

La teoría de Belyi-Grothendieck de dessins d'enfants

por

Ernesto Girondo, Gabino González-Diez y David Torres-Teigell

RESUMEN. Este artículo pretende ser una introducción elemental a la teoría de dessins d'enfants de Grothendieck.

1. INTRODUCCIÓN

El grupo absoluto de Galois es un grupo infinito que contiene toda la aritmética de las extensiones algebraicas de \mathbb{Q} y juega un papel central en la teoría algebraica de números y en la geometría aritmética. Para dar una idea de su complejidad, basta decir que solamente se pueden escribir explícitamente dos elementos: la identidad y la conjugación compleja.

En 1984 Alexander Grothendieck escribía *Esquisse d'un Programme* [5], una propuesta de investigación englobada dentro de su postulación a un puesto en el Centre National de la Recherche Scientifique. En ella se esboza por primera vez la teoría de dessins d'enfants, cuyo gran objetivo es proponer el estudio del grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$, formado por los automorfismos del cuerpo $\overline{\mathbb{Q}}$ de números algebraicos, a través de su acción en ciertos grafos inmersos en superficies compactas orientables.

Un *dessin d'enfant* no es más que un grafo bipartito \mathcal{D} inmerso en una superficie compacta orientable X de forma tal que su complementario es una unión de discos topológicos. La teoría de dessins d'enfants se basa en dos ideas igualmente sorprendentes y complementarias.

La primera es el hallazgo de Grothendieck de que estos grafos representan curvas algebraicas $C : F(x, y) = 0$ con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$ junto con una cierta función racional $R(x, y)$ también con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$. Por ejemplo, los dos grafos en el toro que se ven en la Figura 1 representan las curvas $y^2 = x(x-1)(x - e^{2\pi i/5})$ y $y^2 = x(x-1)(x - e^{4\pi i/5})$.

La segunda es el resultado de Belyi que asegura que todas las curvas C con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$ se obtienen a partir de uno de estos grafos. De este modo, a la acción



Alexander Grothendieck en 1970

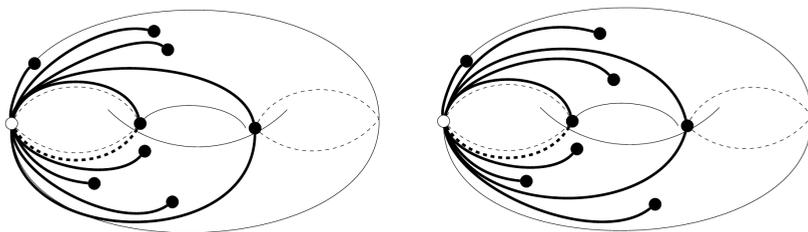


Figura 1: Dos dibujos en el toro que determinan dos curvas algebraicas no isomorfas.

natural de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ en las curvas C (o, de forma más precisa, en los pares (C, R)) le corresponde una acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ en dibujos. Parece que este descubrimiento produjo un gran impacto en Grothendieck. En sus propias palabras ([5, §11 $\frac{1}{2}$]):

*Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable.*¹

¹*Je puis faire exception pourtant d'un autre "fait", du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotundité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots.*

Este artículo pretende ser una introducción elemental a los dibujos d'enfants. En la Sección 2 se exponen conceptos básicos de la teoría de superficies de Riemann compactas y su equivalencia con curvas algebraicas. La Sección 3 trata sobre dibujos d'enfants y superficies de Belyi. La Sección 4 está dedicada al teorema de Belyi. Finalmente, en la Sección 5 se discute la acción del grupo absoluto de Galois en los dibujos d'enfants y se mencionan un par de líneas actuales de investigación.

2. SUPERFICIES DE RIEMANN Y CURVAS ALGEBRAICAS

2.1. SUPERFICIES DE RIEMANN: DEFINICIONES Y EJEMPLOS

Una *superficie de Riemann* es una superficie topológica con una estructura compleja, es decir con un atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ para el que las funciones de transición

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

son funciones biholomorfas (holomorfas con inversa holomorfa) entre abiertos del plano complejo \mathbb{C} (véase la Figura 2). Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, el determinante de la matriz jacobiana de las funciones de transición es positivo, lo

que implica que toda superficie de Riemann es orientable. En particular, el teorema de clasificación de superficies compactas implica que las superficies de Riemann compactas están caracterizadas topológicamente por su género, es decir, son todas homeomorfas a la esfera o a un toro con g agujeros.

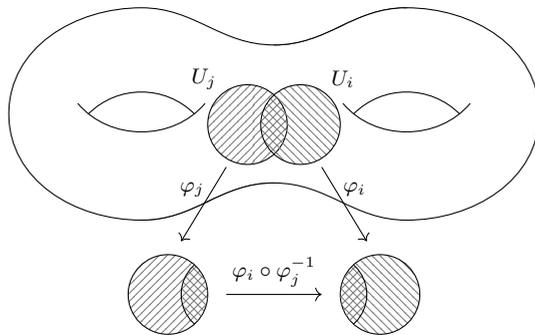


Figura 2: Cambio de cartas en una superficie de Riemann.

Los ejemplos más sencillos de superficies de Riemann son los abiertos $U \subset \mathbb{C}$ del plano complejo con el atlas dado por la identidad $\{(U, \text{Id})\}$. En particular, el plano complejo \mathbb{C} , el semi-plano superior $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ y el disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ son superficies de Riemann. A continuación presentamos algunos ejemplos más elaborados.

EJEMPLO 1 (Esfera unidad y plano extendido). En la esfera \mathbb{S}^2 puede tomarse el siguiente atlas:

$$\begin{aligned} \varphi_1 : U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\mapsto \frac{x}{1-t} + i \frac{y}{1-t}, \\ \varphi_2 : U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\mapsto \frac{x}{1+t} - i \frac{y}{1+t}. \end{aligned}$$

Un simple cálculo verifica que el cambio de cartas, definido en $\varphi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, viene dado por $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = 1/z$, que es una función holomorfa en todo su dominio. Notemos que φ_1 corresponde a la proyección estereográfica desde el polo norte y φ_2 a la conjugada compleja de la proyección estereográfica desde el polo sur. En particular, mediante φ_1 podemos identificar la esfera unidad con el *plano complejo extendido* o *esfera de Riemann* $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde el punto en el infinito corresponde al polo norte. En lo que sigue, usaremos libremente la identificación $\mathbb{S}^2 \cong \widehat{\mathbb{C}}$. \square

EJEMPLO 2 (La recta proyectiva compleja). La recta proyectiva $\mathbb{P}^1 := \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ se puede definir como el cociente $(\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\})/\mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ actúa mediante multiplicación en ambas coordenadas. Podemos definir un atlas tomando los abiertos

$U_i = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 : z_i \neq 0\}$ con las cartas locales

$$\begin{array}{ccc} \phi_0 : & U_0 & \rightarrow \mathbb{C} \\ & [z_0 : z_1] & \mapsto \frac{z_1}{z_0}, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \phi_1 : & U_1 & \rightarrow \mathbb{C} \\ & [z_0 : z_1] & \mapsto \frac{z_0}{z_1}, \end{array}$$

cuyo cambio de coordenadas es $\phi_1 \circ \phi_0^{-1}(z) = 1/z$ definido en $\phi_0(U_0 \cap U_1) = \mathbb{C}^*$. \square

Uno de los aspectos más interesantes de la teoría de superficies de Riemann es su relación con la geometría algebraica compleja. Un primer apunte básico es que a toda curva algebraica compleja irreducible se le puede asociar unívocamente una superficie de Riemann compacta (véase la Sección 2.2). En el siguiente ejemplo se ilustra cómo dar un atlas holomorfo a una curva plana.

EJEMPLO 3 (Curvas hiperelípticas). Consideremos la curva afín

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 - \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i) = 0 \right\}$$

donde $g \geq 2$ y los coeficientes a_i son números complejos distintos.

Alrededor de cada punto $p = (x_0, y_0) \in C$ con $x_0 \neq a_j$ podemos tomar la parametrización

$$\begin{array}{ccc} \psi^{-1} : & \Delta_\varepsilon & \rightarrow U \subset C \\ & z & \mapsto \left(x_0 + z, \sqrt{\prod_{i=1}^{2g+1} (x_0 + z - a_i)} \right) \end{array}$$

definida en un entorno $\Delta_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon\}$ suficientemente pequeño para que el radicando no se anule. La rama de la raíz cuadrada se elige de forma que la segunda coordenada de $\psi^{-1}(0)$ coincida con y_0 (y no con $-y_0$).

Si $x_0 = a_j$, tomamos la parametrización

$$\begin{array}{ccc} \psi_j^{-1} : & \Delta_\varepsilon & \rightarrow U_j \subset C \\ & z & \mapsto \left(a_j + z^2, z \sqrt{\prod_{i \neq j} (a_j + z^2 - a_i)} \right) \end{array}$$

con un ε suficientemente pequeño para que el radicando no se anule. En este caso, la elección de rama es indiferente.

Las intersecciones $U_j \cap U_k$ son vacías si $j \neq k$ y el cambio de coordenadas entre cartas de los dos distintos tipos viene dado por $\psi \circ \psi_j^{-1}(z) = z^2 + a_j - x_0$, que es obviamente una función biholomorfa en su dominio ya que $0 \notin \psi_j(U_j \cap U)$. \square

2.2. COMPACTIFICACIÓN

Como ya hemos mencionado, en el mundo de las superficies de Riemann la compacidad es equivalente a que la superficie sea topológicamente una esfera o a un toro con g agujeros. La curva algebraica vista en el Ejemplo 3 es claramente no compacta, puesto que las intersecciones $C \cap \mathbb{B}_N$ con las bolas abiertas $\mathbb{B}_N = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < N^2\}$ cubren C sin que exista un subrecubrimiento finito. Sin embargo, esta superficie de Riemann puede compactificarse

añadiendo un único punto, que denotamos ∞ , y tomando la siguiente aplicación como carta en un entorno suyo:

$$\begin{aligned} \psi_\infty^{-1} : \Delta_\varepsilon &\rightarrow C \cup \{\infty\} \\ z &\mapsto \left(\frac{1}{z^2}, \frac{1}{z^{2g+1}} \sqrt{\prod_{i=1}^{2g+1} (1 - a_i z^2)} \right), \quad \text{si } 0 < |z| < \varepsilon, \\ 0 &\mapsto \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

Esta idea de usar primero el teorema de la función implícita como en el Ejemplo 3 para construir ciertas cartas de la forma $x \mapsto (x, y(x))$ alrededor de casi todos los puntos de una curva $F(x, y) = 0$ (de hecho, aquéllos donde $F_y(x, y)$ es distinto de cero) y añadir después un número finito de puntos para obtener una superficie de Riemann compacta (y conexa) funciona para todo polinomio (irreducible) $F(X, Y)$. La conclusión es que a toda curva irreducible $F(x, y) = 0$ le podemos asociar unívocamente una superficie de Riemann compacta C_F . En la Sección 2.4 veremos que todas las superficies de Riemann compactas surgen de esta manera.

El concepto de superficie de Riemann compacta equivale en el mundo algebraico al de curva algebraica proyectiva. Una *variedad proyectiva compleja* es un subconjunto $Y \subset \mathbb{P}^n$ de un espacio proyectivo que corresponde al conjunto de ceros de un conjunto finito de polinomios homogéneos $F_1, \dots, F_r \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$, es decir,

$$Y = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n : F_1(x_0, \dots, x_n) = \dots = F_r(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Recordemos que un polinomio es homogéneo si todos sus monomios tienen el mismo grado. Esta condición es necesaria para que el conjunto de ceros esté bien definido en el espacio proyectivo.

