

## Nudos, quandles y homología

por

**Leandro Vendramin**

**RESUMEN.** Presentamos una introducción informal a la teoría combinatoria de nudos. Discutiremos el grupo fundamental de un nudo, invariantes por coloreo e invariantes dados por quandles y homología de quandles.

### INTRODUCCIÓN

Robert Graves [8] cuenta una leyenda griega en la que un oráculo anunció a los habitantes de Frigia que reconocerían a su futuro rey al verlo llegar en una carreta de bueyes. Tiempo después, el pueblo reconoció en un campesino de nombre Gordias a su nuevo rey. En agradecimiento, Gordias ofreció a Zeus su carro y el yugo, que había atado con un nudo tan complicado que nadie podría desatar. Se dijo que el que fuera capaz de desatar el nudo de Gordias conquistaría Asia. Siglos después, Alejandro Magno tuvo que enfrentarse al reto de desatar ese nudo y, sin vacilación, deshizo el nudo al cortar la cuerda con su espada. Según se dice, esa misma noche, Zeus, con una fuerte tormenta, mostró su aprobación a la solución encontrada por Alejandro Magno.

La teoría de nudos, en principio, intenta entender los nudos que podríamos encontrarnos en la vida real, como el que se ve a la derecha. El objetivo final de la teoría es obtener una clasificación completa de los nudos, salvo deformaciones continuas. A simple vista, uno podría pensar entonces que la teoría de nudos es una divertida rama de la topología. Si bien



esto es cierto, es necesario destacar que el estudio de los nudos se lleva a cabo gracias al uso de técnicas muy profundas que provienen de distintas ramas de la matemática, como la geometría, el álgebra y el análisis. La teoría de nudos tiene además muchas aplicaciones en otras ciencias, entre ellas la biología, la física y la criptografía.

Invitamos al lector a que tome un pedazo de cuerda y haga un nudo tal como el que vemos a la izquierda en la figura 1. Si pegamos los extremos de esa cuerda obtendremos una cuerda anudada que no tiene extremos tal como la que vemos a la derecha en la misma figura.

¿Puede desatarse ese nudo? Después de varios minutos de experimentación se hace más o menos evidente que ese nudo podrá deshacerse solamente si nos permitimos cortar la cuerda y regresar así a la situación de la izquierda. De hecho, si aceptamos soluciones como la que encontró Alejandro Magno, entonces todo nudo



Figura 1: Nudos.

puede desatarse y el problema de clasificar nudos —que bajo esas condiciones resulta ser muy poco interesante— queda resuelto: todo nudo es trivial.

¿Qué pasa si no está permitido cortar cuerdas? ¿Cómo podríamos demostrar matemáticamente que un nudo no puede desatarse? Para responder esta pregunta, primero es necesario describir matemáticamente un nudo de forma tal que la definición permita modelar con cierta fidelidad el fenómeno real de anudar una cuerda. Necesitamos además que nuestra definición excluya patologías matemáticas desagradables, tales como hacer desaparecer un nudo al tirar indefinidamente de los extremos de la cuerda. Por último, necesitamos una definición precisa y acertada de lo que significa que dos nudos sean *equivalentes*, es decir, iguales aunque se vean distintos. Una vez que tengamos estas cosas, habremos formulado matemáticamente el problema de estudiar nudos, y entonces, tal como se hace en muchas ramas de la matemática, podremos concentrarnos en estudiar nudos mediante el uso de invariantes.

AGRADECIMIENTOS. Este texto recoge el contenido de un minicurso dictado en el Encuentro Nacional de Álgebra, el ENA VII, celebrado en La Falda, Córdoba, Argentina, del 4 al 8 de agosto de 2014. Aunque no sea habitual en un artículo, he querido mantener los ejercicios, que considero que tienen interés y son una parte importante de las notas. Agradezco a Agustín García, Jonathan Barmak, Edwin Clark, Marco Farinati, César Galindo, Juliana García Galofre, César Massri y Masahico Saito los comentarios y las correcciones. Para terminar, quiero expresar mi agradecimiento a un anónimo y cuidadoso revisor; sus comentarios fueron de gran ayuda.



Kurt Reidemeister (1893–1971).

## 1. NUDOS

Esta primera sección está dedicada a los conceptos básicos de la teoría de nudos y al teorema de Reidemeister, que nos permite traducir el problema topológico de distinguir nudos al lenguaje de la combinatoria.

DEFINICIÓN 1.1. Un *nudo* (en  $\mathbb{R}^3$ ) es una función inyectiva y continua  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  es la circunferencia.

En el conjunto de nudos definimos la relación de equivalencia dada por *isotopía*.

DEFINICIÓN 1.2. Diremos que los nudos dados por las funciones  $\alpha$  y  $\beta$  son *equivalentes* si y sólo si existe una función continua  $H: S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que la función  $H_t: z \mapsto H(z, t)$  es un nudo para todo  $t \in [0, 1]$ ,  $H_0 = \alpha$  y  $H_1 = \beta$ .

Los nudos pueden ser dotados de una orientación. Una *orientación* se define eligiendo una dirección para viajar alrededor del nudo. En este artículo trabajaremos principalmente con nudos orientados.

Para evitar patologías desagradables, consideraremos únicamente nudos equivalentes a nudos dados por poligonales. Estos nudos se llaman *nudos mansos*. En la figura 2 mostramos un ejemplo de nudo salvaje (no manso). Para nosotros, un *nudo* siempre será un nudo manso. En la práctica, nuestros nudos poligonales tendrán tantos segmentos que será casi imposible diferenciar a nuestra curva de una curva suave. En relación con esta observación, mencionamos el siguiente teorema:

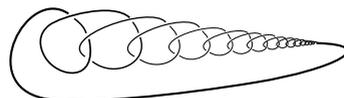


Figura 2: Un ejemplo de nudo salvaje.

TEOREMA 1.3. *Un nudo parametrizado por longitud de arco y de clase  $C^1$  es manso.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba de este resultado es muy técnica pero sólo utiliza conceptos básicos de cálculo avanzado. Para una demostración completa remitimos al apéndice I de [6]. □

Para simplificar la notación, seremos un poco imprecisos a la hora de hablar de nudos. Un nudo será una función inyectiva y continua  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , su imagen, o una clase de equivalencia de tales funciones. Por más extraño que parezca, esto no causará confusión alguna.

Sea  $K$  un nudo. Consideremos la proyección de  $K$  en el plano dada por

$$\pi: (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

Un punto  $p \in \pi(K)$  es un *punto múltiple* si  $\pi^{-1}(p)$  contiene más de un punto de  $K$ . La *multiplicidad* de  $p$  se define como el cardinal del conjunto  $\pi^{-1}(p) \cap K$ . Una proyección de  $K$  en el plano se dice *genérica* si tiene las siguientes propiedades: 1) hay una cantidad finita de puntos de multiplicidad mayor que uno, 2) no hay puntos de multiplicidad mayor que dos, y 3) no hay puntos dobles donde uno de los puntos es un vértice. La figura 3 muestra algunos ejemplos de cruces no admitidos en una proyección genérica, el de la izquierda por ser un punto triple y los otros dos por presentar vértices.

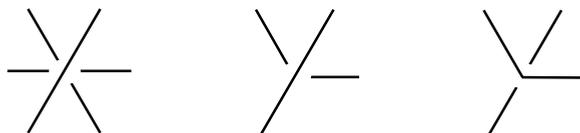


Figura 3: Cruces no admitidos en el diagrama de un nudo dado por una poligonal.

Un *diagrama* de  $K$  es una proyección genérica de  $K$  en el plano donde en cada *cruce* (punto de multiplicidad dos) se puede distinguir qué segmento pasa por arriba y qué segmento pasa por debajo. Para ilustrar esta situación, el segmento que pasa por debajo se dibuja cortado. Las componentes conexas del diagrama se llaman, entonces, *arcos*. Para diagramas de nudos orientados, agregaremos una flecha al diagrama que indique la orientación.

Cualquier nudo equivalente a  $S^1$  (visto como  $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ) será considerado como el *nudo trivial*. En la práctica, no siempre es fácil reconocer la trivialidad de un nudo. En la figura 4 vemos tres proyecciones distintas del nudo trivial. Una proyección aún más curiosa del nudo trivial puede verse en la figura 5.

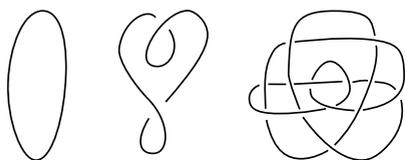


Figura 4: Tres proyecciones del nudo trivial.



Figura 5: Una proyección del nudo trivial descubierta por Thistlethwaite.

En 1926 Reidemeister vislumbró una forma combinatoria de verificar si dos nudos son equivalentes. Básicamente, dos diagramas representarán al mismo nudo si y sólo si puede pasarse de un diagrama al otro mediante una sucesión finita de ciertas transformaciones,  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  y  $\mathcal{R}_3$ , llamadas *movimientos de Reidemeister*. Hay tres de estos movimientos: el primero se muestra en la figura 6, el segundo en la figura 7 y el tercero en la figura 8.



