Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 25 (2022), Núm. 1, Pág. 148

La identidad de Amitsur-Levitzki

La sorprendente identidad de Amitsur-Levitzki afirma que $2n$ matrices cualesquiera $Y_j \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ siempre verifican

$$\sum\nolimits_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(2n)} = 0$$

donde σ recorre las permutaciones de $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Aquí se esboza la breve prueba de S. Rosset [2], en contraste con la original que requería un artículo de 15 páginas [1].

Sea $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Q})$ y $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$ su polinomio característico mónico. Se tiene

$$B^n = -\sum_{j=1}^{n} a_j B^{n-j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{j} a_{j-k} \operatorname{Tr}(B^k) B^{n-j} \qquad \text{con Tr la traza.} \tag{1}$$

La primera igualdad viene del teorema de Cayley-Hamilton y la segunda igualdad de las identidades de Newton sobre polinomios simétricos, porque a_j son funciones simétricas en los autovalores de B (en $\mathbb{C}$) y $\operatorname{Tr}(B^k)$ es la suma de las potencias k-ésimas de dichos autovalores.

Las igualdades de (1) se extienden a $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ para cualquier anillo conmutativo R que contenga a $\mathbb{Q}$ porque podríamos considerar los elementos de B variables y en cada posición tendríamos identidades polinómicas. Lo aplicaremos cuando R es el álgebra sobre $\mathbb{R}$ generada por 1 y los productos exteriores $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{2k}}$ de un número par de diferenciales en $\mathbb{R}^{2n}$ que, gracias a esa paridad, es un anillo conmutativo con el producto $\wedge$.

Sea la «1-forma matricial» $A = \sum_{j=1}^{2n} Y_j \, \mathrm{d}x_j$. De $\operatorname{Tr}(Y_j Y_k) = \operatorname{Tr}(Y_k Y_j)$ se deduce $\operatorname{Tr}(A^2) = 0$ y, en general, por la invariancia de la traza por permutaciones cíclicas, $\operatorname{Tr}(A^{2k}) = 0$ (ya que $\mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{2k}}$ se cancela con $\mathrm{d}x_{i_{2k}} \wedge \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_{2k-1}}$). Eligiendo $B = A^2 \in \mathcal{M}_{n\times n}(R)$ en (1) se obtiene $A^{2n} = 0$ y, como

$$A^{2n} = \sum\nolimits_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) Y_{\sigma(1)} \cdots Y_{\sigma(2n)} \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{2n},$$

el resultado queda probado.

Referencias

[1] S. A. Amitsur y J. Levitzki, Minimal identities for algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* **1** (1950), 449–463.

[2] S. Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitski identity, *Israel J. Math.* **23** (1976), no. 2, 187–188.

Fernando Chamizo, Universidad Autónoma de Madrid e ICMAT
Correo electrónico: fernando.chamizo@uam.es
Página web: http://www.uam.es/fernando.chamizo