Un hecho crucial de la teoría de superficies de Riemann compactas es que todas ellas se realizan como curvas proyectivas lisas, aunque esta realización no es fácil de describir en general. Por ejemplo, se puede ver que en el caso de las superficies de Riemann compactas que obtenemos añadiendo un punto a la curva hiperelíptica $y^2 - (x - a_1) \cdots (x - a_{2g+1}) = 0$ del Ejemplo 3, las correspondientes curvas proyectivas lisas no son planas (es decir, definidas por una sola ecuación homogénea) salvo en el caso $g = 1$, que describimos a continuación.

EJEMPLO 4 (Curvas elípticas). El caso $g = 1$ en el Ejemplo 3 determina las denominadas *curvas elípticas*. El término hace referencia a que las funciones de la forma $\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}$ aparecen en el cálculo de la longitud de arco de las elipses. Podemos homogeneizar el polinomio $F(X, Y) = Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$ para obtener las curvas proyectivas

$$C = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2 : y^2 z - x(x-z)(x-\lambda z) = 0\}.$$

La parte afín de esta curva es precisamente la curva dada por $F(x, y) = 0$ y el único punto que falta por añadir es $\infty := (0 : 1 : 0)$.

Las curvas elípticas son particularmente interesantes porque, como superficies de Riemann, son isomorfas a toros complejos de dimensión 1, es decir, cocientes

de la forma \mathbb{C}/Λ , donde $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ es un retículo en \mathbb{C} determinado por cierto $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ que depende de λ . Para definir la estructura de superficie de Riemann en \mathbb{C}/Λ tomamos abiertos $U \subset \mathbb{C}$ suficientemente pequeños, de forma que la aplicación cociente $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ restringida a U sea inyectiva, y cartas $\varphi_U := (\pi|_U)^{-1} : \pi(U) \rightarrow U \subset \mathbb{C}$ en \mathbb{C}/Λ . Las funciones de transición $\varphi_U \circ \varphi_V^{-1}$ son traslaciones por elementos de Λ .

Como consecuencia, las curvas elípticas heredan la estructura de grupo de \mathbb{C} , lo que las convierte en *grupos de Lie*. \square

2.3. MORFISMOS Y RAMIFICACIÓN

La estructura compleja nos permite definir morfismos entre superficies de Riemann: si $\{(U_j, \varphi_j)\}$ y $\{(V_i, \psi_i)\}$ son atlas en superficies de Riemann S_1 y S_2 respectivamente, un *morfismo* es una aplicación $f : S_1 \rightarrow S_2$ cuyas expresiones locales $\psi_i \circ f \circ \varphi_j^{-1}$ son funciones holomorfas entre abiertos del plano.

Un *isomorfismo* entre superficies de Riemann es simplemente una aplicación biyectiva tal que tanto $f : S_1 \rightarrow S_2$ como $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ son morfismos. El semiplano superior \mathbb{H} y el disco unidad \mathbb{D} son isomorfos mediante la transformación de Möbius $z \mapsto (z-i)/(z+i)$, pero no son isomorfos a \mathbb{C} por el teorema de Liouville. La esfera unidad \mathbb{S}^2 y la recta proyectiva compleja \mathbb{P}^1 son asimismo isomorfos mediante la aplicación $f(\varphi_1^{-1}(z)) = \phi_0^{-1}(z)$, extendida al polo norte de forma que $f(0, 0, 1) = (0 : 1)$ (ver Ejemplos 1 y 2), por lo que a partir de ahora identificaremos $\widehat{\mathbb{C}}$, \mathbb{P}^1 y \mathbb{S}^2 libremente. Cualquier superficie de género 0 es isomorfa a éstas.

Estas tres superficies \mathbb{C} , \mathbb{H} y \mathbb{P}^1 son, salvo isomorfismo, las únicas superficies de Riemann simplemente conexas. Este hecho fundamental es conocido como teorema de uniformización e implica que toda superficie de Riemann compacta S se obtiene como el cociente de una de ellas por la acción de un grupo Γ de automorfismos que actúa sin puntos fijos. En el caso de \mathbb{P}^1 , el grupo Γ es necesariamente trivial. En el caso de \mathbb{C} es isomorfo a un retículo como en el Ejemplo 4 y el cociente es de género 1. Finalmente, en el caso de \mathbb{H} el grupo Γ es un subgrupo discreto del grupo $\text{Aut}(\mathbb{H}) = \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ y el cociente es de género mayor o igual que 2. La estructura de superficie de Riemann en \mathbb{H}/Γ se define de forma análoga a la de \mathbb{C}/Λ .

La estructura compleja también nos permite definir funciones holomorfas y meromorfas en S simplemente como aplicaciones $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ cuyas expresiones locales $f \circ \varphi_j^{-1}(z)$ son funciones holomorfas o meromorfas del plano complejo. Notemos que toda función meromorfa es un morfismo a $\widehat{\mathbb{C}}$, pues basta definir el punto $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ como la imagen de los polos. Del mismo modo cualquier morfismo a $\widehat{\mathbb{C}}$ puede pensarse como una función meromorfa, salvo el morfismo que toma idénticamente el valor ∞ .

En el caso de superficies de Riemann compactas, las funciones meromorfas están bien definidas en el complemento $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_r\}$ de un conjunto finito de puntos (los polos). Si $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es una función meromorfa en una superficie de Riemann S y $p \in S$ un cero o un polo de f , definimos el *orden* de f en p como el orden de su expresión local $f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$ y lo denotamos $\text{ord}_p(f)$.

Igualmente, si $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un morfismo, para cada $p \in S_1$ elegimos cartas locales de S_1 y S_2 tales que $\varphi(p) = 0 = \psi(f(p))$ y definimos el *índice de ramificación*

de f en p como $m_p(f) := \text{ord}_{\varphi(p)}(\psi \circ f)$, de forma que la expresión local de dicha función se puede suponer de la forma $z \mapsto z^{m_p(f)}$. Si $m_p(f) \geq 2$ decimos que p es un *punto de ramificación* y que $f(p)$ es un *valor de ramificación* de f . Notemos que, en particular, los puntos de ramificación coinciden con los puntos donde la expresión local de f tiene derivada nula.

El *grado* $\text{deg}(f)$ de un morfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$ no constante entre superficies de Riemann compactas se define como el número de preimágenes de cualquier punto $q \in S_2$ que no sea valor de ramificación. Este número no depende del punto q elegido y los valores de ramificación son precisamente los puntos de S_2 para los que el número de preimágenes es menor que el número esperado. De hecho, la teoría de espacios recubridores garantiza que el grado de f viene dado por la fórmula $\text{deg}(f) := \sum_{f(p)=q} m_p(f)$, válida también cuando $q \in S_2$ es un valor de ramificación.

EJEMPLO 5. Sea S la superficie de Riemann subyacente a la curva hiperelíptica del Ejemplo 3, dada por

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 - \prod_{i=1}^{2g+1} (x - a_i) = 0 \right\}.$$

La función coordenada $\mathbf{x} : (x, y) \mapsto x$ es una función de grado 2. Para todo valor $x \neq a_i$ la preimagen $\mathbf{x}^{-1}(x)$ consta de dos puntos distintos, por lo que los únicos puntos de ramificación de \mathbf{x} son $p_i = (a_i, 0)$, cada uno de multiplicidad $m_{p_i}(\mathbf{x}) = 2$. Además, si compactificamos S añadiendo un punto ∞ como en la sección anterior y extendemos \mathbf{x} de forma que $\mathbf{x}(\infty) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, este punto pasa a ser también un punto de ramificación de multiplicidad 2. □

Uno se puede preguntar cómo podemos calcular el género de la superficie de Riemann compacta C_F , con $F = Y^2 - (X - a_1) \cdots (X - a_{2g+1})$, del ejemplo anterior.

En la Figura 3 se muestra una representación de la función \mathbf{x} . Consideremos una triangulación suficientemente fina de $\widehat{\mathbb{C}}$ que tenga los a_j , ∞ y a como vértices de triángulos distintos y tomemos sus preimágenes para formar una triangulación de C_F . La preimagen de un triángulo que tenga a_j (resp., ∞) como vértice consiste en dos triángulos con p_j (resp. ∞) como vértice común. Por otro lado, la preimagen de un triángulo que tenga el valor regular a como vértice son dos triángulos disjuntos, con a^- y a^+ como vértices.

Recordemos que la fórmula de la característica de Euler para $\widehat{\mathbb{C}}$ nos da

$$2 = V - A + C,$$

donde V , A , y C son el número de vértices, aristas y caras de la triangulación.

Ahora, el número de triángulos de la triangulación de C_F es $2C$, el número de aristas es $2A$ y el número de vértices es $2V - (2g + 2)$. Por lo tanto, denotando por $g(S)$ al género de una superficie de Riemann S , la fórmula de la característica de Euler da

$$2 - 2g(C_F) = 2V - (2g + 2) - 2A + 2C = 2 \cdot (2 - 2g(\widehat{\mathbb{C}})) - (2g + 2) = 2 - 2g.$$

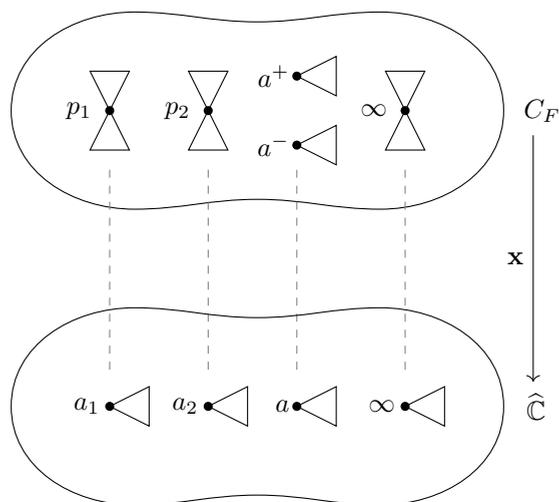


Figura 3: El morfismo $\mathbf{x} : C_F \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ del Ejemplo 5.

Es decir, la superficie de Riemann C_F tiene género $g(C_F) = g$.

En general, se tiene la siguiente relación, llamada fórmula de Riemann-Hurwitz, entre el género $g(S)$ de una superficie de Riemann compacta S y el grado y la ramificación de cualquier función meromorfa $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ no constante:

$$2g(S) - 2 = -2 \deg(f) + \sum_{P \in S} (m_P(f) - 1).$$

Comprobemos ahora que esta fórmula se cumple para la otra función coordenada de la superficie del ejemplo anterior.

EJEMPLO 6. Sea S la superficie de Riemann del Ejemplo 5 y consideremos la función coordenada $\mathbf{y} : (x, y) \mapsto y$ de grado $2g + 1$. Sus puntos de ramificación son aquellos puntos (x, y) y $(x, -y)$ de S tales que $\frac{d}{dx}((x - a_1) \cdots (x - a_{2g+1})) = 0$. Puesto que esta derivada es un polinomio en x de grado $2g$, hay en total $4g$ puntos de ramificación, todos ellos de multiplicidad 2. Extendiendo \mathbf{y} a la compactificación C_F de la misma manera que hicimos con \mathbf{x} , vemos que ∞ es un punto de ramificación de \mathbf{y} de multiplicidad $2g + 1$. La fórmula de Riemann-Hurwitz aplicada a la función \mathbf{y} diría ahora

$$2g(C_F) - 2 = (2g + 1) \cdot (-2) + 4g \cdot 1 + 1 \cdot 2g = 2g - 2. \quad \square$$

Sea ahora $f : S_1 \rightarrow S_2$ un morfismo no constante entre superficies de Riemann compactas. Si B_f denota el conjunto (finito) de valores de ramificación de f y definimos $S_2^* = S_2 \setminus B_f$ y $S_1^* = S_1 \setminus f^{-1}(B_f)$, la restricción $f^* : S_1^* \rightarrow S_2^*$ es un cubrimiento topológico (recordemos que un cubrimiento entre dos espacios topológicos es una aplicación continua $F : X \rightarrow Y$ tal que para todo punto $y \in Y$ existe un entorno abierto $V \ni y$ de forma que la preimagen $F^{-1}(V)$ es una unión disjunta de abiertos, cada uno de ellos homeomorfo a V a través de F).

