho un recorrido por diferentes componentes teóricos que sirven de base para entender y organizar el mundo de los estudiantes con ACM y hemos presentado resultados de investigación interesantes, en particular varios producidos en España, que pueden ayudar a entender y atender mejor a estos estudiantes.

Una muestra del desarrollo internacional de la investigación didáctica sobre la ACM es la creación de grupos internacionales de investigadores. En 1999 se creó el grupo *Mathematical Creativity and Giftedness*, que organiza un congreso bianual. También hay grupos en otros congresos importantes en la didáctica de las matemáticas, como el *International Congress on Mathematical Education* (ICME), organizado por la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), que es parte de la IMU, y el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME).

AGRADECIMIENTOS. Varios resultados presentados en este artículo se han obtenido como parte de los proyectos de investigación EDU2017-84377-R (AEI/FEDER, UE) y UV-INV-AE-1557785 (Vicerrectorado de Investigación de la Universitat de València).

Referencias

[1] E. Arbona, *Introducción al álgebra mediante problemas de patrones geométricos a un estudiante de educación primaria con altas capacidades matemáticas* (Trabajo Fin de Máster), Universidad de Valencia, Valencia, 2016. Disponible en `http://roderic.uv.es/handle/10550/56731`

[2] E. Arbona, D. García, M. J. Beltrán y A. Gutiérrez, Geopattern, una app para resolver problemas de patrones geométricos en primaria, *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6)* **7** (2018), no. 2, 1–23.

[3] M. Benavides, *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, 2008. Disponible en `http://digibug.ugr.es/bitstream/10481/1827/1/17349515.pdf`

[4] C. Benedicto, *Diseño y aplicación de un instrumento para valorar la demanda cognitiva de problemas de matemáticas resueltos por estudiantes de enseñanza obligatoria. El caso de las altas capacidades matemáticas* (Tesis Doctoral), Universidad de Valencia, Valencia, 2018. Disponible en `http://roderic.uv.es/handle/10550/66468`

[5] B. Bicknell, Who are the mathematically gifted? Student, parent and teacher perspectives, *Journal of the Korean Society of Mathematical Education, Series D: Research in Mathematical Education* **13** (2009), no. 1, 63–73.

[6] M. Blanton, I. Isler-Baykal, R. Stroud, A. Stephens, E. Knuth y A. M. Gardiner, Growth in children's understanding of generalizing and representing mathematical structure and relationships, *Educational Studies in Mathematics* **102** (2019), no. 2, 193–219.

[7] A. V. Borovik y T. Gardiner, Mathematical abilities and mathematical skills, texto para la *World Federation of National Mathematics Competitions Conference 2006*, 2007. Disponible en `http://eprints.ma.man.ac.uk/839/1/covered/MIMS_ep2007_109.pdf`

[8] S. I. Brown y M. I. Walter, *The art of problem posing*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, NJ, 2005.

[9] M. L. Callejo, Creatividad matemática y resolución de problemas, *Sigma* **22** (2003), 25–34.

[10] M. L. Callejo y A. Zapatera, Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria, *Boletim de Educação Matemática (Bolema)* **28(48)** (2014), 64–88.

[11] E. Castro, M. Benavides y I. Segovia, Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa, *Faísca* **11** (2006), 4–22.

[12] E. Castro, M. Benavides y I. Segovia, Diagnóstico de errores en niños con talento, *Unión* **16** (2008), 123–140.

[13] E. Castro, J. F. Ruiz-Hidalgo y E. Castro-Rodríguez, Retos, profesores y alumnos con talento matemático, *Aula* **21** (2015), 85–104.

[14] A. Damián, M. C. Cañadas y R. Ramírez, Pensamiento funcional con variables continuas en estudiantes de educación primaria en un programa de enriquecimiento curricular, *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 75–82, Universidad de La Rioja, Logroño, 2021.

[15] P. D. Diago, A. Gutiérrez, A. Jaime y D. F. Yáñez, Uso de visualización por estudiantes de alta capacidad matemática al programar un bee-bot, *Investigación en educación matemática XXII*, 621, SEIEM, Gijón, 2018.

[16] O. Díaz, T. Sánchez, C. Pomar y M. Fernández, Talentos matemáticos: Análisis de una muestra, *Faísca* **13** (2008), no. 15, 30–39.