Figura 6:  $\mathcal{R}_1$ .

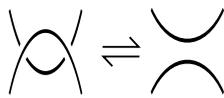


Figura 7:  $\mathcal{R}_2$ .

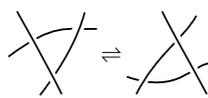


Figura 8:  $\mathcal{R}_3$ .

**TEOREMA 1.4 (Reidemeister).** *Dos nudos son equivalentes si y sólo si sus diagramas están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.*

**DEMOSTRACIÓN.** Para la demostración remitimos a [3, § 1.14]. □

El teorema de Reidemeister también puede utilizarse para nudos orientados si se consideran todas las configuraciones posibles para los diagramas de las figuras 6, 7 y 8 con respecto a las posibles orientaciones. El teorema de Reidemeister es el núcleo de la teoría combinatoria de nudos, ya que nos permite, por ejemplo, pensar que un nudo es una clase de equivalencia de diagramas, donde dos diagramas son equivalentes si y sólo si están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

EJEMPLO 1.5. El *nudo trébol* es quizá el nudo más famoso. Una representación paramétrica de la curva que da este nudo es

$$\begin{aligned} x &= \text{sen}(t) + 2 \text{sen}(2t), \\ y &= \text{cos}(t) - 2 \text{cos}(2t), \\ z &= -\text{sen}(3t). \end{aligned}$$

El nudo trébol, tal como lo vemos a la izquierda en la figura 9, se denota por el símbolo  $3_1$ . Queda como ejercicio demostrar que los dos nudos de la figura 9 son equivalentes.

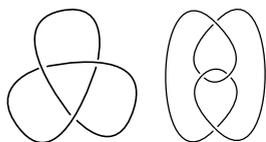


Figura 9: Dos proyecciones del nudo  $3_1$ .

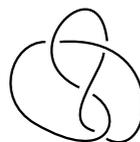


Figura 10: El nudo  $4_1$ .

EJEMPLO 1.6. Otro nudo famoso es el nudo  $4_1$  o *nudo ocho*. Una representación paramétrica para la curva que da este nudo es

$$\begin{aligned} x &= (2 + \text{cos}(2t)) \text{cos}(3t), \\ y &= (2 + \text{cos}(2t)) \text{sen}(3t), \\ z &= \text{sen}(4t), \end{aligned}$$

y se puede ver una proyección en la figura 10.

La *imagen especular* de un nudo se obtiene al aplicarle al nudo la transformación  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ . En la figura 11 vemos el nudo  $3_1$  y su imagen especular  $m(3_1)$ . En el ejemplo 8.4 demostraremos que los nudos  $3_1$  y  $m(3_1)$  no son equivalentes.

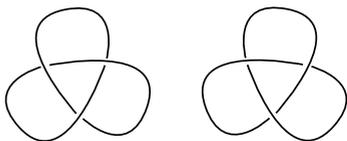


Figura 11: El nudo  $3_1$  (derecha) y su imagen especular  $m(3_1)$  (izquierda).

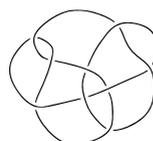


Figura 12: El nudo  $9_{32}$  es totalmente asimétrico.

Dos nudos orientados  $K$  y  $L$  serán equivalentes si existe una isotopía entre  $K$  y  $L$  compatible con las orientaciones. Si  $K$  es un nudo orientado, el *reverso*  $r(K)$  de  $K$  es  $K$  como conjunto pero con la orientación opuesta. Los operadores  $r$  y  $m$  son involuciones en el espacio de nudos y generan un grupo isomorfo a  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ .

EJEMPLO 1.7. El nudo  $3_1$  es equivalente al nudo  $r(3_1)$ .

EJEMPLO 1.8. El nudo  $4_1$  es *totalmente simétrico*, es decir, los nudos  $4_1$ ,  $m(4_1)$ ,  $r(4_1)$  y  $rm(4_1)$  son todos equivalentes.

EJEMPLO 1.9. El nudo  $9_{32}$  de la figura 12 es *totalmente asimétrico*, es decir, los nudos  $9_{32}$ ,  $m(9_{32})$ ,  $r(9_{32})$  y  $rm(9_{32})$  son todos no equivalentes.

## 2. COMPOSICIÓN DE NUDOS Y NUDOS PRIMOS

Dados dos nudos orientados  $K$  y  $L$  podemos obtener un nuevo nudo con el siguiente procedimiento: quitamos un pedacito de arco de cada una de las proyecciones de nuestros nudos y luego unimos los cuatro puntos finales obtenidos con dos nuevos arcos (es importante que hagamos esto sin agregar nuevos cruces) tal como muestra la figura 13.

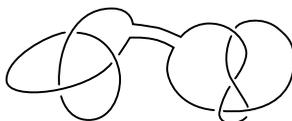


Figura 13: Composición de nudos.

Esta operación se denomina *composición* de nudos. La composición de los nudos  $K$  y  $L$  se denota por  $K\#L$ . No es difícil demostrar que la composición de nudos es una operación asociativa y conmutativa y que el nudo trivial es el neutro de esta operación. Para más información remitimos a [1, §1.2]. Un nudo no trivial es *primo* si no puede descomponerse como la composición de otros nudos no triviales. Un nudo es *compuesto* si no es primo. El problema de determinar si un nudo dado es primo es extremadamente difícil. La figura 14 contiene las proyecciones de los primeros nudos primos (salvo reverso e imagen especular) donde cada nudo tiene a lo sumo siete cruces.

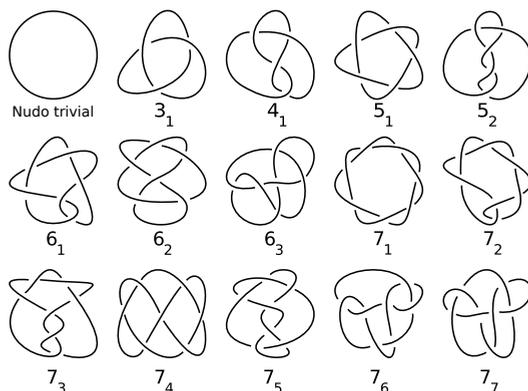


Figura 14: Algunos nudos primos.

EJEMPLO 2.1. Consideremos el nudo que se forma al componer dos nudos  $3_1$ . Este nudo se conoce como el *nudo de la abuela* (o *granny knot*, en inglés), se denota por  $3_1\#3_1$ , y se muestra a la izquierda en la figura 15.

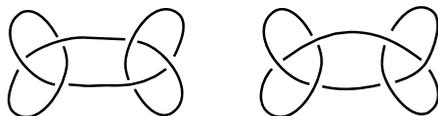


Figura 15: El nudo de la abuela (izquierda) y el nudo cuadrado (derecha) no son equivalentes.

EJEMPLO 2.2. El nudo compuesto formado por  $3_1$  y su imagen especular  $m(3_1)$  se conoce como el *nudo cuadrado* (o *square knot*, en inglés), se denota por  $3_1\#m(3_1)$ , y se muestra a la derecha en la figura 15.

En los ejemplos 7.15 y 8.5 demostraremos que el nudo de la abuela y el nudo cuadrado no son equivalentes.

Un teorema de H. Schubert establece que todo nudo puede expresarse en forma única como la composición de nudos primos [3, VII]. El género de un nudo y las superficies de Seifert permiten demostrar que el nudo trivial no puede escribirse como la composición de dos nudos no triviales, ver por ejemplo [1, §4.3]. Este resultado nos dice que no es posible hacer dos nudos consecutivos en un pedacito de cuerda de forma tal que estos nudos se cancelen mutuamente. Como la demostración de este resultado es bastante difícil, nos gustaría tener a mano una prueba más sencilla. Es por eso que formulamos el siguiente problema:

¿Existe algún invariante sencillo que permita demostrar que el nudo trivial no puede escribirse como la composición de dos nudos no triviales?

Puede construirse un invariante de nudos a partir de la cantidad de cruces que tienen los diagramas de un nudo. Para ser más precisos, definiremos el *número de cruces*  $c(K)$  de un nudo  $K$  como el menor número de cruces que aparece en cualquier diagrama del nudo  $K$ . La siguiente conjetura lleva abierta más de cien años y nos recuerda lo poco que sabemos del número  $c(K)$ , ver [1, §3.3] para más información.

CONJETURA 2.3.  $c(K\#L) = c(K) + c(L)$ .

### 3. COLORACIONES

Supongamos que queremos mostrar que un cierto nudo no es trivial. ¿Qué invariante sencillo podríamos obtener a partir de los tres movimientos de Reidemeister? Responderemos esta pregunta al introducir la *coloración con tres colores*. Fijemos un conjunto de tres colores, digamos {rojo, verde, azul}. Una proyección de un nudo es *coloreable con tres colores* si cada arco de la proyección puede colorearse con uno de los tres colores de tal forma que en cada cruce se vean los tres colores elegidos o únicamente uno de los tres.