El siguiente resultado se puede ver como una suerte de recíproco.

TEOREMA 1 (Extensión de morfismos). *Sea S_2 una superficie de Riemann compacta, $\Sigma \subset S_2$ un subconjunto finito y $S_2^* = S_2 \setminus \Sigma$. Supongamos que $f^* : S_1^* \rightarrow S_2^*$ es un cubrimiento topológico. Entonces existe una única estructura de superficie de Riemann en S_1^* que hace a f^* holomorfa y una única superficie de Riemann compacta $S_1 \supset S_1^*$ de forma que f^* se extiende a un morfismo $f : S_1 \rightarrow S_2$. Además, el conjunto $S_1 \setminus S_1^*$ es finito.*

Este resultado implica en particular que si Σ es un subconjunto finito de una superficie de Riemann compacta S_2 , y S_1^* es una superficie de Riemann isomorfa a $S_2^* = S_2 \setminus \Sigma$, entonces su compactificación S_1 es isomorfa a S_2 .

Concluimos la sección considerando el grupo de automorfismos $\text{Aut}(S)$ de una superficie de Riemann compacta S , es decir, el grupo de isomorfismos de S en sí misma. Si el género de S es 0, la superficie es necesariamente isomorfa a $\widehat{\mathbb{C}}$ y su grupo de automorfismos es isomorfo a $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ actuando mediante aplicaciones de Möbius, es decir,

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{donde } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}).$$

En particular, el grupo de automorfismos actúa transitivamente en tripletas de puntos de $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, dados tres puntos arbitrarios $x, y, z \in \widehat{\mathbb{C}}$, para cualquier elección de otros tres puntos $u, v, w \in \widehat{\mathbb{C}}$ existe un (único) elemento $M \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $M(x) = u$, $M(y) = v$ y $M(z) = w$.

Si el género es 1, la superficie es isomorfa a un toro complejo \mathbb{C}/Λ y cualquier aplicación de la forma $z \mapsto \pm z + c$ para $c \in \mathbb{C}$ desciende a un automorfismo de S (y, dependiendo de S , podrían existir incluso más automorfismos).

Sin embargo, si el género $g(S)$ es mayor o igual que 2, el orden del grupo de automorfismos está acotado superiormente por una función que depende sólo de $g(S)$. De hecho, un teorema clásico de Hurwitz asegura que si S es una superficie de Riemann compacta de género $g(S) \geq 2$, entonces $|\text{Aut}(S)| \leq 84(g(S) - 1)$ (véase, por ejemplo, [3, página 131]).

2.4. CURVAS ALGEBRAICAS

En el Ejemplo 3 hemos indicado cómo asociar a cada curva algebraica plana irreducible $F(x, y) = 0$ una superficie de Riemann compacta C_F . Recíprocamente, toda superficie de Riemann compacta S es isomorfa a una obtenida de esta manera a partir de un polinomio irreducible F . La existencia de funciones meromorfas no constantes en toda superficie de Riemann compacta es un hecho clave en esta correspondencia, y su demostración requiere del uso de resultados profundos de la teoría (ya sea el teorema de Riemann-Roch o el teorema de uniformización, que describe los posibles recubrimientos universales de una superficie de Riemann). La forma de obtener el polinomio F tal que $S \simeq C_F$ es construir funciones meromorfas f y h que generen el cuerpo de funciones meromorfas de S (como las funciones $\mathbf{x} : (x, y) \mapsto x$ e $\mathbf{y} : (x, y) \mapsto y$ en los Ejemplos 5 y 6), y verificar que existe un polinomio irreducible

$F(X, Y)$ tal que $F(f, h) \equiv 0$. Entonces F es el polinomio que andamos buscando, y el isomorfismo $S \cong C_F$ es una aplicación definida primero fuera del conjunto (finito) de polos de f o de h por la regla $P \mapsto (f(P), g(P))$ y extendida después al resto de los puntos en virtud del lema de extensión.

Si u, v es otro par de generadores de este cuerpo de funciones y $G(X, Y)$ es un polinomio irreducible con $G(u, v) \equiv 0$, de modo que S es también isomorfa a C_G , entonces $u = R_1(f, h)$ y $v = R_2(f, h)$ donde $R_i(X, Y) = P_i(X, Y)/Q_i(X, Y)$ ($i=1,2$) son las funciones racionales que expresan u y v en función de f y h . Vemos así que las curvas $F = 0$ y $G = 0$ son birracionalmente equivalentes, es decir, isomorfas fuera de un número finito de puntos. Un posible isomorfismo birracional entre ellas viene dado por $(x, y) \mapsto (R_1(x, y), R_2(x, y))$ (cuyo inverso es el isomorfismo birracional construido expresando f y h en función de u y v).

Esta relación entre superficies de Riemann compactas y curvas algebraicas planas irreducibles resulta ser functorial, de forma que morfismos entre superficies de Riemann corresponden a aplicaciones racionales entre curvas algebraicas. En particular, superficies de Riemann compactas isomorfas corresponden a curvas algebraicas birracionalmente equivalentes y funciones meromorfas a funciones racionales. Así, en los Ejemplos 5 y 6, las funciones coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} son los generadores naturales del cuerpo de funciones racionales de la curva $C : F(x, y) = 0$, pero también pueden verse como generadores del cuerpo de funciones meromorfas de la superficie de Riemann compacta C_F que generan todas las demás (lo que significa que toda función meromorfa de C_F es una función racional $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de \mathbf{x} e \mathbf{y}).

Respecto a la correspondencia entre superficies de Riemann compactas y curvas proyectivas lisas mencionada en la Sección 2.2 podemos señalar aquí que una posible forma de realizar una superficie de Riemann compacta S como una curva proyectiva sería obtener primero la correspondiente curva afín $C : F(x, y) = 0$ como en el párrafo anterior, tomar después su cierre proyectivo $\bar{C} \subset \mathbb{P}^2$ y finalmente aplicar a \bar{C} un proceso de desingularización bien conocido en geometría algebraica para obtener un modelo no singular de \bar{C} dentro de algún espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Nótese que la afirmación recíproca de que toda curva proyectiva lisa define una superficie de Riemann compacta es obvia: toda variedad proyectiva no singular es el espacio subyacente a una variedad compleja compacta cuyas cartas se construyen aplicando a cada punto el teorema de la función implícita.

Desde el punto de vista de la geometría algebraica, podemos preguntarnos sobre qué subcuerpo $K \subset \mathbb{C}$ de los números complejos podemos definir una superficie de Riemann S . Diremos que S se puede definir sobre K si existe un polinomio $F \in K[X, Y]$ con coeficientes en K tal que $S \cong C_F$. Por ejemplo, la superficie de Riemann C_F con $F(X, Y) = Y^2 - X^3 - \pi^3$ está definida sobre el cuerpo trascendente $\mathbb{Q}(\pi)$, pero en realidad puede definirse sobre \mathbb{Q} . Esto es así porque la correspondiente curva algebraica $C_\pi = \{(x, y) : y^2 = x^3 - \pi^3\}$ es birracionalmente equivalente a la curva $C_1 = \{(x, y) : y^2 = x^3 - 1\}$ mediante el isomorfismo birracional

$$\begin{aligned} C_\pi &\rightarrow C_1 \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{\pi}, \frac{y}{\pi^{3/2}} \right), \end{aligned}$$

cuya extensión a las correspondientes superficies de Riemann se obtiene simplemente enviando el punto del infinito de la una al de la otra.

3. DESSINS D'ENFANTS Y FUNCIONES DE BELYI

No es difícil probar, utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz, que si S es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$, cualquier función meromorfa $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tiene como mínimo tres valores de ramificación. Las únicas funciones meromorfas con menos ramificación o bien son isomorfismos (luego no ramificados), realizados como transformaciones de Möbius, o bien son equivalentes módulo transformaciones de Möbius a la aplicación $z \mapsto z^n$ en la esfera (dos valores de ramificación).

DEFINICIÓN 1. Una *función de Belyi* es una función meromorfa $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ que tiene tres (o menos) valores de ramificación, que sin pérdida de generalidad se suponen contenidos en $\{0, 1, \infty\}$. Si tal función existe, llamamos a S *superficie de Belyi*, y decimos que (S, f) es un *par de Belyi*.

Dos pares de Belyi (S_1, f_1) , (S_2, f_2) se consideran equivalentes si lo son como morfismos a $\widehat{\mathbb{C}}$, es decir, si existe un isomorfismo de superficies de Riemann $F : S_1 \rightarrow S_2$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{F} & S_2 \\ f_1 \downarrow & \searrow f_2 & \\ & & \widehat{\mathbb{C}} \end{array}$$

es conmutativo.

EJEMPLO 7. (a) Un polinomio puede definir una función de Belyi en $S = \widehat{\mathbb{C}}$, pero las condiciones que tiene que cumplir para ello son muy restrictivas. Para hacernos una idea, tomemos la familia de polinomios $p_t(x) = x^5 - 2x^4 + t \cdot x^3$, donde consideramos t como parámetro. Además de ∞ , los puntos de ramificación vienen dados por ceros de la derivada $p'(x) = x^2(5x^2 - 8x + 3t)$, es decir, $x = 0$, $x = \lambda_{\pm} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 15t}}{5}$. Los valores obvios $t = 0$, $t = \frac{16}{15}$ producen funciones de Belyi por el poco excitante procedimiento de que existan sólo tres puntos de ramificación, que son $\{0, \infty, 8/5\}$ en el primer caso, y $\{0, \infty, 4/5\}$ en el segundo). Para cualquier otro valor de t los puntos de ramificación son realmente cuatro puntos distintos, y genéricamente son distintas sus cuatro imágenes por p_t . Sin embargo, un pequeño milagro sucede para dos valores concretos de t :

- si $t = 1$ se tiene $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = 3/5$ y $p_t(1) = p_t(0) = 0$;
- si $t = 32/5$ se tiene $\lambda_{\pm} = \frac{4}{5}(1 \pm \sqrt{5}i)$ y en este caso $p_t(\lambda_+) = p_t(\lambda_-)$.

Así que para $t = 1$ y para $t = 32/5$ el número de puntos de ramificación es 4, pero son sólo 3 los valores de ramificación: los correspondientes polinomios p_t definen funciones de Belyi en la esfera.

(b) La función $f(x, y) = x^3$, definida en la curva elíptica de ecuación $y^2 = x^3 - 1$, también es de Belyi. Su grado es 6, puesto que un valor genérico $t \in \widehat{\mathbb{C}}$ determina

las seis preimágenes distintas $f^{-1}(\{t\}) = \{(x_i, \pm\sqrt{t-1}), i = 1, 2, 3\}$, donde x_1, x_2 y x_3 son las tres raíces cúbicas de t y $\pm\sqrt{}$ son las dos determinaciones de la raíz cuadrada. Hay sólo tres excepciones: $t = 0$ y $t = \infty$ (hay sólo un valor x en lugar de tres) y $t = 1$ (tres valores de la coordenada x , pero para cada uno de ellos $x^3 - 1$ sólo tiene una raíz cuadrada). \square

DEFINICIÓN 2. Un *dessin d'enfant* es un par (X, \mathcal{D}) donde X es una superficie topológica compacta orientada, y $\mathcal{D} \subset X$ es un grafo tal que:

1. \mathcal{D} es conexo.
2. \mathcal{D} está bicolorado: a cada vértice se le ha asignado el color blanco/negro de modo que cualquier par de vértices conectados por una arista tienen distinto color.
3. $X \setminus \mathcal{D}$ se descompone como una unión finita de componentes conexas, cada una de ellas homeomorfa a un disco, que se llaman *caras* del dessin.