[17] N. Díez López, *Las dobles titulaciones consolidan el éxito profesional de los estudios matemáticos* (texto no publicado), 2016. Disponible en `http://www.rsme.es/2016/05/las-dobles-titulaciones-consolidan-el-exito-profesional-de-los-estudios-matematicos`

[18] C. M. Diezmann y J. J. Watters, Summing up the education of mathematically gifted students, *Proceedings of the 25th Annual Conference of the MERGA*, 219–226, MERGA, Sidney, 2002.

[19] N. F. Ellerton, Children's made-up mathematics problems – a new perspective on talented mathematicians, *Educational Studies in Mathematics* **17** (1986), no. 3, 261–271.

[20] M. T. Escrivà, *Habilitats de visualització manifestades per alumnes de primària quan resolen activitats de geometria 3D i la seua relació amb el talent matemàtic* (Trabajo Fin de Máster), Universitat de València, Valencia, 2016. `http://roderic.uv.es/handle/10550/56732`

[21] M. T. Escrivà, A. Jaime y A. Gutiérrez, Uso de software 3D para el desarrollo de habilidades de visualización en educación primaria, *Educación Matemática en la Infancia (Edma 0-6)* **7** (2018), no. 1, 42–62.

[22] M. T. Escrivà, A. Jaime, A. Gutiérrez y M. J. Beltrán-Meneu, Geometría 3D y talento matemático, *Uno* **77** (2017), 7–13.

[23] J. Espinoza, *Caracterización de estudiantes con talento en matemática mediante tareas de invención de problemas* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, 2018. Disponible en `https://digibug.ugr.es/handle/10481/54709`

[24] V. Freiman, Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach, *The Montana Mathematics Enthusiast* **3** (2006), no. 1, 51–75.

[25] F. Gagné, De los genes al talento: La perspectiva dmgt/cmtd, *Revista de Educación* **368** (2015), 12–39.

[26] H. Gardner, *Multiple intelligences: the theory into practice*, Basic Books, Nueva York, NY, 1993.

[27] C. Greenes, Identifying the gifted student in mathematics, *The Arithmetic Teacher* **28** (1981), no. 6, 14–17.

[28] M. Guinjoan, J. M. Fortuny y Á. Gutiérrez, Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur, *Enseñanza de las Ciencias* **33** (2015), no. 1, 29–46.

[29] A. Gutiérrez, Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, 3–19, PME, Valencia, 1996.

[30] A. Gutiérrez, C. Benedicto, A. Jaime y E. Arbona, The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. Analysis of key moments in a pre-algebra teaching sequence, *Mathematical creativity and Mathematical Giftedness. Enhancing creative capacities in mathematically promising students*, 169–198, Springer, Cham, Suiza, 2018.

[31] A. Gutiérrez, R. Ramírez, C. Benedicto, M. J. Beltrán-Meneu y A. Jaime, Visualization abilities and complexity of reasoning in mathematically gifted students' collaborative solutions to a visualization task. A networked analysis, *Visualizing mathematics. The role of spatial reasoning in mathematical thought*, 309–337, Springer, Cham, Suiza, 2018.

[32] A. Heinze, Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students, *International Education Journal* **6** (2005), no. 2, 175–183.

[33] R. Ibáñez Torres, P. Alegría Ezquerra, F. Blasco Contreras, A. Pérez Sanz y Á. Timón García-Longoria, Divulgación de las matemáticas, *Libro blanco de las matemáticas*, 421–481, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 2020.

[34] A. Jaime y A. Gutiérrez, La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de educación primaria con altas capacidades matemáticas, *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*, 147–190, PUV, Valencia, 2014.

[35] M. Kattou, K. Kontoyianni, D. Pitta-Pantazi y C. Christou, Connecting mathematical creativity to mathematical ability, *ZDM Mathematics Education* **45** (2013), no. 2, 167–181.

[36] V. A. Krutetskii, *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, The University of Chicago Press, Chicago, IL, 1976.

[37] R. Leikin, Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry, *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, 59–80, Springer, Dordrecht, Holanda, 2014.

[38] R. Leikin, Giftedness and high ability in mathematics, *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer, Cham, Suiza, 2018.

[39] R. Leikin y M. Lev, Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference?, *ZDM Mathematics Education* **45** (2013), no. 2, 183–197.

[40] E. L. Mann, Creativity: The essence of mathematics, *Journal for the Education of the Gifted* **30** (2006), no. 2, 236–260.

