La Gaceta de la RSME, Vol. 5.1 (2002), Págs. 175–196

El diablo de los números

Sección a cargo de

Javier Cilleruelo Mateo

De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci

por

Ángel Alonso y Teresa Bermúdez

La sucesión de Fibonacci es un objeto matemático de sorprendente ubicuidad. Aparece de forma recurrente en los patrones geométricos de multitud de procesos y estructuras naturales. Sus huellas están presentes también en ramas de las matemáticas inconexas a primera vista, como la teoría de la decisión o los conjuntos fractales. Estas insospechadas coincidencias constituyen una manifestación tangible del entramado esencialmente matemático de nuestro universo. En esta nota, invitamos al lector a realizar con nosotros una visita rápida al fascinante mundo de la sucesión de Fibonacci.

1. Leonardo de Pisa alias Fibonacci

Fibonacci es uno de los nombres más evocadores en el mundo de las matemáticas. Pocos son los aficionados o profesionales de esta ciencia que no se han topado con él en alguna ocasión. La enorme riqueza que atesora la sucesión que lleva su nombre, cuyo origen se remonta nada menos que al siglo XIII, resulta sorprendente. Su omnipresencia es tal, que aún en estos días sigue resurgiendo de forma inesperada en campos dispares de las matemáticas y otras ciencias. Por lo tanto, aunque conocida de casi todos, la de la **sucesión de Fibonacci**[1] es una de esas historias que merece una mirada fresca, de vez en cuando, para recordarnos la inagotable belleza que encierran las matemáticas.

[1]Esta sucesión no fue adecuadamente bautizada hasta el siglo XIX, cuando el matemático francés Edouard Lucas (1842-1891) formalizó su estudió, confiriéndole el rango de un objeto matemático merecedor de una atención particular.

Figura 1: Leonardo de Pisa

Leonardo de Pisa, más conocido en el mundo de las matemáticas como Fibonacci, es el protagonista principal de esta historia. Nació en Pisa (Italia) alrededor de 1175. Su padre era un mercader-diplomático que viajaba sin descanso en representación de la república de Pisa. Gracias a ello, Fibonacci tuvo ocasión de entrar en contacto con comerciantes de la cuenca mediterránea que eran portadores de tradiciones matemáticas de muy diversas culturas. En el curso de sus continuos viajes, Fibonacci aplicó su talento y capacidad de síntesis para amalgamar muchos de esos conocimientos matemáticos. Su fama creció de tal forma, que alcanzó gran influencia entre los matemáticos de la corte del emperador del Sacro Imperio Romano, Federico II.

En el año 1202 publicó un tratado de matemáticas, el *Liber Abaci* o libro del ábaco, donde introducía de forma efectiva la notación posicional y los números hindú–arábigos en la aritmética europea. Fibonacci no fue el primero en adoptar las ventajas de esta numeración, sin embargo, contribuyó con su prestigio a que fuera adoptada de forma generalizada por los matemáticos occidentales. En su libro describía reglas elementales para sumar, restar, multiplicar y dividir semejantes a las que nosotros utilizamos hoy en día, y en las que se pueden apreciar las grandes ventajas del sistema de notación posicional. Además proporcionaba procedimientos y técnicas de contabililidad muy útiles para las transacciones mercantiles, como cambios de divisas, cálculo de intereses generados por préstamos, etc.

El *Liber Abaci* no se distingue precisamente por su claridad expositiva. Más bien es un libro de lectura ardua, y bastante farragoso para los cánones actuales de un manual (que es lo que pretendía ser). Fibonacci mezcla, por ejemplo, el sistema decimal con el sexagesimal, utiliza notaciones poco prácticas, y muestra un empeño, no del todo justificable, en usar fracciones unitarias[2] para expresar el resultado de sus cálculos. Estos defectos menores son disculpables teniendo en cuenta que la matemática europea estaba en pañales tras el declive de las diferentes escuelas de la tradición griega.

En cualquier caso, hay una contribución muy destacable en el *liber Abaci*: los problemas que planteaba como ejercicio para los lectores, cuyo carácter atractivo y moderno contribuyó a que fueran tomados por muchos autores posteriores para sus tratados de matemáticas. Uno de esos problemas es el que da origen a la archiconocida sucesión.

2. ¡Un problema... de conejos!

Como sucede muchas veces en la historia de las matemáticas, el principio de todo es un humilde problema en apariencia bastante trivial que, en este caso, dice así:

> *Un hombre acomoda una pareja de conejos en un recinto vallado. La pareja de conejos engendra una pareja de retoños, macho y hembra, y sólo una, cada mes. La nueva pareja a su vez engendra otra pareja a partir del segundo mes de vida, y así sucesivamente. Pregunta: ¿Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de n meses?*

La respuesta constituye el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci, que denotaremos por f_n.

No podemos descartar que Fibonacci tratase de entender como crece la población de conejos, que en algunos ecosistemas se convierten en verdaderas plagas. Resulta fácil apreciar que con las condiciones del problema el número de parejas de conejos crece a cada paso de forma aproximadamente geométrica con un factor cercano a 1.62, suponiendo que no mueren ni se escapan. Aunque

[2]Todo número racional se puede expresar como suma de fracciones con numerador 1 (P. ejem. $3/4 = 1/2 + 1/4$). Este tipo de fracciones también se conocen como fracciones egipcias por aparecer en uno de los problemas del papiro Rhind-Ahmes. Fibonacci ideó un algoritmo muy simple que proporciona una de las infinitas descomposiciones de un número racional en suma de fracciones unitarias.