El *género* de (X, \mathcal{D}) es simplemente el género de la superficie topológica X en la que el grafo \mathcal{D} está inmerso.

Pronto veremos la trascendencia que encierran estos objetos tan sencillos. Es célebre la sorpresa de Grothendieck al respecto ([5, § $\frac{12}{13}$]):

Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. A un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus.

Se considera que dos dessins (X_1, \mathcal{D}_1) y (X_2, \mathcal{D}_2) son equivalentes si existe un homeomorfismo entre X_1 y X_2 que conserva la orientación y cuya restricción a \mathcal{D}_1 induce un homeomorfismo entre los grafos bicolorados \mathcal{D}_1 y \mathcal{D}_2 .

Si \mathcal{D} es un dessin con b vértices blancos, n vértices negros y N aristas, numeradas como $1, 2, \dots, N$, la estructura combinatoria de \mathcal{D} (las relaciones de adyacencia entre las distintas caras, aristas y vértices) queda codificada mediante dos permutaciones σ_0, σ_1 del grupo simétrico \mathbb{S}_N en N objetos. La permutación σ_0 se compone de b ciclos disjuntos, uno por cada vértice blanco, y cada ciclo está formado por los números correspondientes a las aristas incidentes en dicho vértice, ordenados mediante el giro en sentido positivo alrededor de v . El mismo procedimiento produce los n ciclos disjuntos que forman σ_1 , un ciclo por cada uno de los vértices negros. En particular, los grados de los vértices blancos y negros corresponden a las longitudes de los ciclos de σ_0 y σ_1 respectivamente.

Se puede comprobar que $\sigma_1 \cdot \sigma_0$ envía una arista k dada sobre otra arista que comparte cara con k , como se puede ver en la Figura 4. De este modo, cada ciclo de $\sigma_1 \cdot \sigma_0$ corresponde a una de las caras de \mathcal{D} , y la longitud del ciclo es la mitad del número de aristas en el borde de dicha cara, si convenimos que las aristas que tengan la misma cara a ambos lados deben contarse dos veces.

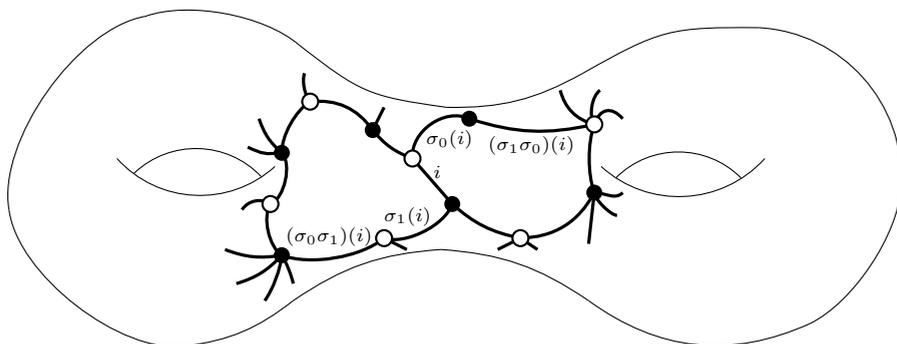


Figura 4: La monodromía de un dessin.

Es fácil convencerse de que, en efecto, el par (σ_0, σ_1) , que es conocido como la *monodromía del dessin* \mathcal{D} , determina totalmente su estructura combinatoria. De hecho la inclusión $\mathcal{D} \subset X$ puede ser reconstruida a partir de dichas permutaciones.

Veamos qué ocurre, por ejemplo, si tomamos $\sigma_0 = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11, 12)$ y $\sigma_1 = (1, 7)(2, 8)(3, 9)(4, 10)(5, 11)(6, 12)$ dentro del grupo simétrico \mathbb{S}_{12} . El dessin \mathcal{D} correspondiente tiene doce aristas, dos vértices blancos de grado 6 (pues σ_0 tiene dos ciclos de longitud 6), y seis vértices negros de grado 2. Además, $\sigma_1 \cdot \sigma_0 = (1, 8, 3, 10, 5, 12)(2, 9, 4, 11, 6, 7)$, de forma que \mathcal{D} contiene solamente dos caras limitadas por 12 aristas cada una. La fórmula de Euler-Poincaré nos permite deducir el género g de la superficie topológica que alberga a \mathcal{D} de la expresión

$$2 - 2g = \text{caras} - \text{aristas} + \text{vértices} = 2 - 12 + 8 = -2,$$

por lo que deducimos que \mathcal{D} está inmerso en una superficie de género 2. Es sencillo crear un modelo topológico de dicha superficie como unión de caras planas con identificaciones en su borde: basta crear dos caras de 12 aristas cada una, etiquetar sus aristas de acuerdo a cada uno de los ciclos de $\sigma_1 \cdot \sigma_0$ (en negrita en la parte superior de la Figura 5) y añadir el resto de etiquetas según indica σ_0 : la topología de la superficie en la cual está inmerso \mathcal{D} es la topología cociente de esta figura tras identificar aristas con la misma etiqueta. El lector puede comprobar que el dessin inmerso en la subvariedad topológica de \mathbb{R}^3 en la parte inferior de la misma Figura 5 es exactamente el mismo, puesto que es fácil convencerse de que tiene la misma monodromía.

Grothendieck observó el sorprendente hecho fundamental de la teoría de dessins d'enfants: un dessin determina un par de Belyi, y viceversa. Llama la atención que a partir de la combinatoria de la inclusión del grafo \mathcal{D} en X (información de carácter puramente topológico), uno sea capaz de equipar a X con una estructura de superficie de Riemann particularmente escogida (junto con una función meromorfa en dicha superficie). Mucho más si se observa que, por los resultados expuestos en la Sección 2.4, esto es equivalente a asociar a \mathcal{D} una curva algebraica $C : F(x, y) = 0$ (junto a una función racional R en C).

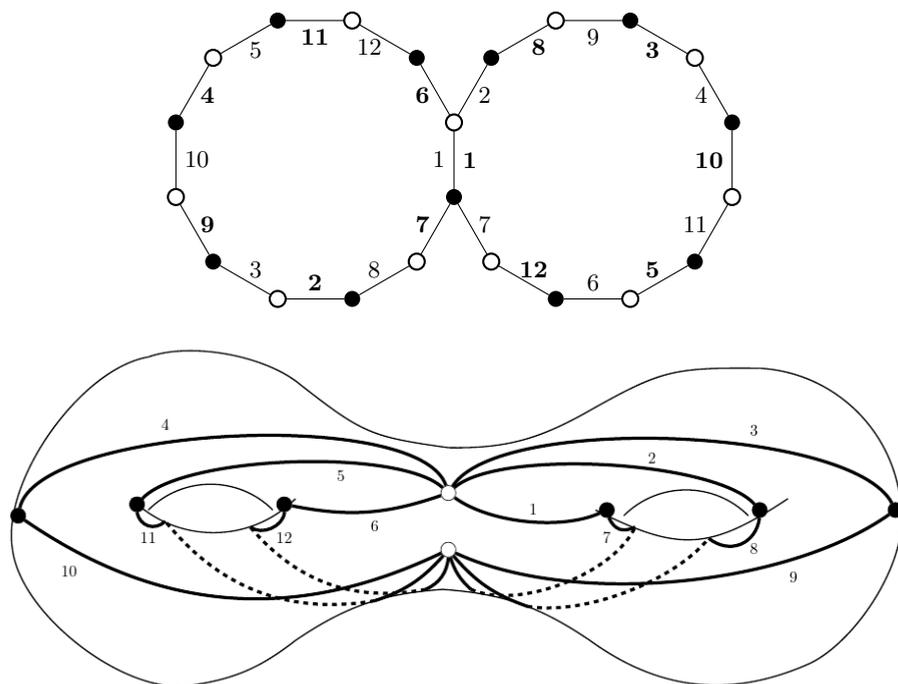


Figura 5: Reconstrucción a partir de σ_0 y σ_1 de la inmersión de \mathcal{D} en la superficie topológica de género 2.

De hecho, veremos en la Sección 4 que la estructura de superficie de Riemann creada a partir de \mathcal{D} tiene características muy particulares, pues el par de objetos algebraicos F , R pueden definirse con coeficientes en el cuerpo \mathbb{Q} de los números algebraicos.

3.1. LA CORRESPONDENCIA ENTRE PARES DE BELYI Y DESSINS D'ENFANTS

Para construir un par de Belyi a partir de un dessin \mathcal{D} comenzamos eligiendo un punto, marcándolo como \times , en el interior de cada una de las caras (nos referiremos a tales puntos como los *centros* de las caras). A continuación, unimos los centros \times con arcos simples y disjuntos con cada uno de los vértices \circ , \bullet en el borde de esa cara. De este modo producimos una triangulación de la superficie topológica X en la que los vértices de cada triángulo son de uno de los tres tipos siguientes: \circ , \bullet , \times . De hecho, hay dos clases de triángulos: aquéllos en los que el circuito $\circ \rightarrow \bullet \rightarrow \times \rightarrow \circ$ aparece en el sentido positivo de la orientación de X , que consideraremos como *triángulos blancos*, y aquéllos en los que es el circuito $\circ \rightarrow \times \rightarrow \bullet \rightarrow \circ$ el que aparece en sentido positivo (*triángulos negros*). En la Figura 6 ilustramos este proceso.

Ahora, dado un triángulo blanco T_1 , podemos elegir un homeomorfismo sobre el

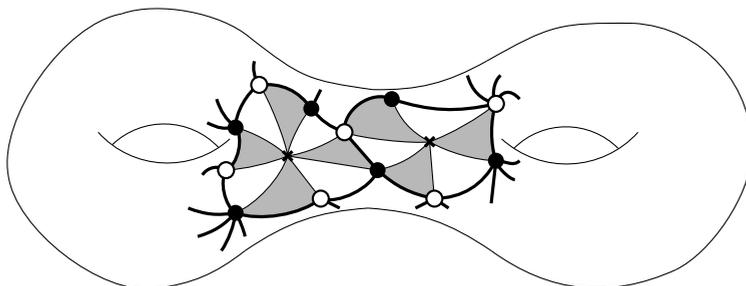


Figura 6: La triangulación asociada a un dessin.

semiplano superior cerrado $f_1 : T_1 \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^+ := \mathbb{H} \cup (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ de modo que

$$f_1 : \begin{cases} \partial T_1 & \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ \circ & \rightarrow 0 \\ \bullet & \rightarrow 1 \\ \times & \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

Por otra parte, dado un triángulo T_2 vecino de T_1 (que, por tanto, es un triángulo negro), podemos elegir un homeomorfismo $f_2 : T_2 \rightarrow \overline{\mathbb{H}}^-$ hacia el semiplano inferior cerrado que coincida con f_1 en la arista $T_1 \cap T_2$ y que, como f_1 , envíe \circ, \bullet, \times sobre $0, 1, \infty$ respectivamente.

Si ahora replicamos el proceso sobre los vecinos de T_2 , etcétera, terminamos construyendo una aplicación continua $f_{\mathcal{D}} : X = (\bigcup T_i) \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, que es de hecho un cubrimiento de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$ desde $X \setminus \{\text{vértices de los triángulos}\}$.