[41] R. C. Miller, *Discovering mathematical talent*, ERIC, EE. UU., 1990. Disponible en `https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED321487.pdf`

[42] F. Mönks, Desarrollo de los adolescentes superdotados, *Desarrollo y educación de los niños superdotados*, 205–216, Amarú, Salamanca, 1992.

[43] J. Montejo-Gámez, J. A. Fernández-Plaza y R. Ramírez-Uclés, Talento matemático en la resolución de un problema de generalización, *Investigación en educación matemática. Homenaje a Enrique Castro*, 121–138, Octaedro, Granada, 2020.

[44] M. Mora y A. Gutiérrez, Habilidades de visualización en niños de primaria con alta capacidad matemática, *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 107–114, Universidad de La Rioja, Logroño, 2021.

[45] K. Niederer, R. J. Irwin, K. C. Irwin y I. L. Reilly, Identification of mathematically gifted children in New Zealand, *High Ability Studies* **14** (2003), no. 1, 71–84.

[46] R. Pardo de Santayana, *El alumno superdotado y sus problemas de aprendizaje: Validación del oeq-ii como prueba de diagnóstico* (Tesis Doctoral), Universidad Complutense de Madrid, Madrid, 2006. Disponible en `https://eprints.ucm.es/id/eprint/7254/1/T26463.pdf`

[47] L. Parish, Defining mathematical giftedness, *Proceedings of the 37th Annual Conference of the MERGA*, 509–516, MERGA, Sydney, 2014.

[48] N. C. Presmeg, Visualization and mathematical giftedness, *Educational Studies in Mathematics* **17** (1986), no. 3, 297–311.

[49] N. C. Presmeg, Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics* **6** (1986), no. 3, 42–46.

[50] M. D. Prieto, C. Ferrándiz, M. Ferrando, C. Sánchez y R. Bermejo, Inteligencia emocional y alta habilidad, *Revista Española de Pedagogía* **240** (2008), 241–260.

[51] R. Ramírez, *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada, 2012. Disponible en `http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461`

[52] R. Ramírez Uclés y P. Flores Martínez, Habilidades de visualización de estudiantes con talento matemático: Comparativa entre los test psicométricos y las habilidades de visualización manifestadas en tareas geométricas, *Enseñanza de las Ciencias* **35** (2017), no. 2, 179–196.

[53] R. Ramírez-Uclés, P. Flores Martínez e I. Ramírez-Uclés, Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con

talento matemático, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **21** (2018), no. 1, 29–56.

[54] Real Sociedad Matemática Española, *Libro blanco de las matemáticas*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 2020.

[55] J. S. Renzulli y S. M. Reis, La concepción de los tres anillos: Un enfoque de desarrollo para promover la productividad creativa de los estudiantes, *Revista Sudamericana de Educación, Universidad y Sociedad* **6** (2018), no. 6, 11–37.

[56] O. Roldán e I. Ferrando, Creatividad en alumnos de talento matemático: Un estudio exploratorio, *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 129–136, Universidad de La Rioja, Logroño, 2021.

[57] J. M. Rubio-Chueca, J. M. Muñoz-Escolano y P. Beltrán-Pellicer, Análisis de los problemas de probabilidad en las olimpiadas matemáticas, *Actas de las Jornadas Internacionales de Investigación y Práctica Docente en Alta Capacidad Matemática*, 143–150, Universidad de La Rioja, Logroño, 2021.

[58] A. H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Nueva York, NY, 1985.

[59] M. S. Smith y M. K. Stein, Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice, *Mathematics Teaching in the Middle School* **3** (1998), no. 5, 344–350.

[60] C. Sua, A. Gutiérrez y A. Jaime, Design criteria of proof problems for mathematically gifted students, *Proceedings of the 10th ERME Topic Conference MEDA 2020*, 303–310, Johannes Kepler University, Linz, Austria, 2020.

[61] D. J. Treffinger, G. C. Young, E. C. Selby y C. Shepardson, *Assessing creativity: A guide for educators (rm02170)*, The National Research Center on the Gifted and Talented, University of Connecticut, Storrs, CT, 2002. Disponible en `https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED505548.pdf`

Adela Jaime, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València
Correo electrónico: `adela.jaime@uv.es`

Ángel Gutiérrez, Dpto. de Didáctica de la Matemática, Universitat de València
Correo electrónico: `angel.gutierrez@uv.es`
Página web: `https://www.uv.es/angel.gutierrez/`