Podemos colorear cualquier nudo usando un solo color. Esto nos da una coloración con tres colores que llamaremos *coloración trivial*.

La cantidad de coloraciones con tres colores da un invariante de nudos. Este resultado es un caso particular del teorema 3.3 que veremos más adelante.

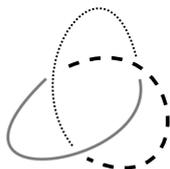


Figura 16: El nudo  $3_1$  coloreado con tres colores

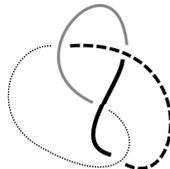


Figura 17: El nudo  $4_1$  puede colorearse con tres colores solamente de forma trivial.

EJEMPLO 3.1. Las figuras 16 y 17 nos muestran dos caras del mismo fenómeno: el nudo  $3_1$  tiene coloraciones no triviales con tres colores, y el nudo  $4_1$  no. Vemos entonces que la coloración con tres colores nos permite distinguir el nudo  $3_1$  del nudo trivial y del nudo  $4_1$ . Sin embargo, no nos permite determinar si el nudo  $4_1$  es trivial.

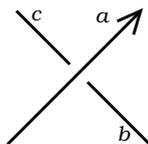


Figura 18: Un cruce como este se colorea con la ecuación  $2a - b - c = 0$ .

Vamos a profundizar un poco en la idea de colorear con tres colores. Supongamos que nuestros colores son los elementos de  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  y que  $K$  es un nudo con  $n$  cruces. Si etiquetamos los arcos del nudo  $K$  con los elementos de  $\mathbb{Z}_3$  vemos que la condición que define coloraciones por tres colores puede traducirse en términos de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales que tiene una ecuación por cada cruce del diagrama. Para ser más precisos, la ecuación que corresponde al cruce de la figura 18 es  $a + b + c = 0$ , donde  $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ . Observemos que esta ecuación puede reescribirse como

$$2a - b - c = 0, \tag{1}$$

donde el segmento que pasa por arriba está coloreado con el color  $a$ .

Cada coloración del nudo  $K$  será una solución del sistema de ecuaciones formado por una ecuación análoga a (1) por cada cruce. En particular, una coloración no trivial será una solución que involucre todos los elementos de  $\mathbb{Z}_3$ .

EJEMPLO 3.2. Si etiquetamos con  $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$  los arcos del diagrama del nudo  $3_1$  que vemos en la figura 16, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema de la coloración con tres colores es el siguiente:

$$\begin{cases} 2a - b - c = 0, \\ -a - b + 2c = 0, \\ -a + 2b - c = 0. \end{cases}$$

La cantidad de coloraciones con tres colores del nudo  $3_1$  es entonces la cantidad de vectores que tiene el núcleo de la *matriz de coloraciones* del nudo:

$$C(3_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3 \times 3}.$$

Como esta matriz tiene rango uno, el núcleo es un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{Z}_3$ ) de dimensión dos. Esto implica que el núcleo tiene nueve elementos, y por lo tanto el nudo  $3_1$  tiene nueve coloraciones con tres colores (de los cuales seis son no triviales).

En 1956 Fox definió una generalización de la coloración con tres colores. Sea  $p > 2$  un número primo. Diremos que un nudo admite una *coloración de Fox con  $p$  colores* si cada arco puede etiquetarse con un elemento de  $\mathbb{Z}_p = \{0, \dots, p - 1\}$  de forma tal que en cada cruce como el que vemos en la figura 18 se cumple la ecuación

$$2a - b - c = 0,$$

donde  $a, b, c \in \mathbb{Z}_p$ . Tal como se hizo en el ejemplo 3.2, estudiar coloraciones de Fox con  $p$  colores es equivalente a estudiar el núcleo de la matriz de coloraciones vista como matriz con coeficientes en  $\mathbb{Z}_p$ .

**TEOREMA 3.3.** *Sea  $p > 2$  un número primo. La cantidad de coloraciones de Fox con  $p$  colores es un invariante de nudos.*

**DEMOSTRACIÓN.** Fijemos un diagrama y una coloración de Fox del diagrama. Como vemos en la figura 19, la cantidad de coloraciones no se altera al aplicar el primer movimiento de Reidemeister ya que  $b = 2a - a = a$ .

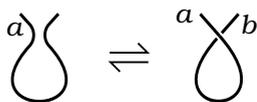


Figura 19: La coloración de Fox da un invariante por el primer movimiento de Reidemeister pues  $b = 2a - a = a$ .

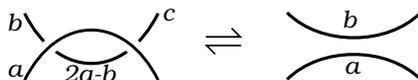


Figura 20: La coloración de Fox da un invariante por el segundo movimiento de Reidemeister pues  $c = 2a - (2a - b) = b$ .



Ralph Fox (1913–1973).

La figura 20 nos muestra que la cantidad de coloraciones de Fox no se altera al aplicar el segundo movimiento de Reidemeister, pues se tiene que  $c = 2a - (2a - b) = b$ .

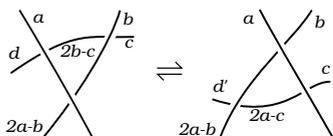


Figura 21: La coloración de Fox da un invariante bajo el tercer movimiento de Reidemeister pues  $d = d'$ .

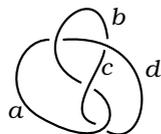


Figura 22: Una coloración del nudo  $4_1$ .

La figura 21 prueba que la cantidad de coloraciones es invariante bajo el tercer movimiento de Reidemeister pues, como  $d = 2a - (2b - c)$  y  $d' = 2(2a - b) - (2a - c)$ , se tiene que  $d = d'$ .

Hemos probado, entonces, que existe una biyección entre las coloraciones antes y después de aplicar los movimientos de Reidemeister. Luego la cantidad de coloraciones de Fox es un invariante de nudos.  $\square$

**EJEMPLO 3.4.** Estudiemos algunas coloraciones del nudo  $4_1$ . Fijemos un número primo  $p > 2$ . Si los arcos del nudo  $4_1$  están etiquetados con  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_p$  tal como vemos en la figura 22, el sistema de ecuaciones que resuelve el problema de la coloración de Fox con  $p$  colores es

$$\begin{cases} -a + 2b - d = 0, \\ -a - b + 2c = 0, \\ 2a - c - d = 0, \\ -b - c + 2d = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Como vimos en el ejemplo 3.1, la matriz asociada al sistema (2) es lo que denominamos la matriz de coloraciones del nudo  $4_1$ :

$$C(4_1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{4 \times 4}.$$

Un cálculo elemental nos muestra que

$$\dim \ker C(4_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 3, \\ 2 & \text{si } p = 5. \end{cases}$$

Esto nos dice dos cosas: primero, que  $4_1$  no puede colorearse de forma no trivial con tres colores; y, segundo, que  $4_1$  admite al menos una coloración de Fox no trivial con cinco colores. Luego el nudo  $4_1$  no es equivalente al nudo trivial.

**EJERCICIO 3.5.** Sean  $p > 2$  un número primo y  $K$  un nudo con  $n$  cruces. Pruebe que la cantidad de coloraciones de Fox con  $p$  colores que tiene  $K$  es  $p^m$  para algún  $m \leq n$ .

EJERCICIO 3.6. El cuadro 1 muestra cuáles de los nudos de la figura 14 admiten coloraciones de Fox no triviales para  $p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17\}$ . ¿Qué conclusiones puede obtener?

	3	5	7	11	13	17
$3_1$	✓					
$4_1$		✓				
$5_1$		✓				
$5_2$			✓			
$6_1$	✓					
$6_2$				✓		
$6_3$					✓	
$7_1$			✓			
$7_2$				✓		
$7_3$					✓	
$7_4$	✓	✓				
$7_5$						✓

Cuadro 1: Algunas coloraciones de Fox para los nudos de la figura 14.

#### 4. EL GRUPO FUNDAMENTAL DE UN NUDO

En esta sección definiremos el grupo fundamental de un nudo y mostraremos que esta construcción da un buen invariante. Para una exposición detallada sobre las nociones básicas respecto del grupo fundamental de un nudo remitimos a [6].

DEFINICIÓN 4.1. El *grupo fundamental*  $\pi_1(K)$  del nudo  $K$  es el grupo de homotopía  $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ .

Veamos cómo calcular el grupo fundamental de un nudo. Supongamos que  $K$  es un nudo con  $n$  cruces. Etiquetamos los arcos con las variables  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Como se ve en la figura 23, el diagrama tendrá dos tipos de cruce: cruces positivos y cruces negativos. Por cada cruce  $\chi$  del diagrama como el que vemos en la figura 23, consideramos la *relación de Wirtinger*  $r_\chi = 1$ , donde  $r_\chi = a_i a_j a_i^{-1} a_k^{-1}$ . Como nos indica el siguiente teorema, el grupo fundamental de  $K$  es isomorfo al grupo dado por los generadores  $a_1, a_2, a_3, \dots$  y las relaciones de Wirtinger. Esta presentación del grupo fundamental se conoce como *presentación de Wirtinger*.