Por el Teorema 1 existe una única estructura de superficie de Riemann $X_{\mathcal{D}}$ en X para la que $f_{\mathcal{D}} : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ es una función holomorfa. En particular $f_{\mathcal{D}}$ es una función de Belyi cuyos puntos de ramificación son todos vértices de triángulos. De hecho, la clase de equivalencia del par de Belyi $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ no depende de las elecciones que hemos realizado durante la construcción, como son la creación de los triángulos o los homeomorfismos elegidos, sino únicamente de la monodromía (σ_0, σ_1) de \mathcal{D} .

Por otra parte, la forma en que una función de Belyi $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, determina un dessin \mathcal{D}_f es muy sencilla: basta tomar como grafo la preimagen del intervalo real $[0, 1]$, y como vértices blancos y negros las preimágenes de 0 y 1 respectivamente.

PROPOSICIÓN 1. *Sea $\mathcal{D}_f = f^{-1}([0, 1])$. Entonces*

- *El grado de f coincide con el número de aristas de \mathcal{D}_f .*
- *Las preimágenes $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}([-\infty, 0])$ y $f^{-1}([1, \infty])$ producen una unión disjunta de segmentos que determinan una triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D}_f)$.*
- *Los conjuntos de vértices blancos y negros de \mathcal{D}_f son $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ respectivamente. El grado de un vértice coincide con el índice de ramificación de f en ese punto. Del mismo modo, los centros de caras son las preimágenes de ∞ , y el índice de ramificación en uno de esos puntos es la mitad del número de aristas de la cara correspondiente.*

- Las preimágenes $f^{-1}(\overline{\mathbb{H}}^+)$ y $f^{-1}(\overline{\mathbb{H}}^-)$ son los triángulos blancos y negros, respectivamente, de la triangulación $\mathcal{T}(\mathcal{D}_f)$.

Una vez comprendida la correspondencia entre dessins y pares de Belyi

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \{ \text{Dessins d'enfants} \} & \leftrightarrow & \{ \text{Pares de Belyi} \} \\ \mathcal{D} \subset X & \rightarrow & (X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}}) \\ \mathcal{D}_f = f^{-1}([0, 1]) & \leftarrow & (S, f) \end{array}}$$

es importante mencionar, y fácil de comprobar, que esta correspondencia respeta las nociones de equivalencia de dessins y de pares de Belyi mencionadas antes (pares de Belyi equivalentes corresponden a dessins d'enfants que son, a su vez, equivalentes).

3.2. MONODROMÍA

Recordemos que la *monodromía de un morfismo* $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ de grado d ramificado sobre $R = \{q_1, \dots, q_r\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ es un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned} \text{Mon}_f : \pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus R, p) &\rightarrow \text{Sym}\{f^{-1}(p)\} = \mathbb{S}_d \\ \gamma &\mapsto \text{Mon}_f(\gamma) \end{aligned}$$

donde $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus R, p)$ es el grupo fundamental con punto base en el valor regular p , cuya fibra por f es $f^{-1}(p) = \{x_1, \dots, x_d\}$, y $\text{Mon}_f(\gamma)(x_i)$ es el extremo final del camino en S que se obtiene al levantar el lazo γ con punto inicial $x_i \in S$.

Es un hecho bien conocido en la teoría de espacios recubridores que una vez que se fijan los valores de ramificación $R = \{q_1, \dots, q_r\}$, el homomorfismo Mon_f caracteriza por completo el morfismo f . Puesto que $\pi_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus R)$ está generado por lazos simples γ_i alrededor de los q_i , se puede describir la monodromía simplemente como

$$\text{Mon}_f \equiv (\sigma_1, \dots, \sigma_r) \tag{3}$$

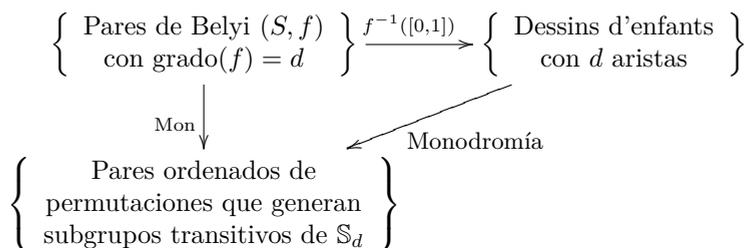
donde $\sigma_i = \text{Mon}_f(\gamma_i)$. Como además $\prod \gamma_i = 1$, pues el producto de los γ_i es un lazo trivial en la esfera, debe cumplirse la relación $\prod \sigma_i = 1$.

Si S es conexa, las permutaciones σ_i generan un subgrupo G de \mathbb{S}_d que es *transitivo* (es decir, que dados dos puntos arbitrarios $x_i, x_j \in f^{-1}(p)$ siempre existe algún elemento $\sigma \in G$ tal que $\sigma(x_i) = x_j$): este grupo es conocido como *grupo de monodromía* de f . Recíprocamente, es bien sabido que cualquier colección de r permutaciones $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\} \subset \mathbb{S}_d$, que generen un subgrupo transitivo de \mathbb{S}_d y satisfaga la relación $\prod \sigma_i = 1$, determina la monodromía de un morfismo a $\widehat{\mathbb{C}}$ de grado d . En este proceso, reemplazar las σ_i por sus conjugadas $\tau \sigma_i \tau^{-1}$ por una determinada permutación $\tau \in \mathbb{S}_d$, que equivale a reenumerar los elementos de $f^{-1}(p)$, produce un cubrimiento isomorfo, de modo que $\{\sigma_i\}$ y $\{\tau \sigma_i \tau^{-1}\}$ pueden considerarse equivalentes.

La monodromía (σ_0, σ_1) de un dessin \mathcal{D} , que introdujimos anteriormente, coincide con la monodromía $\text{Mon}_{f_{\mathcal{D}}}$ de su correspondiente función de Belyi. Para convencerse de ello, basta elegir $p = 1/2$ como punto base del grupo fundamental de $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0, 1, \infty\}$

y comprobar que σ_0 y σ_1 no son más que las imágenes de lazos alrededor de 0 y de 1 bajo el homomorfismo de monodromía de $f_{\mathcal{D}}$ (como dijimos antes, estas permutaciones están bien definidas salvo conjugación, pues reenumerar las aristas reemplazaría σ_0 y σ_1 por sus conjugadas por cierta permutación τ). Ésta es la razón por la que se conoce al par (σ_0, σ_1) como monodromía del dessin: del mismo modo, el grupo de permutaciones generado por σ_0 y σ_1 es el *grupo de monodromía* de \mathcal{D} .

Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre clases de equivalencia de los siguientes tres tipos de objetos:



En particular, observamos que sólo existe una cantidad finita de pares de Belyi de grado d fijado, pues \mathbb{S}_d sólo contiene una cantidad finita de pares de permutaciones.

3.3. ALGUNOS EJEMPLOS

Ilustramos a continuación la correspondencia *dessins* \leftrightarrow *pares de Belyi* con ejemplos en cada una de las dos direcciones.

EJEMPLO 8. Consideremos el grafo de la Figura 7 y tratemos de identificar el correspondiente par de Belyi (S, f) . Por supuesto $S \cong \widehat{\mathbb{C}}$, pues ésa es la única superficie de Riemann de género 0, y este grafo está inmerso en una esfera. La función f será una función racional de grado 6, pues ése es el número de aristas, con dos preimágenes de 0 de órdenes 2 y 4 correspondientes a los vértices blancos, cuatro preimágenes de 1 (una de ellas triple) correspondientes a los vértices negros, y dos polos de órdenes 1 y 5 correspondientes a los centros de las caras inferior y superior respectivamente.

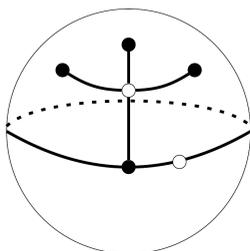


Figura 7: Un dessin en la esfera.

Dado que las transformaciones de Möbius permiten normalizar tres puntos esogidos en la esfera, podemos asumir que los vértices blancos de grados 2 y 4 son,

respectivamente, los puntos $z = 1$ y $z = 0$, y que el polo de orden 5 está en $z = \infty$. Deducimos que f puede expresarse en la forma

$$f(z) = K \frac{z^4(z-1)^2}{(z-z_0)}$$

donde K y z_0 son dos valores aún por determinar. Derivando, se tiene

$$f'(z) = K \frac{z^3(z-1)(5z^2 + (-3-6z_0)z + 4z_0)}{(z-z_0)^2}$$

y, como f' debe tener una raíz doble, situada en el punto z que corresponde al vértice negro de grado 3, el discriminante del polinomio cuadrático en el numerador debe anularse, por lo que

$$36z_0^2 - 44z_0 + 9 = 0,$$

de lo que se deduce que $z_0 = \frac{11 \pm 2\sqrt{10}}{18}$ y el vértice negro de grado 3 está situado en $z = \frac{3+6z_0}{10} = \frac{\pm\sqrt{10}}{15}$. El valor de K no es muy importante aquí: puede ser elegido para que f valga 1 en dicho vértice, que es la normalización fijada habitualmente para funciones de Belyi.

No es en absoluto obvio cuál de los dos valores de z_0 es el correcto. Uno puede tomar ambos, y dibujar con ayuda del software apropiado un esbozo del lugar de puntos de $\mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con imagen en el intervalo $[0, 1]$ por cada una de las dos funciones. Ambos resultados pueden verse en la Figura 8 (el caso $z_0 = \frac{11+2\sqrt{10}}{18}$ es el de la izquierda, y es el que produce un grafo equivalente al de partida, lo cual justifica que es ese el valor de z_0 correcto que corresponde a la función de Belyi asociada a nuestro grafo). \square

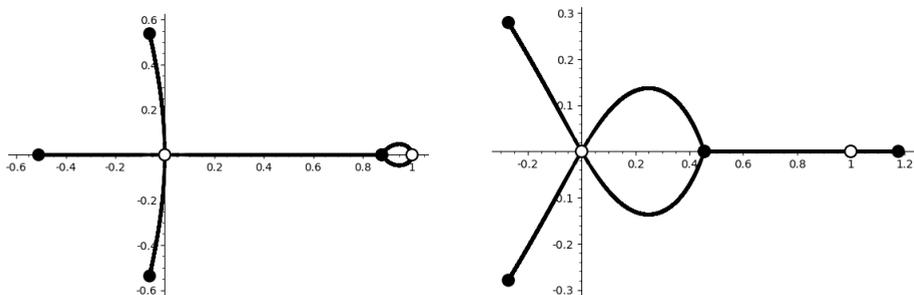


Figura 8: Los dos grafos obtenidos como preimagen del intervalo $[0, 1]$ por la función $f(z) = K \frac{z^4(z-1)^2}{z-z_0}$ para $z_0 = \frac{11+2\sqrt{10}}{18}$ (izquierda) y $z_0 = \frac{11-2\sqrt{10}}{18}$ (derecha). En ambos casos K es tal que los valores de ramificación son 0, 1 e ∞ .

EJEMPLO 9. Los cinco sólidos platónicos (poliedros regulares) pueden considerarse dessins d'enfants con los vértices habituales coloreados de blanco y vértices negros de grado 2 marcados en el centro de cada arista. Las correspondientes funciones de Belyi se muestran en la Figura 9 (para los detalles completos, consúltese [6]).

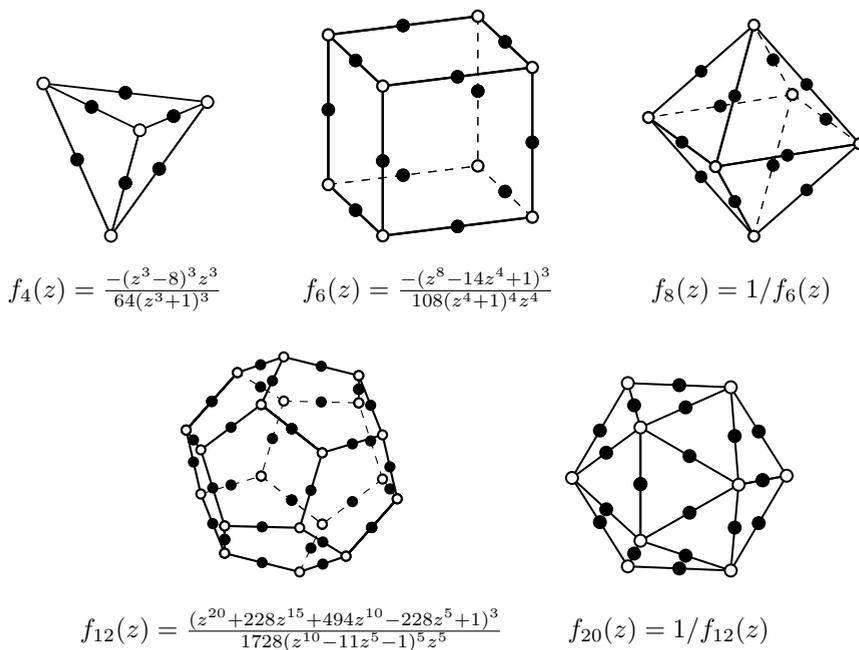


Figura 9: Los cinco sólidos platónicos junto con sus funciones de Belyi.

Fijémonos por ejemplo en el par $(\widehat{\mathbb{C}}, f_4)$, donde $f_4(z) = \frac{-(z^3-8)^3 z^3}{64(z^3+1)^3}$. No es difícil comprobar directamente las identidades

$$f'_4(z) = \frac{-3(z^4 - 2z^3 + 6z^2 + 4z + 4)(z^2 + 2z - 2)z^2(z^3 - 8)^2}{64(z^3 + 1)^4},$$

$$f_4(z) - 1 = -\frac{(z^4 - 2z^3 + 6z^2 + 4z + 4)^2(z^2 + 2z - 2)^2}{64(z^3 + 1)^3},$$

de lo que se deduce que f_4 es, en efecto, una función de Belyi, puesto que los ceros de $f'_4(z)$ (puntos de ramificación de f_4) son ceros de $f_4(z)$ o de $f_4(z) - 1$. Además, como f_4 tiene cuatro ceros triples situados en $\{0, 2, -1 \pm i\sqrt{3}\}$, el correspondiente dessin \mathcal{D}_4 tendrá allí cuatro vértices blancos de grado 3, y como todas las raíces del polinomio $z^4 - 2z^3 + 6z^2 + 4z + 4$ son simples, \mathcal{D}_4 tiene seis vértices negros de grado 2. Por último, f_4 tiene cuatro polos de multiplicidad 3 (uno de ellos es ∞), por lo que \mathcal{D}_4 tiene cuatro caras de grado 6.

Como en el ejemplo anterior, el uso de software permite representar gráficamente la preimagen del intervalo $[0, 1]$ por f_4 , siendo el resultado el grafo de la Figura 10 (la cuarta cara del tetraedro se ve aquí como la cara exterior, centrada en ∞). □

EJEMPLO 10. Sea S la superficie de Riemann compacta correspondiente a la curva elíptica de ecuación $C : y^2 = x(x - 1)(x - \xi)$, con $\xi = e^{2\pi i/5}$, y $f : S \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ la función de grado 10 determinada por $f(x, y) = x^5$. No es difícil comprobar que f es de Belyi: los valores 0 e ∞ se alcanzan con multiplicidad 10 en $(0, 0)$ e ∞

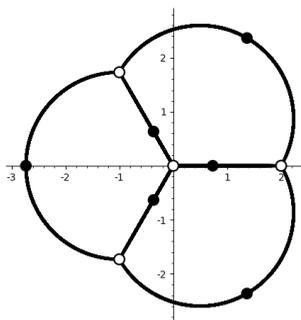


Figura 10: Representación plana del tetraedro, obtenido como $f_4^{-1}([0, 1])$.

respectivamente, mientras que el valor 1 se alcanza con multiplicidad 1 en los seis puntos correspondientes a $x = \xi^2, \xi^3, \xi^4$ y con multiplicidad 2 en $(1, 0)$ y $(\xi, 0)$.

No es difícil dibujar $f^{-1}([0, 1])$ en la superficie topológica subyacente a S si se piensa en f como la composición de la función coordenada \mathbf{x} en C (un morfismo de C a la esfera que cubre dos veces cada punto, excepto los valores de ramificación $0, 1, \xi$ e ∞) con el polinomio $p(z) = z^5$, de modo que $f^{-1}([0, 1]) = \mathbf{x}^{-1}(p^{-1}([0, 1]))$. La topología de S puede entenderse por medio de las dos *hojas* de \mathbf{x} , dos copias de \widehat{C} adyacentes a lo largo de caminos simples que conectan por parejas los valores 0 y 1 y ξ e ∞ .

Así, $p^{-1}([0, 1])$ es un grafo bipartito completo de tipo $(5, 1)$ (una estrella de cinco puntas con el vértice de grado 5, blanco, situado en 0 y los vértices de grado 1, negros, en las raíces quintas de la unidad), y de acuerdo con la Figura 11 vemos que la monodromía del dessin \mathcal{D} asociado al par de Belyi (S, f) es $(\sigma_0, \sigma_1) = ((1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), (1, 6)(2, 7))$. El lado derecho de la Figura 11 muestra un dibujo de \mathcal{D} inmerso en el toro topológico realizado como subvariedad de \mathbb{R}^3 .

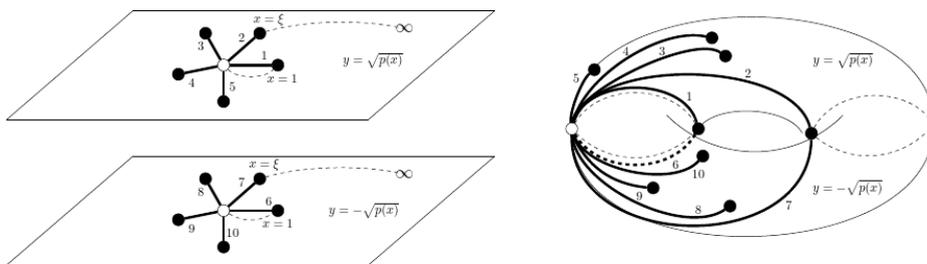


Figura 11: El dessin asociado al par de Belyi (S, f) , donde S es la curva elíptica de ecuación $y^2 = x(x - 1)(x - e^{2\pi i/5})$ y $f(x, y) = x^5$. En el lado izquierdo se describe S como cubierta doble de \widehat{C} por la aplicación coordenada x .

Obsérvese que la misma expresión $(x, y) \mapsto x^5$ define también una función de Belyi en la curva elíptica de ecuación $y^2 = x(x - 1)(x - \xi^2)$, que define una superficie

de Riemann no isomorfa a S . No es difícil argumentar como en el caso anterior para convencerse de que el dessin de la Figura 12 es el asociado a este nuevo par de Belyi. \square

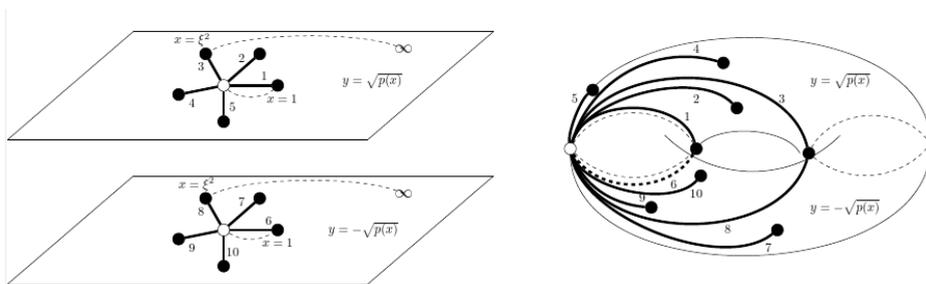
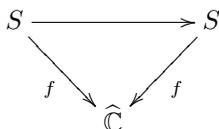


Figura 12: El dessin asociado al par de Belyi (S, f) , donde S es la curva elíptica de ecuación $y^2 = x(x - 1)(x - e^{4\pi i/5})$ y $f(x, y) = x^5$.

EJEMPLO 11. Dejamos a la habilidad de cada cual (con argumentos como los empleados en el ejemplo anterior) que, en el par de Belyi (S, f) asociado al dessin \mathcal{D} de la Figura 5, S es la superficie de Riemann asociada a la curva algebraica $C : y^2 = x^6 - 1$ y la función de Belyi f está dada por $f(x, y) = x^6$.

Este dessin es altamente simétrico, como sucede con los sólidos platónicos descritos en el Ejemplo 9. No es difícil identificar en la parte superior de la Figura 5 un homeomorfismo ρ de orden 6 en la superficie topológica de género 2, que podemos describir como una *rotación de dos lados de magnitud alrededor del centro de cada cara*, que deja invariante el dessin como grafo bicolorado. Lo mismo sucede con otro homeomorfismo τ de orden 2 visible en la parte inferior de la Figura 5 como un giro a lo largo del eje longitudinal de la superficie que intercambia los vértices blancos y fija cada uno de los vértices negros.

Estos homeomorfismos ρ y τ son ejemplos de las transformaciones que se conocen como *automorfismos* de un dessin. Estos automorfismos se describen en general de forma equivalente o bien de modo topológico (como acabamos de hacer), o de modo analítico, pues corresponden a automorfismos del par de Belyi (S, f) . Es decir, automorfismos $S \rightarrow S$ de la superficie de Riemann S que hacen conmutativo el diagrama



En el ejemplo que nos ocupa, la versión analítica (y algebraica) de los homeomorfismos ρ y τ es $\rho(x, y) = (e^{2\pi i/6}x, y)$ y $\tau(x, y) = (x, -y)$. \square

Si un dessin \mathcal{D} tiene un grupo de automorfismos $\text{Aut}(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ tan grande como para que la acción sobre el conjunto de aristas sea transitiva, se dice que \mathcal{D} es un

dessin regular, y que la superficie de Belyi que determina es una *superficie cuasiplatónica*. La esfera es, desde luego, una superficie cuasiplatónica (los sólidos platónicos son dessins regulares), y también lo es la superficie de Riemann de género 1 asociada a la curva algebraica $C : y^2 = x^6 - 1$ tratada en el ejemplo anterior. Hay en cada género solamente una cantidad finita de superficies cuasiplatónicas.

4. EL TEOREMA DE BELYI

Ya dijimos en la introducción que Belyi es el otro héroe de esta historia.

TEOREMA 2 (Belyi, 1979, [1]). *Sea S una superficie de Riemann compacta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (a) *S admite una función meromorfa $f : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ con a lo sumo tres valores de ramificación.*
- (b) *S puede definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.*

4.1. LA IMPLICACIÓN (a) \Rightarrow (b)

Estrictamente hablando, la parte de Belyi es la afirmación recíproca. Esta primera era conocida con anterioridad y es la que permitía a Grothendieck interpretar sus grafos como curvas algebraicas con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$. La implicación se deducía de resultados de Weil sobre el cuerpo definición de variedades algebraicas [8]. Estos resultados no son fáciles de entender (y ni siquiera de formular) y aquí lo que haremos será exponer las ideas principales de una demostración alternativa mucho más simple (aunque mucho más débil) de este hecho.