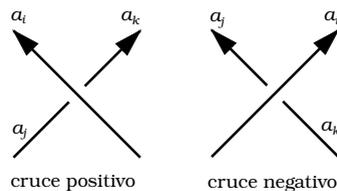


Figura 23: Una orientación da dos tipos de cruce. En ambos casos, la relación de Wirtinger es  $a_i a_j a_i^{-1} = a_k$ .

TEOREMA 4.2 (Wirtinger). *Sea  $K$  un nudo y supongamos que  $K$  tiene una proyección con  $n$  arcos y  $m$  cruces. Entonces*

$$\pi_1(K) \simeq \langle a_1, a_2, \dots, a_n : r_1, r_2, \dots, r_m \rangle, \quad (3)$$

donde las relaciones  $r_1, \dots, r_m$  están dadas por las fórmulas de Wirtinger. La ecuación (3) simboliza el cociente grupo libre en  $a_1, \dots, a_n$  por el menor subgrupo normal que contiene a los elementos  $r_1, \dots, r_m$ .

EJERCICIO 4.3. Pruebe que el grupo fundamental del nudo trivial es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

En 1915 Dehn demostró que el grupo fundamental permite detectar la trivialidad de un nudo. Más precisamente, el teorema de Dehn establece que un nudo es trivial si y sólo si el grupo fundamental del nudo es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Es importante remarcar que, en general, es muy difícil determinar si un grupo finitamente presentado es isomorfo al grupo trivial.



De izquierda a derecha, Wilhelm Wirtinger (1865–1945), Max Dehn (1878–1952) y Heinrich Tietze (1880–1964).

EJEMPLO 4.4. Vamos a calcular el grupo fundamental del nudo  $3_1$  que vemos en la figura 24. Las relaciones de Wirtinger son

$$a_1 a_2 a_1^{-1} = a_3, \quad a_2 a_3 a_2^{-1} = a_1, \quad a_3 a_1 a_3^{-1} = a_2,$$

y, entonces,

$$\pi_1(3_1) \simeq \langle a_1, a_2, a_3 : a_1 a_2 a_1^{-1} = a_3, a_2 a_3 a_2^{-1} = a_1, a_3 a_1 a_3^{-1} = a_2 \rangle.$$

Vamos a utilizar el grupo  $\pi_1(3_1)$  para dar otra demostración de la no trivialidad de  $3_1$ . Como existe un morfismo suprayectivo de grupos  $\pi_1(3_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$  tal que

$$a_1 \mapsto (12), \quad a_2 \mapsto (23), \quad a_3 \mapsto (13),$$

y el grupo simétrico  $\mathbb{S}_3$  no es abeliano, se sigue que  $\pi_1(3_1)$  es un grupo no abeliano. En particular,  $\pi_1(3_1) \not\simeq \mathbb{Z}$  y entonces el nudo  $3_1$  no es equivalente al nudo trivial.

EJERCICIO 4.5. Sea  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Recordemos que el grupo de trenzas  $\mathbb{B}_n$  se define como el grupo dado por los generadores  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  y las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{para todo } i \in \{1, \dots, n-2\}, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{para todo par } i, j \text{ tal que } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Pruebe que  $\pi_1(3_1) \simeq \mathbb{B}_3$ .

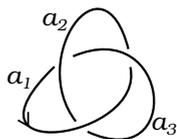


Figura 24: El grupo fundamental de  $3_1$  es isomorfo al grupo de trenzas  $\mathbb{B}_3$ .

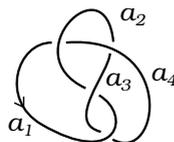


Figura 25: El grupo fundamental de  $4_1$  no es un grupo abeliano.

Tietze, en 1908, fue el primero en calcular el grupo fundamental del nudo  $3_1$ . Ese mismo año conjeturó que dos nudos son equivalentes si y sólo si sus complementos en  $\mathbb{R}^3$  son homeomorfos. Muchos años después, en 1989, Gordon y Luecke probaron esta afirmación [7]. Como consecuencia del teorema de Gordon y Luecke puede probarse que dos nudos primos son equivalentes si y sólo si sus grupos fundamentales son isomorfos.

EJEMPLO 4.6. Calculemos el grupo fundamental del nudo  $4_1$  de la figura 25. El diagrama tiene dos cruces positivos y dos negativos. Las relaciones de Wirtinger son:

$$a_4 = a_1 a_3 a_1^{-1}, \quad a_2 = a_3 a_1 a_3^{-1}, \quad a_1 = a_2^{-1} a_4 a_2, \quad a_3 = a_4^{-1} a_2 a_4.$$

Puede demostrarse que

$$\pi_1(4_1) \simeq \langle x, y \mid xyx^{-1}yx = yxy^{-1}xy \rangle.$$

Vamos a utilizar el grupo  $\pi_1(4_1)$  para dar otra demostración de la no trivialidad del nudo  $4_1$ . Consideremos el morfismo  $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$  dado por

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como las imágenes de  $x$  y de  $y$  no conmutan, se sigue que  $\pi_1(4_1)$  no es abeliano. En particular,  $\pi_1(4_1) \not\cong \mathbb{Z}$  y entonces  $4_1$  no es el nudo trivial.

EJEMPLO 4.7. Ahora vamos a utilizar  $\pi_1(4_1)$  para demostrar que los nudos  $3_1$  y  $4_1$  no son equivalentes. Por lo visto en el ejemplo 4.4, si los grupos  $\pi_1(4_1)$  y  $\pi_1(3_1)$  fueran isomorfos, existiría un epimorfismo  $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$ . Sin embargo, un cálculo directo muestra que ningún morfismo  $\pi_1(4_1) \rightarrow \mathbb{S}_3$  es sobreyectivo.

EJERCICIO 4.8. En la figura 15 vimos dos nudos compuestos: el nudo de la abuela y el nudo cuadrado. Pruebe que estos nudos tienen grupos fundamentales isomorfos.

Como veremos más adelante, el nudo de la abuela y el nudo cuadrado no son equivalentes. Luego el grupo fundamental de un nudo es un buen invariante pero no es infalible, es decir: existen nudos no equivalentes con grupos fundamentales isomorfos.

## 5. QUANDLES

Sabemos que, gracias a los movimientos de Reidemeister, el problema de distinguir nudos puede formularse en términos de combinatoria. En esta sección vamos a definir el *quandle* fundamental de un nudo y vamos a probar que es un invariante que generaliza al grupo fundamental y a los invariantes por coloraciones.



Algunos de los fundadores de la teoría de quandles. De izquierda a derecha, John Conway, Gavin Wraith, David Joyce y Egbert Brieskorn.



James Alexander (1888–1971).

Los quandles son estructuras algebraicas que modelan la conjugación en un grupo. La primera aparición de una familia de quandles se produjo en 1943 cuando Mituhisa Takasaki introdujo los quandles involutivos —los llamó *keis*— con el fin de entender las reflexiones. En 1959, los matemáticos ingleses John Conway y Gavin Wraith, después de un interesante intercambio de cartas e ideas, definieron los *wracks*. La idea de Conway y Wraith es que un *wrack* (hoy llamado simplemente *pecio* o *rack* en inglés) es esencialmente lo que queda de un grupo una vez que uno olvida la multiplicación y se preocupa únicamente por la conjugación. En 1982 Joyce introdujo los *quandles* con el fin de producir invariantes de nudos. Inspirado en la presentación de Wirtin-

ger del grupo fundamental de un nudo, Joyce construyó el *quandle fundamental* de un nudo y probó que esta construcción da un buen invariante de nudos no orientados. Ese mismo año, y de forma independiente, Sergei Matveev también introdujo los quandles —que él llamó *grupoides distributivos*— y probó un resultado similar al de Joyce. En 1988, para estudiar ciertos aspectos de la teoría de singularidades de

curvas, el matemático alemán Egbert Brieskorn introdujo una estructura equivalente a la de Conway y Wraith: los *automorphic sets*.

DEFINICIÓN 5.1. Un *quandle* es un par  $(X, \triangleright)$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío con una operación binaria  $X \times X \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x \triangleright y$ , tal que

$$\begin{aligned} \varphi_x: X &\rightarrow X, y \mapsto x \triangleright y \text{ es biyectiva} && \text{para todo } x \in X, \\ x \triangleright (y \triangleright z) &= (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) && \text{para todo } x, y, z \in X, \\ x \triangleright x &= x && \text{para todo } x \in X. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5.2. Sea  $G$  un grupo. Entonces  $G$  con  $x \triangleright y = xyx^{-1}$  es un quandle.

Utilizaremos la siguiente notación:  $x \triangleright^{-1} y = \varphi_x^{-1}(y)$ .