Empezaremos considerando el grupo de todos los automorfismos del cuerpo \mathbb{C} , que vamos a denotar por $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$. Los elementos $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ satisfacen las siguientes propiedades:

- (i) $\sigma(1) = 1$, $\sigma(2) = \sigma(1 + 1) = \sigma(1) + \sigma(1) = 2$, $\sigma(\frac{1}{2}) = \frac{\sigma(1)}{\sigma(2)} = \frac{1}{2}, \dots$; en otras palabras, la restricción de σ a \mathbb{Q} es la identidad.
- (ii) $\sigma(\sqrt{2})^2 = \sigma((\sqrt{2})^2) = \sigma(2) = 2 \Rightarrow \sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$. Y, en general, si $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ las únicas posibilidades para $\sigma(\alpha)$ son las raíces del polinomio de grado más pequeño con coeficientes en \mathbb{Q} del que α es raíz. (Este polinomio es el polinomio mínimo de la Teoría de Galois, claro.)
- (iii) Pero si $\alpha \in \mathbb{C}$ es trascendente, $\sigma(\alpha)$ puede ser cualquier número trascendente. Por ejemplo, existe una transformación galoisiana $\sigma_1 \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ tal que $\sigma_1(\pi) = \pi + 1$, y otra σ_2 tal que $\sigma_2(\pi) = \pi^{1000}$, y otra σ_3 tal que $\sigma_3(\pi) = e$. (El hecho de que el conjunto de los números trascendentes es no numerable da una idea del enorme tamaño del grupo $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$.)



Gennadii Belyi

Lo primero que vemos es que, en general, las transformaciones de Galois son discontinuas (considerar la imagen mediante σ de una sucesión de números racionales q_n convergiendo a π teniendo en cuenta las propiedades (i) y (iii)). Otra consecuencia de estas propiedades es que nos van a permitir formular el siguiente criterio (un poco extravagante) para determinar cuándo un número complejo $\alpha \in \mathbb{C}$ es algebraico.

Criterio 1:

$$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}} \iff \{\sigma(\alpha) : \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Pues bien, podemos formular un criterio análogo para reconocer cuándo una superficie de Riemann S está definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Para ello necesitamos introducir un poco de notación. Si S es la superficie de Riemann C_F asociada a un cierto polinomio $F(X, Y) = \sum a_{ij} X^i Y^j$ entonces S^σ va a denotar la superficie de Riemann C_{F^σ} asociada al polinomio $F^\sigma := \sum a_{ij}^\sigma X^i Y^j$, donde $a_{ij}^\sigma := \sigma(a_{ij})$. Obsérvese que la clase de isomorfía $[S^\sigma]$ de S^σ sólo depende de la clase de isomorfía $[S]$ de S porque si, con la notación de la Sección 2.4, $R = (R_1, R_2)$ es una aplicación birracional que produce un isomorfismo entre C_F y C_G entonces, con la notación obvia, $R^\sigma = (R_1^\sigma, R_2^\sigma)$ producirá un isomorfismo entre C_{F^σ} y C_{G^σ} .

Criterio 2:

$$S \text{ está definida sobre } \overline{\mathbb{Q}} \iff \{[S^\sigma] : \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\} \text{ es un conjunto finito.}$$

Ciertamente, si S corresponde a una curva algebraica $F(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j = 0$ con coeficientes $a_{ij} \in \overline{\mathbb{Q}}$, entonces, por la propiedad (ii) señalada más arriba, cada a_{ij} sólo puede ser transformado en una cantidad finita de números a_{ij}^σ mediante la acción de $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ y por la misma razón el polinomio F sólo va a tener un número finito de posibles transformados F^σ , luego la implicación « \Rightarrow » de este criterio es clara. La dificultad para el recíproco es que puede ocurrir que una superficie de Riemann sea definible sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ y no lo parezca a primera vista. Consideremos, por ejemplo, la superficie de Riemann correspondiente a la siguiente curva algebraica:

$$C_\lambda : F_\lambda = Y^2 - (X^3 - \lambda^3) = 0, \quad \text{con } \lambda \neq 0.$$

Si $\lambda \in \overline{\mathbb{Q}}$, esta curva está obviamente definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Si no, en principio diríamos que no; sin embargo, vimos al final de la Sección 2.4 que existe un isomorfismo birracional entre C_λ y C_1 (lo que significa que $[C_{F_\lambda}] = [C_{F_1}]$), luego en realidad C_λ se puede definir sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (e incluso sobre \mathbb{Q}) aunque λ sea trascendente.

Para lo que viene a continuación conviene ver el isomorfismo entre C_λ y C_1 como un caso particular (para $\mu = 1$) del siguiente isomorfismo:

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda, \mu} : C_\lambda &\rightarrow C_\mu \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{\mu}{\lambda} x, \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}} \right)^3 y \right). \end{aligned} \tag{4}$$

Nótese que comprobar que la fórmula $\Psi_{\lambda,\mu}$ define un isomorfismo birracional entre C_λ y C_μ equivale esencialmente a comprobar que

$$F_\lambda(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F_\mu(\Psi_{\lambda,\mu}(x, y)) = F_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x, \left(\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\lambda}}\right)^3 y\right) = 0,$$

i.e., comprobar que

$$y^2 - x^3 + \lambda^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 y^2 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3 x^3 + \mu^3 = 0. \quad (5)$$

Ahora bien, simplificando por $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^3$ vemos que la expresión de la derecha es exactamente la misma que la de la izquierda (¡no aparece la μ !). Por tanto (5) se cumple para cualquier $\mu \neq 0$, luego en (4) podemos sustituir μ por cualquier valor no nulo. Por ejemplo, para $\mu = 1$ obtenemos el isomorfismo deseado $\Psi_{\lambda,1} : C_\lambda \rightarrow C_1$.

Así que, yendo ya a la demostración de la parte « \Leftarrow » del Criterio 2, sea $S = C_F$ la superficie de Riemann definida por un polinomio F con coeficientes no algebraicos (como el F_λ anterior, cuando λ es trascendente) y supongamos que al transformar F por todos los elementos $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ obtenemos una familia de superficies de Riemann S^σ correspondiente a la familia de polinomios F^σ (en nuestro ejemplo, $F^\sigma = F_{\lambda^\sigma}$) en la que sólo hay un número finito de clases de equivalencia. Este número de clases de equivalencia seguirá siendo finito si nos restringimos sólo a los elementos σ que transforman λ en cualquier otro número *algebraicamente independiente* de λ . Ahora bien, como para cada λ hay una cantidad infinita (y de hecho no numerable) de números algebraicamente independientes de λ , nuestra superficie de Riemann $S = C_{F_\lambda}$ va a tener que ser isomorfa a alguna (en realidad a muchas) de las superficies de Riemann S^σ correspondientes a los polinomios F_{λ^σ} . Luego, aunque no hubiéramos visto antes la fórmula (4), sabríamos que por nuestra hipótesis de finitud tendría que existir un isomorfismo birracional

$$\Phi_{\lambda,\mu} : C_\lambda \rightarrow C_\mu \quad (\text{con } \mu = \lambda^\sigma)$$

descrito por esa fórmula (o una parecida). Y ahora, si consideramos la expresión polinómica (5) correspondiente a $\Phi_{\lambda,\mu}$ con $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ (y, por tanto, $y \in \overline{\mathbb{Q}(\lambda)}$ = cierre algebraico de $\mathbb{Q}(\lambda)$), habremos de obtener nuevamente una expresión independiente de μ , pues de otro modo tendríamos una relación polinómica entre λ y μ con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$, justo lo contrario de lo que significa decir que λ y μ son algebraicamente independientes. Esto nos va a permitir sustituir (o *especializar*, en el lenguaje de Weil) μ por un valor $q \in \overline{\mathbb{Q}}$ para obtener un isomorfismo birracional $\Phi_{\lambda,q} : C_\lambda \rightarrow C_q$ entre C_λ y una curva C_q definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Esta es la idea esencial de la prueba del Criterio 2. Los detalles pueden verse en la Sección 3.6 de [3].

Una vez convencidos de la validez de este criterio ya estamos cerca de poder justificar la parte «(a) \Rightarrow (b)» del teorema de Belyi. Tenemos que ver que si una superficie de Riemann S admite una función de Belyi entonces la familia de superficies de Riemann $\{S^\sigma : \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})\}$ sólo contiene un número finito de clases de

isomorfía. Empecemos considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\sigma} & C^\sigma \\ R \downarrow & & \downarrow R^\sigma \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

donde

- C es la curva definida por la ecuación $F(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j = 0$.
- $C^\sigma : F^\sigma(x, y) = \sum a_{ij}^\sigma x^i y^j = 0$, con $a_{ij}^\sigma = \sigma(a_{ij})$.
- $\sigma : C \rightarrow C^\sigma$ es la biyección dada por $\sigma(a, b) = (a^\sigma, b^\sigma)$ que se extiende a una biyección entre las superficies de Riemann C_F y C_{F^σ} (ver [3, Sección 3.4.1]).
- R es una función racional de C (o, equivalentemente, meromorfa de C_F) con tres valores de ramificación que podemos escribir como una función polinómica $R = P(x, y) = \sum b_{ij}x^i y^j$ (o quizá racional $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$).

La aplicación $\sigma : C \rightarrow C^\sigma$ está bien definida porque si $F(a, b) = 0$ tenemos $F^\sigma(\sigma(a, b)) = \sum a_{ij}^\sigma (a^\sigma)^i (b^\sigma)^j = \sigma(F(a, b)) = 0$; en otras palabras, $\sigma(a, b) \in C^\sigma$ si $(a, b) \in C$. Y el diagrama conmuta por la misma razón: $R^\sigma(\sigma(a, b)) = \sigma(R(a, b))$. Además, esta igualdad induce la siguiente relación entre las fibras de R y R^σ :

$$(R^\sigma)^{-1}(c^\sigma) = \sigma(R^{-1}(c))$$

A su vez esta relación entre la fibras implica que:

- $\deg(R) = \deg(R^\sigma)$, pues el grado es el cardinal de la fibra genérica.
- $\sigma(B_R) = B_{R^\sigma}$, donde recordemos que B_R denota el conjunto de valores de ramificación, pues éstos son aquéllos cuyas fibras tienen cardinal más pequeño que el de la fibra genérica.

Supongamos por lo tanto que R es una función meromorfa con tres valores de ramificación. Puesto que el grupo de automorfismos de $\widehat{\mathbb{C}}$ actúa transitivamente en tripletas de puntos (ver el final de la Sección 2.3), podemos suponer que esos tres valores de ramificación son, por ejemplo, 0, 1 y 2. Por los comentarios anteriores, vemos que $R : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ y $R^\sigma : C^\sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ son funciones del mismo grado, que R ramifica sobre los valores $0, 1, 2 \in \mathbb{P}^1$ y que R^σ ramifica sobre $\sigma(0) = 0, \sigma(1) = 1$ y $\sigma(2) = 2$. Es decir, para todo $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ las funciones $R : C \rightarrow \mathbb{P}^1$ y $R^\sigma : C^\sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ son funciones de Belyi que tienen el mismo grado y los mismos valores de ramificación. Como fue señalado al final de la Sección 3.2, esto implica que en la familia C^σ sólo hay un número finito de clases de isomorfía distintas, y finalmente el Criterio 2 permite deducir que C puede definirse sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

4.2. LA IMPLICACIÓN $(b) \Rightarrow (a)$

Como ya dijimos al inicio de la Sección 4.1, Grothendieck sabía desde el principio que cada uno de sus dessins d'enfants determinaba una curva algebraica definida

sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Lo que no sabía era si todas las curvas algebraicas definidas sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ (objetos aritméticos) se obtenían a partir de estos grafos (objetos topológicos). La cuestión desde luego parecía un poco absurda. En sus propias palabras ([5, §14]):

Une telle supposition avait l'air à tel point dingue que j'étais presque gêné de la soumettre aux compétences en la matière. Deligne consulté trouvait la supposition dingue en effet, mais sans avoir un contre-exemple dans ses manches. Moins d'un an après, au Congrès International de Helsinki, le mathématicien soviétique Bielyi annonce justement ce résultat, avec une démonstration d'une simplicité déconcertante tenant en deux petites pages d'une lettre de Deligne — jamais sans doute un résultat profond et déroutant ne fut démontré en si peu de lignes!