El artículo de Joyce utiliza una definición de quandle levemente distinta a la que damos en este artículo, ya que Joyce usa acciones a derecha y no acciones a izquierda.

DEFINICIÓN 5.3. Sean  $X$  e  $Y$  dos quandles. Una función  $f: X \rightarrow Y$  es un *morfismo* de quandles si  $f(x \triangleright x') = f(x) \triangleright f(x')$  para todo  $x, x' \in X$ .

EJEMPLO 5.4. Sea  $X$  un conjunto no vacío. Entonces  $X$  es un quandle con  $x \triangleright y = y$  para todo  $x, y \in X$ . Este quandle se denomina *quandle trivial* sobre  $X$ .

EJEMPLO 5.5. Sean  $G$  un grupo y  $X$  una clase de conjugación de  $G$ . Entonces  $X$  es un quandle con  $x \triangleright y = xyx^{-1}$  para todo  $x, y \in X$ . El quandle asociado a la clase de conjugación de  $g$  en  $G$  se llama *quandle de conjugación* asociado a (la clase de)  $g$  en  $G$ .

EJERCICIO 5.6. Si  $X$  es un quandle de conjugación, entonces

$$x \triangleright y = y \iff y \triangleright x = x \quad \text{para todo } x, y \in X. \tag{4}$$

Encuentre un quandle de tres elementos que no cumpla con la condición (4).

EJERCICIO 5.7. Sea  $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ . Pruebe que  $\mathbb{Z}_n$  es un quandle con  $x \triangleright y = 2x - y$  para todo  $x, y \in \mathbb{Z}_n$ . Este quandle se denomina *quandle diedral* y se denota por  $\mathbb{D}_n$ .

EJEMPLO 5.8. Sea  $M$  un  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -módulo a izquierda. Definimos el *quandle de Alexander* sobre  $M$  como el quandle dado por

$$x \triangleright y = (1 - t)x + ty \quad \text{para todo } x, y \in M. \tag{5}$$

Demostremos que la acción (5) define una estructura de quandle sobre  $M$ . Es evidente que para cada  $x \in M$  la función  $\varphi_x: y \mapsto (1 - t)x + ty$  es inversible y la inversa  $\varphi_x^{-1}$  está dada por  $y \mapsto (1 - t^{-1})x + t^{-1}y$ . Además  $x \triangleright x = x$  para todo  $x \in X$ . Para demostrar la distributividad, tomamos  $x, y, z \in M$  y calculamos

$$\begin{aligned} (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z) &= ((1 - t)x + ty) \triangleright ((1 - t)x + tz) \\ &= (1 - t) ((1 - t)x + ty) + t ((1 - t)x + tz) \\ &= (1 - t)x + t(1 - t)y + t^2z \\ &= (1 - t)x + t(y \triangleright z) \\ &= x \triangleright (y \triangleright z). \end{aligned}$$

Veamos un caso particular de la construcción del quandle de Alexander.

EJEMPLO 5.9. Sea  $\mathbb{F}_q$  el cuerpo de  $q$  elementos, donde  $q$  es una potencia de un número primo. Para cada  $\alpha \in \mathbb{F}_q \setminus \{0\}$  definimos el *quandle de Alexander* de tipo  $(q, \alpha)$  como el quandle sobre  $\mathbb{F}_q$  dado por  $x \triangleright y = (1 - \alpha)x + \alpha y$  para todo  $x, y \in \mathbb{F}_q$ .

EJERCICIO 5.10. Pruebe que el quandle de conjugación asociado a la clase de (123) en  $\mathbb{A}_4$  es isomorfo a un quandle de Alexander.

Así como puede calcularse el grupo fundamental de un nudo gracias a la presentación de Wirtinger, es posible considerar el quandle fundamental de un nudo. Supongamos que  $K$  es un nudo con  $n$  arcos y  $m$  cruces. Como hicimos con las relaciones de Wirtinger, etiquetamos los arcos de la proyección con las variables  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . En cada cruce  $\chi$  como el que vemos en la figura 23 consideramos la relación

$$r_\chi : a_i \triangleright a_j = a_k. \tag{6}$$

DEFINICIÓN 5.11. El *quandle fundamental* del nudo  $K$  es el quandle

$$Q(K) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n : r_1, \dots, r_m \rangle,$$

donde las relaciones  $r_1, \dots, r_m$  están dadas por las fórmulas (6).

EJEMPLO 5.12. El quandle fundamental del nudo  $3_1$  de la figura 24 es

$$Q(3_1) = \langle a_1, a_2, a_3 : a_1 \triangleright a_2 = a_3, a_2 \triangleright a_3 = a_1, a_3 \triangleright a_1 = a_2 \rangle.$$

EJEMPLO 5.13. En el ejemplo 4.6 calculamos el grupo fundamental del nudo  $4_1$ . El quandle fundamental del nudo  $4_1$  de la figura 25 es

$$Q(4_1) = \langle a_1, \dots, a_4 : a_1 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_1 = a_4, a_4 \triangleright a_3 = a_2 \rangle.$$

Observemos que las dos primeras relaciones corresponden a cruces positivos y las dos últimas a cruces negativos.



Figura 26: Las configuraciones posibles en el primer movimiento de Reidemeister.

No es difícil demostrar que el quandle fundamental de un nudo queda invariante por los movimientos de Reidemeister. La demostración es apenas más complicada que la del teorema 3.3. La diferencia está en que ahora habrá más diagramas de Reidemeister para verificar, pues deben considerarse todas las configuraciones posibles con respecto a la orientación del nudo. Para

el primer movimiento de Reidemeister deben verificarse los diagramas de la figura 26. Las posibles configuraciones que pueden aparecer en el segundo movimiento de Reidemeister se muestran en la figura 27. Finalmente, para el tercer movimiento hay ocho posibles diagramas. Por ejemplo, la condición a verificar en la figura 28 es

$$a \triangleright^{-1} (b \triangleright c) = (a \triangleright^{-1} b) \triangleright (a \triangleright^{-1} c),$$

que es consecuencia de la definición 5.1.

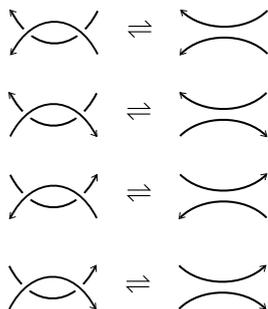


Figura 27: Las cuatro configuraciones posibles en el segundo movimiento de Reidemeister.

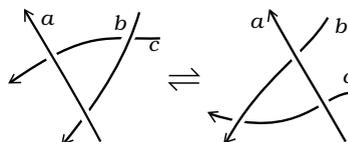


Figura 28: Una de las configuraciones posibles para el tercer movimiento de Reidemeister.

TEOREMA 5.14 (Matveev). Si  $K$  y  $L$  son dos nudos, entonces  $Q(K) \simeq Q(L)$  si y sólo si  $L = K$  o  $L = rm(K)$ , donde  $rm(K) = r(m(K))$  es el reverso de la imagen especular de  $K$ .

DEMOSTRACIÓN. Para la demostración remitimos a [10]. □

Sea  $X$  un quandle. El grupo envolvente de  $X$  es el grupo

$$G_X = F_X / \langle xy = (x \triangleright y)x, x, y \in X \rangle,$$

donde  $F_X$  es el grupo libre con base en los elementos de  $X$ .

TEOREMA 5.15 (Joyce).  $G_{Q(K)} \simeq \pi_1(K)$  para todo nudo  $K$ .

DEMOSTRACIÓN. La demostración aparece en [9]. □

Es importante remarcar que el problema de determinar si dos grupos o dos quandles son isomorfos es, en general, muy difícil de resolver.

### 6. EJEMPLOS DE QUANDLES FUNDAMENTALES

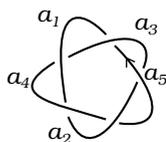


Figura 29:  $5_1$ .

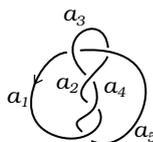


Figura 30:  $5_2$ .

Consideremos el nudo  $5_1$  de la figura 29. Todos los cruces del diagrama son positivos y el quandle fundamental de  $5_1$  es

$$Q(5_1) = \langle a_1, \dots, a_5 : a_1 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_5 = a_1 \rangle.$$

Consideremos ahora el nudo  $5_2$  de la figura 30. Todos los cruces del diagrama son positivos y entonces el quandle fundamental  $Q(5_2)$  es

$$Q(5_2) = \langle a_1, \dots, a_5 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_4 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_5 = a_1 \rangle.$$

El quandle fundamental  $Q(6_1)$  del nudo  $6_1$  de la figura 31 es

$$Q(6_1) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_5 \triangleright a_2 = a_3, a_4 \triangleright a_1 = a_6, a_6 \triangleright a_5 = a_4 \rangle,$$

donde las ecuaciones  $a_2 \triangleright a_5 = a_6$  y  $a_5 \triangleright a_2 = a_3$  corresponden a los únicos cruces positivos. El quandle fundamental del nudo  $6_2$  tal como lo vemos en la figura 32 es

$$Q(6_2) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_3 = a_2, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_6 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_1 = a_2, a_4 \triangleright a_6 = a_1 \rangle,$$

donde las ecuaciones  $a_5 \triangleright a_3 = a_2$  y  $a_2 \triangleright a_6 = a_5$  corresponden a los únicos cruces positivos del diagrama. Por último, el quandle fundamental del nudo  $6_3$  de la figura 33 es

$$Q(6_3) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_5 = a_4, a_5 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_1, a_4 \triangleright a_6 = a_5 \rangle, \quad (7)$$

donde las ecuaciones  $a_2 \triangleright a_3 = a_4$ ,  $a_6 \triangleright a_2 = a_3$  y  $a_3 \triangleright a_6 = a_1$  corresponden a los únicos cruces positivos del diagrama.