A continuación se expone un diagrama en el que se muestra cómo obtener una función de Belyi en un ejemplo concreto. Tomaremos la superficie de Riemann asociada a la curva algebraica $C : y^2 = x(x-1)(x - \sqrt{12/7})$ y construiremos una función de Belyi como composición de varias funciones meromorfas (o racionales); la primera de ellas de C a $\mathbb{P}^1 = \widehat{\mathbb{C}}$ y las restantes de $\widehat{\mathbb{C}}$ a $\widehat{\mathbb{C}}$. El conjunto que aparece a la derecha de cada $\widehat{\mathbb{C}}$ es el de los valores de ramificación.

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ y^2 = x(x-1) \left(x - \sqrt{\frac{12}{7}} \right) \right\} \cup \{\infty\} & & \\
 \downarrow (x,y) \mapsto x & & \\
 \widehat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \left\{ 0, 1, \sqrt{\frac{12}{7}}, \infty \right\} \\
 \downarrow t \mapsto t^2 & & \\
 \widehat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \left\{ 0, 1, \frac{12}{7}, \infty \right\} \\
 \downarrow u \mapsto 1/u & & \\
 \widehat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \left\{ \infty, 1, \frac{7}{12}, 0 \right\} \\
 \downarrow z \mapsto \frac{12^{12}}{7^7 5^5} z^7 (1-z)^5 & & \\
 \widehat{\mathbb{C}} & \rightarrow & \left\{ \infty, 1, 0 \right\}
 \end{array}$$

En realidad, este ejemplo vale una demostración porque:

- **Paso 1:** Sea cual sea la curva $C : F(x, y) = 0$ con la que empecemos, la regla $(x, y) \mapsto x$ siempre va a definir una función meromorfa $\mathbf{x} : C \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Además, como el polinomio F tiene coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$ el conjunto $B_{\mathbf{x}} = \{q_1, \dots, q_n\}$ de los valores de ramificación va a estar constituido por números algebraicos, i.e., vamos a tener $B_{\mathbf{x}} \subset \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$.
- **Paso 2:** En el segundo paso, el objetivo que se persigue es construir una aplicación racional $\mathbf{m} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ tal que los valores de ramificación de $\mathbf{m} \circ \mathbf{x}$ sean racionales, i.e., $B_{\mathbf{m} \circ \mathbf{x}} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Como los valores q_i son algebraicos, no hay problema en construir un polinomio $m(x)$ tal que las imágenes $m(q_i)$

de estos valores sean racionales, incluso podemos conseguir que sean todas 0: basta tomar el producto de los polinomios mínimos de cada uno de los q_i . El problema es que $m(x)$ va a crear nuevos valores de ramificación, a saber, las imágenes $m(q'_j)$ de los puntos q'_j de ramificación de $m(x)$, es decir, de las raíces de $m'(x) = 0$, que en principio no tienen por qué ser racionales. Lo que observa Belyi es que, como $\deg(m'(x)) < \deg(m(x))$, reiterando este proceso conseguiremos el objetivo en un número finito de pasos.

- **Paso 3:** Es fácil ver que componiendo, si fuera necesario, con sucesivas transformaciones del tipo $x \mapsto 1/x$ o $x \mapsto 1 - x$ podemos suponer que el conjunto de valores de ramificación es de la forma

$$\{0, 1, \infty, r_1, r_2, \dots, r_l\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

con $0 < r_1 < 1$, i.e., que r_1 es de la forma $r_1 = \frac{m+n}{m}$.

- **Paso 4:** Y aquí viene la simple y genial idea de Belyi. El polinomio

$$P(z) = P_{m,n}(z) = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n} z^m (1-z)^n$$

transforma en $0, 1, \infty$ no sólo los cuatro puntos $0, 1, \infty, r_1$ (como puede comprobarse trivialmente), sino también sus propios puntos de ramificación. Por la simple razón de que son los mismos. Merece la pena pararse un minuto a comprobar esta pequeña maravilla:

$$\begin{aligned} P'(z) = 0 &\Leftrightarrow mz^{m-1}(1-z)^n - nz^m(1-z)^{n-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow z = 0, 1 \quad \text{ó} \quad m(1-z) = zn \\ &\Leftrightarrow z = 0, 1, \frac{m+n}{m}. \end{aligned}$$

Así que al componer la función que teníamos hasta ese momento con el correspondiente polinomio de Belyi pasamos de un conjunto de l valores de ramificación $\{0, 1, \infty, r_1, r_2, \dots, r_{l-3}\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ a un conjunto de $l - 1$ valores de ramificación $\{0, 1, \infty, P(r_2), \dots, P(r_{l-3})\} \subset \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$. Y así vamos disminuyendo el cardinal del conjunto de valores de ramificación hasta conseguir que consista sólo en los puntos $0, 1, \infty$, como deseábamos.

5. LA ACCIÓN DEL GRUPO ABSOLUTO DE GALOIS EN DESSINS

El grupo absoluto de Galois $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ consistente en todos los automorfismos del cuerpo \mathbb{Q} juega un papel central en la varias ramas del álgebra y de la geometría aritmética. Ocurre a menudo en matemáticas que la mejor manera de entender un grupo dado es ponerlo a actuar sobre un conjunto adecuado y estudiar las propiedades de esta acción. Parece claro que el principal motivo que llevó a Grothendieck a introducir sus *dessins d'enfants* es proponerlos como objetos (combinatorios) en los que se pudiera definir una acción interesante del grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$.

La idea es la siguiente. En virtud de la correspondencia entre *dessins* y pares de Belyi descrita en la Sección 3, la acción del grupo $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ en pares de Belyi puede

verse como una acción de este grupo en dessins de la siguiente manera obvia: con la notación de la Sección 4 definimos el transformado \mathcal{D}^σ de un dessin $\mathcal{D} \subset X$ por un elemento $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ por la regla

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \dashrightarrow & \mathcal{D}^\sigma \\ \downarrow & & \uparrow \\ (X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{\sigma} & (X_{\mathcal{D}^\sigma}, f_{\mathcal{D}^\sigma}) \end{array}$$

Ahora bien, por el teorema de Belyi, el par de Belyi $(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$ es equivalente a un par (C, R) formado por una curva C y una función racional R de Belyi, ambas definidas por polinomios con coeficientes en $\overline{\mathbb{Q}}$, luego la acción en dessins del grupo $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{Q})$ que acabamos de definir sigue teniendo perfecto sentido cuando la «restringimos» al grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$.

El siguiente teorema, cuya demostración se sigue esencialmente de la relación $R^\sigma(P^\sigma) = \sigma(R(P))$ observada en la Sección 4.1, contiene una lista de invariantes básicos de esta acción.

TEOREMA 3. *Sea \mathcal{D} un dessin. Las siguientes propiedades de \mathcal{D} permanecen invariantes bajo la acción del grupo de Galois:*

- (1) *El número de aristas (= $\deg(f_{\mathcal{D}})$).*
- (2) *El número de vértices blancos, de vértices negros y de caras (= $\#f_{\mathcal{D}}^{-1}(0)$, $\#f_{\mathcal{D}}^{-1}(1)$, $\#f_{\mathcal{D}}^{-1}(\infty)$).*
- (3) *Los grados de los vértices blancos, de los vértices negros y de las caras (= multiplicidad de $f_{\mathcal{D}}$ en $f_{\mathcal{D}}^{-1}(0)$, $f_{\mathcal{D}}^{-1}(1)$ and $f_{\mathcal{D}}^{-1}(\infty)$).*
- (4) *El género (= género de $X_{\mathcal{D}}$).*
- (5) *El grupo de automorfismos (= $\text{Aut}(X_{\mathcal{D}}, f_{\mathcal{D}})$).*
- (6) *La propiedad de ser dessin regular.*

EJEMPLO 12. Los dos dessins representados en la Figura 8 son conjugados por la acción de cualquier elemento σ del grupo absoluto de Galois que permute las dos raíces del polinomio $x^2 - 10$. Los sólidos platónicos, por el contrario, están dados por funciones de Belyi definidas sobre \mathbb{Q} , por lo que cada uno de ellos constituye una órbita completa de la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$. \square

EJEMPLO 13. Los dos dessins de las Figuras 11 y 12 son conjugados Galois, puesto que los elementos de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ que envían $e^{2\pi i/5} = \xi_5$ en ξ_5^2 conjugan uno en el otro. De forma análoga, se podría dibujar otros dessins pertenecientes a esta misma órbita (correspondientes a cambiar ξ_5 por ξ_5^3 y ξ_5^4). \square

Finalizamos esta exposición señalando dos líneas actuales de investigación relacionadas con la acción de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ sobre los dessins d'enfants:

1. Los invariantes descritos en el Teorema 3 no determinan la $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ -órbita de un dessin. Idealmente, uno desearía tener una lista completa de invariantes que determinasen estas órbitas.

2. Se sabe que esta acción es fiel (incluso restringida a dessins regulares [4]) y que este resultado permite expresar el grupo $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$ como grupo de automorfismos de la completación profinita de F_2 , el grupo libre en dos elementos. Este hecho llevó a Drinfel'd ([2]) a definir un subgrupo, conocido como el grupo de Teichmüller-Grothendieck, que contiene a $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$. La conjetura es que este subgrupo de hecho coincide con $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}})$.

AGRADECIMIENTOS. Queremos hacer constar nuestro agradecimiento a la persona que se encargó de evaluar la versión original del texto por sus interesantes comentarios y sugerencias para mejorarlo. Entre otras, la idea de incluir en la bibliografía el influyente artículo [7].

REFERENCIAS

- [1] G. V. BELYI, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **43** (1979), 269–276 (en ruso); *Math. USSR Izv.* **14** (1980), 247–256 (en inglés).
- [2] V. G. DRINFELD, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Algebra i Analiz* **2** (1990), no. 4, 149–181 (en ruso); *Leningrad Math. J.* **2** (1991), no. 4, 829–860 (en inglés).
- [3] E. GIRONDO Y G. GONZÁLEZ-DIEZ, *Introduction to compact Riemann surfaces and dessins d'enfants*, London Mathematical Society Student Texts **79**, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [4] G. GONZÁLEZ-DIEZ Y A. JAIKIN, The absolute Galois group acts faithfully on regular dessins and on Beauville surfaces, *Proc. London Math. Soc.* **111** (2015), no. 4, 775–796.
- [5] A. GROTHENDIECK, Esquisse d'un Programme, traducido a inglés en *Geometric Galois Actions 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **242**, 5–84, Cambridge University Press, 1997.
- [6] N. MAGOT Y A. ZVONKIN, Belyi functions for Archimedean solids, *Discrete Math.* **217** (2000), 249–271.
- [7] G. B. SHABAT Y V. A. VOEVODSKY, Drawing curves over number fields, *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, Progr. Math. **88**, 199–227, Birkhäuser, 1990.
- [8] A. WEIL, The field of definition of a variety, *Amer. J. Math.* **78** (1956), 509–524.

ERNESTO GIRONDO, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: ernesto.girondo@uam.es

Página web: <https://verso.mat.uam.es/~ernesto.girondo>

GABINO GONZÁLEZ-DIEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: gabino.gonzalez@uam.es

Página web: <https://verso.mat.uam.es/~gabino.gonzalez>

DAVID TORRES-TEIGELL, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: david.torres@uam.es

Página web: <https://verso.mat.uam.es/~david.torres>