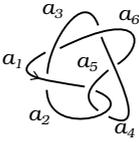


Figura 31:  $6_1$ .

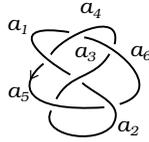


Figura 32:  $6_2$ .



Figura 33:  $6_3$ .

Presentemos los quandles fundamentales de los nudos de las figuras 34 a 40. Un cálculo directo muestra que

$$Q(7_1) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_7 = a_1 \rangle,$$

donde todos los cruces involucrados son positivos. Similarmente,

$$Q(7_2) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_5 \triangleright a_7 = a_6, a_7 \triangleright a_5 = a_4, a_4 \triangleright a_1 = a_7, a_6 \triangleright a_3 = a_2 \rangle,$$

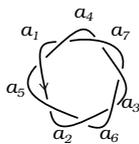


Figura 34:  $7_1$ .

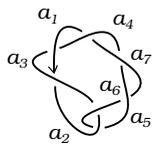


Figura 35:  $7_2$ .

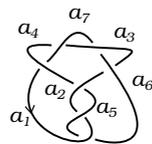


Figura 36:  $7_3$ .

donde todos los cruces son negativos.

Para el nudo  $7_3$  tenemos

$$Q(7_3) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_5 = a_6, a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, \\ a_6 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_3 = a_4, a_4 \triangleright a_7 = a_1 \rangle,$$

donde todos los cruces son positivos. Para el nudo  $7_4$  se tiene

$$Q(7_4) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_5 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_4 = a_5, a_4 \triangleright a_1 = a_7, \\ a_6 \triangleright a_3 = a_4, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_7 \triangleright a_2 = a_3, a_1 \triangleright a_5 = a_6 \rangle,$$

donde la ecuación  $a_4 \triangleright a_1 = a_7$  corresponde al único cruce negativo que tiene el diagrama. Para el nudo  $7_5$  se obtiene

$$Q(7_5) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_3, a_5 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_7 \triangleright a_3 = a_2, a_3 \triangleright a_1 = a_7, a_4 \triangleright a_7 = a_6, a_6 \triangleright a_4 = a_5 \rangle,$$

donde la ecuación  $a_6 \triangleright a_4 = a_5$  corresponde al único cruce negativo del diagrama. Para el nudo  $7_6$  tenemos

$$Q(7_6) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_6 \triangleright a_2 = a_1, a_4 \triangleright a_3 = a_2, a_2 \triangleright a_6 = a_5, \\ a_3 \triangleright a_1 = a_7, a_1 \triangleright a_2 = a_3, a_7 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_6 = a_7 \rangle,$$

donde las relaciones  $a_1 \triangleright a_2 = a_3$ ,  $a_7 \triangleright a_4 = a_5$  y  $a_5 \triangleright a_6 = a_7$  corresponden a los cruces positivos del diagrama. Finalmente, el quandle fundamental del nudo  $7_7$  es

$$Q(7_7) = \langle a_1, \dots, a_7 : a_1 \triangleright a_4 = a_5, a_6 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_4 = a_3, \\ a_7 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_6 = a_7, a_5 \triangleright a_7 = a_1, a_4 \triangleright a_6 = a_5 \rangle,$$

donde las relaciones  $a_6 \triangleright a_2 = a_1$ ,  $a_2 \triangleright a_4 = a_3$  y  $a_4 \triangleright a_6 = a_5$  son las que corresponden a los cruces negativos del diagrama.

Presentemos el quandle fundamental de la imagen especular del nudo  $3_1$ , que vemos en la figura 41. El diagrama tiene tres cruces negativos y el quandle fundamental es

$$Q(m(3_1)) = \langle a_1, a_2, a_3 : a_3 \triangleright a_2 = a_1, a_2 \triangleright a_1 = a_3, a_1 \triangleright a_3 = a_2 \rangle.$$

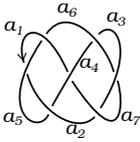


Figura 37: 7<sub>4</sub>.

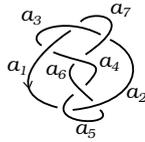


Figura 38: 7<sub>5</sub>.

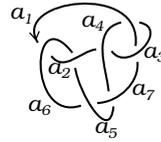


Figura 39: 7<sub>6</sub>.

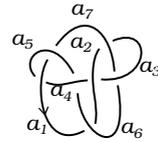


Figura 40: 7<sub>7</sub>.

La figura 42 muestra el nudo de la abuela y la figura 43 el nudo cuadrado. Un cálculo sencillo muestra que el quandle fundamental del nudo de la abuela es

$$Q(3_1 \# 3_1) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_1 \triangleright a_5 = a_6, a_6 \triangleright a_1 = a_2, a_2 \triangleright a_3 = a_4, \\ a_4 \triangleright a_2 = a_3, a_3 \triangleright a_4 = a_5, a_5 \triangleright a_6 = a_1 \rangle,$$

donde todas las ecuaciones corresponden a cruces positivos, y que el quandle fundamental del nudo cuadrado es

$$Q(3_1 \# m(3_1)) = \langle a_1, \dots, a_6 : a_5 \triangleright a_6 = a_1, a_1 \triangleright a_5 = a_6, \\ a_6 \triangleright a_1 = a_2, a_4 \triangleright a_3 = a_2, a_3 \triangleright a_5 = a_4, a_5 \triangleright a_4 = a_3 \rangle,$$

donde las tres primeras ecuaciones corresponden a los cruces positivos y las tres últimas a los cruces negativos.

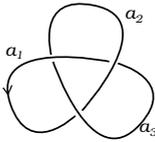


Figura 41: El nudo  $m(3_1)$ .

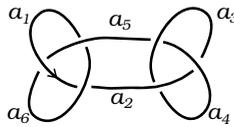


Figura 42:  $3_1 \# 3_1$ .

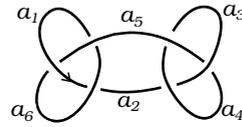


Figura 43:  $3_1 \# m(3_1)$ .

## 7. COLORACIONES GENERALIZADAS

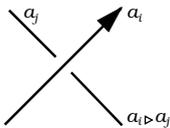


Figura 44: La regla para colorear con un quandle. Nótese que  $a_i \triangleright a_j = a_k$  si y sólo si  $a_i \triangleright^{-1} a_k = a_j$ .

Si etiquetamos los arcos de un nudo con los elementos de un quandle  $X$  de forma tal que en cada cruce se cumplan las relaciones que mencionamos en la sección 5 o, equivalentemente, en la figura 44, la cantidad de formas en que pueden ponerse esas etiquetas quedará invariante después de aplicar movimientos de Reidemeister. Esto nos permite «colorear» nudos de forma abstracta, donde ahora los «colores» son en realidad los elementos del quandle  $X$ .

DEFINICIÓN 7.1. Una *coloración* del nudo  $K$  con el quandle  $X$  es un morfismo de quandles  $Q(K) \rightarrow X$ .

Por lo dicho anteriormente, la cantidad de morfismos  $Q(K) \rightarrow X$  es un invariante de nudos. Este invariante se denota por  $\text{Col}_X(K)$ . Observemos que siempre existirán al menos  $|X|$  coloraciones del nudo  $K$  con el quandle  $X$  (las coloraciones triviales).

**EJEMPLO 7.2.** El número coloraciones con tres colores se puede interpretar como el invariante asociado al quandle  $\mathbb{D}_3$ . Podemos ver la coloración de Fox con  $p$  colores como la coloración asociada al quandle  $\mathbb{D}_p$ .

**EJEMPLO 7.3.** Veamos que el nudo  $4_1$  puede colorearse de forma no trivial con un quandle de Alexander. Consideremos el cuerpo

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\},$$

y sea  $X$  el quandle de Alexander de tipo  $(4, \alpha)$ . Vimos en el ejemplo 3.4 que las coloraciones con  $X$  del diagrama de la figura 25 son las soluciones  $(a, b, c, d) \in \mathbb{F}_4$  del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)a + \alpha c &= d, & (1 - \alpha)b + \alpha a &= d, \\ (1 - \alpha)c + \alpha a &= b, & (1 - \alpha)d + \alpha c &= b. \end{aligned} \tag{8}$$

Como  $(a, b, c, d) = (0, 1, \alpha, \alpha + 1)$  es una solución de (8), el nudo  $4_1$  admite entonces al menos una coloración con  $X$  no trivial. Tenemos así otra demostración de la no trivialidad del nudo  $4_1$ .

**EJERCICIO 7.4.** Pruebe que el quandle de conjugación asociado a la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  de  $\mathbf{SL}(2, \mathbb{Z}_3)$  es isomorfo al quandle de Alexander de tipo  $(4, \alpha)$  visto en el ejemplo 7.3. De alguna forma, habíamos utilizado este quandle en el ejemplo 4.6.

**EJEMPLO 7.5.** En la sección 6 presentamos el quandle fundamental  $Q(5_1)$ . Sea  $X$  el quandle de conjugación asociado a  $(12345)$  en  $\mathbb{A}_5$ . Un cálculo sencillo muestra que la función  $Q(5_1) \rightarrow X$  definida por

$$a_1 \mapsto (15432), \quad a_2 \mapsto (12453), \quad a_3 \mapsto (14352), \quad a_4 \mapsto (15324), \quad a_5 \mapsto (14523)$$

es un morfismo de quandles. Esta función nos permite «colorear» el nudo  $5_1$  con los 5-ciclos del grupo alternado  $\mathbb{A}_5$ .

**EJEMPLO 7.6.** En la sección 6 mostramos las relaciones que definen el quandle fundamental del nudo  $6_3$ . Estas relaciones nos permiten demostrar, por ejemplo, que este nudo puede colorearse de forma no trivial con el quandle de Alexander de tipo  $(7, 2)$ . En efecto, si traducimos (7) a un sistema de ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned} -a_1 + 2a_5 &= a_4, & -a_5 + 2a_2 &= a_1, & -a_2 + 2a_3 &= a_4, \\ -a_6 + 2a_2 &= a_3, & -a_3 + 2a_6 &= a_1, & -a_4 + 2a_6 &= a_5. \end{aligned} \tag{9}$$

Como  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = (1, 2, 0, 5, 3, 4)$  es una solución de (9), el nudo  $6_3$  puede colorearse de forma no trivial con el quandle de Alexander de tipo  $(7, 2)$ . Observemos que si  $X$  es el quandle de Alexander de tipo  $(7, 2)$ , entonces la función  $Q(K) \rightarrow X$  dada por

$$a_1 \mapsto 1, \quad a_2 \mapsto 2, \quad a_3 \mapsto 0, \quad a_4 \mapsto 5, \quad a_5 \mapsto 3, \quad a_6 \mapsto 6$$

es un morfismo de quandles.

EJERCICIO 7.7. Pruebe que el quandle de Alexander de tipo  $(4, \alpha)$  definido sobre el cuerpo  $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$  permite distinguir los siguientes pares de nudos: a)  $3_1$  y  $6_1$ ; b)  $4_1$  y  $5_1$ ; c)  $6_2$  y  $7_2$ ; d)  $6_3$  y  $7_3$ .

EJERCICIO 7.8. Pruebe que con una clase de conjugación del grupo alternado  $\mathbb{A}_5$  es posible distinguir los nudos  $5_2$  y  $7_1$ .

EJERCICIO 7.9. Utilice los resultados de los ejercicios 3.6, 7.7 y 7.8 y demuestre que todos los nudos de la figura 14 son no triviales y distintos.

Sea  $A$  un grupo abeliano (escrito multiplicativamente), sea  $X$  un quandle, y sea  $f: X \times X \rightarrow A$  una función. Sobre el conjunto  $X \times A$  definimos la operación

$$(x, a) \triangleright (y, b) = (x \triangleright y, bf(x, y)) \quad \text{para todo } (x, a), (y, b) \in X \times A. \quad (10)$$

Es fácil demostrar que la operación (10) define una estructura de quandle sobre  $X \times A$  si y sólo si

$$f(x, x) = 1, \quad \text{para todo } x \in X, \quad (11)$$

$$f(x, z)f(x \triangleright y, x \triangleright z) = f(y, z)f(x, y \triangleright z), \quad \text{para todo } x, y, z \in X. \quad (12)$$

Como ejemplo, demostremos la distributividad. Sean  $x, y, z \in X$  y  $a, b, c \in A$ . Un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned} (x, a) \triangleright ((y, b) \triangleright (c, z)) &= (x, a) \triangleright (y \triangleright z, cf(y, z)) \\ &= (x \triangleright (y \triangleright z), cf(y, z)f(x, y \triangleright z)), \end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned} ((x, a) \triangleright (y, b)) \triangleright ((x, a) \triangleright (c, z)) &= (x \triangleright y, bf(x, y)) \triangleright (x \triangleright z, cf(x, z)) \\ &= ((x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)), cf(x, z)f(x \triangleright y, x \triangleright z)). \end{aligned}$$

Como  $X$  es un quandle, tenemos entonces que la condición (12) es equivalente a la distributividad de la operación binaria en  $X \times A$ .

DEFINICIÓN 7.10. Una función  $f: X \times X \rightarrow A$  que satisface las condiciones (11) y (12) se llama *2-cociclo del quandle*  $X$  con coeficientes en  $A$ .

DEFINICIÓN 7.11. El quandle sobre  $X \times A$  obtenido con la operación (10) se llama *extensión abeliana* de  $X$  por el grupo abeliano  $A$  y el 2-cociclo  $f$ , y se denota por  $X \times_f A$ .

EJEMPLO 7.12. Supongamos que

$$\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2[\alpha]/(\alpha^2 + \alpha + 1) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1\}$$

y sea  $X$  el quandle de Alexander de tipo  $(4, \alpha)$ . Sea  $A = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma\}$  el grupo cíclico de orden dos. La función  $f: X \times X \rightarrow A$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \text{ o } x = 1 \text{ o } y = 1, \\ \sigma, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es un 2-cociclo de  $X$  con coeficientes en el grupo abeliano  $A$ .

EJEMPLO 7.13. Sea  $X$  el quandle de conjugación asociado a la clase de  $(1234)$  en  $\mathbb{S}_4$  y sea  $A = \langle \sigma \rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$  el grupo cíclico de orden cuatro (escrito multiplicativamente). La función  $f: X \times X \rightarrow A$  dada por la tabla

$f$	(1234)	(1432)	(1342)	(1243)	(1324)	(1423)
(1234)	1	$\sigma$	$\sigma^2$	$\sigma^2$	$\sigma$	$\sigma^3$
(1432)	$\sigma$	1	$\sigma^2$	1	$\sigma^3$	$\sigma^3$
(1342)	$\sigma^2$	$\sigma$	1	$\sigma$	$\sigma^2$	$\sigma^3$
(1243)	$\sigma^3$	$\sigma^2$	$\sigma$	1	1	$\sigma^3$
(1324)	$\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	$\sigma$	1	$\sigma$
(1423)	1	1	1	1	$\sigma$	1

es un 2-cociclo de  $X$  con coeficientes en  $A$ .

DEFINICIÓN 7.14. Un 2-cociclo  $f: X \times X \rightarrow A$  es un *coborde* si existe una función  $\gamma: X \rightarrow A$  tal que  $f(x, y) = \gamma(x \triangleright y)\gamma(y)^{-1}$  para todo  $x, y \in X$ . Dos 2-cociclos  $f$  y  $g$  son *cohomólogos* (o equivalentes) si existe  $\gamma: X \rightarrow A$  tal que

$$f(x, y) = \gamma(x \triangleright y)g(x, y)\gamma(y)^{-1}$$

para todo  $x, y \in X$ .

Cada 2-cociclo de un quandle  $X$  nos permite definir una extensión abeliana de  $X$ . Estos 2-cociclos son en realidad 2-cociclos en una teoría de cohomología de quandles [5]. Tal como pasa en la teoría de grupos, las clases de equivalencia de extensiones abelianas del quandle  $X$  por el grupo abeliano  $A$  están en correspondencia biyectiva con las clases de equivalencia de 2-cociclos de  $X$  con coeficientes en  $A$ . La teoría de extensiones abelianas de quandles tiene además aplicaciones a la teoría de nudos [4]. Para más información sobre la teorías de extensiones y (co)homologías de quandles remitimos a [2].

EJEMPLO 7.15. Recordemos el nudo de la abuela y el nudo cuadrado de la figura 15. En el ejercicio 4.8 vimos que estos nudos tienen grupos fundamentales isomorfos. Sin embargo, como veremos a continuación, estos nudos no son equivalentes. Sean  $X$  el quandle de conjugación asociado a la clase de  $(1234)$  en  $\mathbb{S}_4$  y  $f$  el 2-cociclo de  $X$  que vimos en el ejemplo 7.13. Consideremos la extensión  $X \times_f A$  dada por

$$(x, \sigma^i) \triangleright (y, \sigma^j) = (x \triangleright y, \sigma^j f(x, y)) \quad \text{para todo } x, y \in X, i, j \in \{0, \dots, 3\}.$$

La extensión abeliana  $X \times_f A$  nos permite distinguir el nudo de la abuela del nudo cuadrado. Un cálculo nos muestra que para el nudo de la abuela se tiene

$$\text{Col}_{X \times_f A}(3_1 \# 3_1) = 24, \tag{13}$$

y que para el nudo cuadrado, en cambio, se tiene

$$\text{Col}_{X \times_f A}(3_1 \# m(3_1)) = 408. \tag{14}$$

Vimos en el ejercicio 4.8 que el nudo de la abuela es trivial si y sólo si el nudo cuadrado lo es. Esta observación y las fórmulas (13) y (14) implican que estos nudos son no triviales y distintos.

## 8. INVARIANTES POR 2-COCICLOS

A fines del siglo XX, S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford y M. Saito anunciaron la construcción de un nuevo invariante de nudos: el invariante por 2-cociclos.

Fijemos un grupo abeliano  $A$  (escrito multiplicativamente) y un nudo  $K$ . Sean  $X$  un quandle finito,  $\mathcal{C}: Q(K) \rightarrow X$  una coloración de  $K$  y  $f: X \times X \rightarrow A$  un 2-cociclo de  $X$  con coeficientes en  $A$ . En cada cruce como el que vemos en la figura 23 se define el *peso de Boltzmann*  $\omega_f(\mathcal{C}, \chi)$  (con respecto a la coloración  $\mathcal{C}$ , al 2-cociclo  $f$  y al cruce  $\chi$ ) como el elemento de  $A$  dado por la expresión

$$\omega_f(\mathcal{C}, \chi) = f(a_i, a_j)^{\text{signo}(\chi)}.$$

DEFINICIÓN 8.1. La *función de partición*  $\Phi_{X,f}(K)$  del nudo  $K$  (asociada al quandle  $X$  y al 2-cociclo  $f$ ) es la expresión

$$\Phi_{X,f}(K) = \sum_{\mathcal{C}} \prod_{\chi} \omega_f(\mathcal{C}, \chi), \quad (15)$$

donde el producto se toma sobre todos los cruces  $\chi$  que tiene el diagrama del nudo  $K$  y la suma se toma sobre todas las coloraciones  $\mathcal{C}$  de  $K$  dadas por el quandle  $X$ .

La fórmula (15) define un elemento de  $\mathbb{Z}[A]$ , el anillo de grupo de  $A$ .

TEOREMA 8.2. *La función de partición  $\Phi_{X,f}$  es un invariante de nudos.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que demostrar que el producto de los pesos de Boltzmann es invariante bajo las versiones orientadas de los movimientos de Reidemeister.

Consideremos el primer movimiento de Reidemeister. Tal como muestra la figura 26, hay dos orientaciones posibles para tener en cuenta. En ambos casos, si suponemos que estas cuerdas llevan la etiqueta  $a \in X$ , entonces en el único cruce  $\chi$  que tiene el diagrama tendremos el valor  $f(a, a)^{\text{signo}(\chi)}$ . Como  $f$  es un 2-cociclo,  $f(a, a) = 1$ , luego el primer movimiento de Reidemeister deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann.

Consideremos ahora el segundo movimiento. Aquí tenemos cuatro posibles diagramas orientados, similares a los que se ve en la figura 27. Si etiquetamos la cuerda que pasa por arriba con  $a \in X$  y la cuerda entrante que pasa por debajo con  $b \in X$  entonces, como para ambos diagramas tenemos un cruce positivo y uno negativo, el producto de los pesos de Boltzmann es  $f(a, b)f(a, b)^{-1} = 1$ . Luego, el segundo movimiento de Reidemeister también deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann.

Para finalizar, tenemos que demostrar que el tercer movimiento de Reidemeister deja invariante al producto de los pesos de Boltzmann. Como vimos en la sección 5, hay ocho casos para verificar. Hagamos como ejemplo el caso que se corresponde con la figura 45 y dejemos el resto como ejercicio.

Si calculamos el producto de los pesos de Boltzmann sobre los tres cruces que tienen los diagramas de la figura 45 vemos que este producto es invariante por el tercer movimiento de Reidemeister si y sólo si

$$f(a, b \triangleright c)f(b, c)f(a, b) = f(a, b)f(a \triangleright b, a \triangleright c)f(a, c).$$

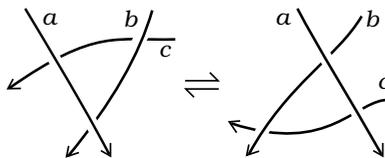


Figura 45: Otra de las configuraciones posibles para el tercer movimiento de Reidemeister.

Como  $A$  es un grupo abeliano, al cancelar  $f(a, b)$  en ambos miembros obtenemos, usando la fórmula (12), el resultado deseado.  $\square$

Los invariantes por quandles y 2-cociclos son una extensión de los invariantes  $\text{Col}_X(K)$  dados por coloraciones con quandles: si  $f$  es un coborde (y por tanto cohomólogo al 2-ciclo constante 1), entonces  $\Phi_{X,f}(K) = \Phi_{X,1}(K) = \text{Col}_X(K)$  para todo nudo  $K$ . Esta afirmación puede generalizarse: si los 2-cociclos  $f$  y  $g$  son cohomólogos, entonces  $\Phi_{X,f} = \Phi_{X,g}$ . Para la demostración remitimos a la proposición 4.5 de [5].

EJEMPLO 8.3. Sean  $X$  el quandle de Alexander de tipo  $(4, \alpha)$  y  $f$  el 2-cociclo que vimos en el ejemplo 7.12. Calculamos  $\Phi_{X,f}$  para los nudos de la figura 14:

$$\Phi_{X,f}(K) = \begin{cases} 4 + 12\sigma & \text{si } K \in \{3_1, 4_1, 7_2, 7_3\}, \\ 4 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

EJEMPLO 8.4. En este ejemplo vamos a distinguir el nudo  $3_1$  de su imagen especular  $m(3_1)$ , ver la figura 11. Consideremos el quandle  $X$  y el 2-cociclo  $f$  de  $X$  que vimos en el ejemplo 7.13. Un cálculo directo muestra que

$$\Phi_{X,f}(3_1) = 6 + 24\sigma^3, \quad \Phi_{X,f}(m(3_1)) = 6 + 24\sigma.$$

Esto nos dice que los nudos  $3_1$  y  $m(3_1)$  no son equivalentes.

EJEMPLO 8.5. Vamos a dar otra prueba de que el nudo de la abuela no es equivalente al nudo cuadrado. Como hicimos en el ejemplo anterior, vamos a utilizar el quandle  $X$  y el 2-cociclo  $f$  de  $X$  del ejemplo 7.13. El invariante que definen para el nudo de la abuela es

$$\Phi_{X,f}(3_1 \# 3_1) = 6 + 48\sigma + 96\sigma^2,$$

mientras que para el nudo cuadrado es

$$\Phi_{X,f}(3_1 \# m(3_1)) = 102 + 24\sigma + 24\sigma^3.$$

Esto nos muestra que el nudo de la abuela no es equivalente al nudo cuadrado.

## REFERENCIAS

- [1] C. C. ADAMS, *The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots*, reimpresión revisada del original de 1984, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

- [2] N. ANDRUSKIEWITSCH Y M. GRAÑA, From racks to pointed Hopf algebras, *Adv. Math.* **178** (2003), no. 2, 177–243.
- [3] G. BURDE, H. ZIESCHANG Y M. HEUSENER, *Knots*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, De Gruyter, Berlin, edición extendida, 2014.
- [4] J. S. CARTER, M. ELHAMDAI, M. A. NIKIFOROU Y M. SAITO, Extensions of quandles and cocycle knot invariants, *J. Knot Theory Ramifications* **12** (2003), no. 6, 725–738.
- [5] J. S. CARTER, D. JELSOVSKY, S. KAMADA, L. LANGFORD Y M. SAITO, Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
- [6] R. H. CROWELL Y R. H. FOX, *Introduction to knot theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Reimpresión del original del 1963, Graduate Texts in Mathematics, No. 57.
- [7] C. M. GORDON Y J. LUECKE, Knots are determined by their complements, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989), no. 2, 371–415.
- [8] R. GRAVES, *Los mitos griegos*, Alianza Editorial, Madrid, 1996.
- [9] D. JOYCE, A classifying invariant of knots, the knot quandle, *J. Pure Appl. Algebra* **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [10] S. V. MATVEEV, Distributive groupoids in knot theory, *Mat. Sb. (N.S.)* **119(161)** (1982), no. 1(9), 78–88.

LEANDRO VENDRAMIN, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, VRIJE UNIVERSITEIT BRUSSEL, PLEINLAAN 2, 1050 BRUSSEL, BELGIUM

Correo electrónico: [Leandro.Vendramin@vub.be](mailto:Leandro.Vendramin@vub.be)

Página web: <https://vendramin.github.io>