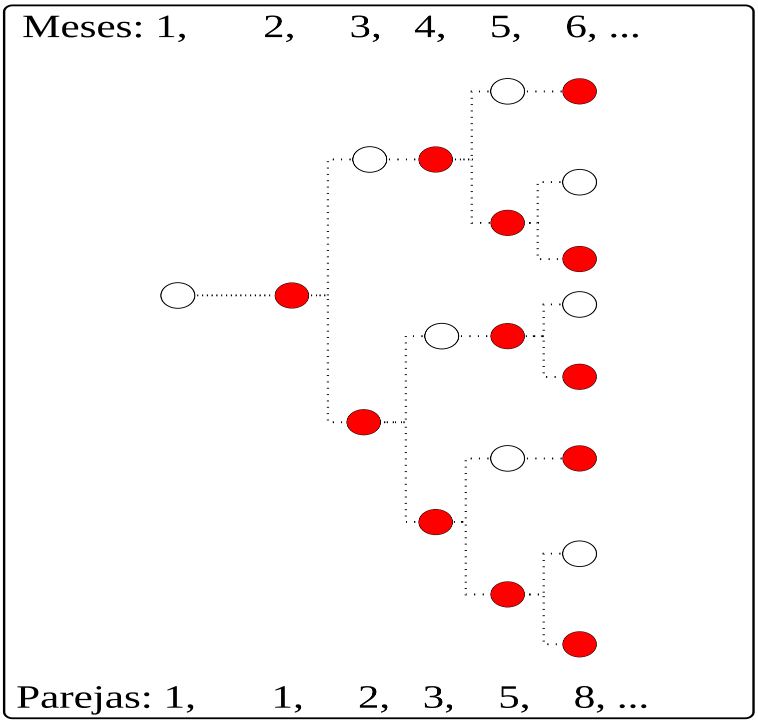


Figura 2: Evolución de las parejas de conejos en los primeros meses. Se representan de forma distinta las parejas no reproductoras con menos de dos meses de edad (∘), y las reproductoras (•).

el problema, por su excesiva simplificación, nunca ha despertado mucho interés en los biólogos que estudian las poblaciones de estos roedores, si resulta seguro que con este problema Fibonacci planteaba un buen caso práctico para que los lectores se pudieran ejercitar en el uso de los algoritmos de su nueva aritmética.

Poco podía sospechar entonces, que la sucesión a que da lugar resultaría ser una mina. La sucesión de Fibonacci contiene inagotables filones de los que se han extraído y se siguen extrayendo verdaderos “diamantes” matemáticos. Tanto es así, que hay una revista científica de periodicidad trimestral dedicada exclusivamente a la publicación de resultados relacionados con esta sucesión: *“The Fibonacci Quarterly”*. Esta revista ocupa la posición 139 en la lista del *Science Citation Index* del año 2000, con un parámetro de impacto comparable al de la media de la literatura matemática más relevante.

Si Fibonacci levantara la cabeza, se sorprendería al descubrir que el enorme éxito de este pequeño problema de su *Libro del ábaco* ha oscurecido, por contraste, el resto de su trabajo matemático. Sin embargo, no podemos dejar de mencionar aquí, el hecho de que Leonardo de Pisa es sin duda uno de los matemáticos de mayor talla que cubre la gran laguna temporal entre dos genios de la teoría de números: Diofanto (s. IV) y Fermat (s. XVII). En efecto, la obra que él mismo consideró como su mejor trabajo es el *Liber Quadratorum* en el que se ocupa de las ecuaciones diofánticas[3] de segundo grado, donde maneja de forma creativa y original la idea de congruencia. Esta obra, junto con otro libro conocido como el *códice Flos*, en el que presenta ingeniosas soluciones a problemas geométricos, numéricos y algebraicos, habría servido para que su nombre perdurase en la historia de las matemáticas. Pero, caprichos del destino, su fama inmortal fuera de los ambientes especializados, se la debe Fibonacci a una sucesión llena de extraordinarias sutilezas, ¡que paradójicamente él nunca llegó a estudiar en profundidad!

Volviendo pues a la sucesión, el patrón que siguen sus términos fue descubierto en primera instancia por Albert Girard[4] hacia 1625. Cada uno, excepto los dos primeros, es el resultado de sumar los dos que le preceden. Esto se puede expresar sencillamente mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_1 &= 1 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de esta expresión, podemos calcular de forma recursiva cualquier número de Fibonacci. En 1753 Robert Simson, profesor de la Universidad de Glasgow, se dió cuenta de que aunque los números de la sucesión crecían ilimitadamente, el cociente entre dos consecutivos parecía aproximarse más y más a la **razón áurea**, lo que podemos expresar como:

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Esta conexión matemática de la sucesión de Fibonacci merece un análisis más profundo. El cálculo del límite es bastante sencillo, pero demostrar su existencia es más complicado. Por simplicidad, supondremos que el límite existe,

[3]Se denomina así a toda ecuación algebraica de n variables con coeficientes racionales. El problema que se plantea entonces es encontrar las soluciones enteras o racionales de dichas ecuaciones. Un ejemplo que ya estudiaron los matemáticos babilonios, egipcios y griegos es: $x^2 + y^2 = z^2$

[4]Aunque casi desconocido para el público en general, a este matemático le cabe el honor de haber sido el primero en conjeturar que toda ecuación polinómica de grado n admite precisamente n raíces, que pueden ser tanto reales como "ocultas" (imaginarias). Es el *Teorema fundamental del Álgebra* o *Teorema de D'Alembert*, cuya primera demostración sería desarrollada por Carl. F. Gauss en su tesis doctoral.

y lo denotaremos precisamente por la letra griega Φ. Entonces, la fórmula de recurrencia que hemos hallado nos permite obtener la siguiente igualdad:

$$\Phi = \frac{\Phi + 1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi},$$

que se transforma fácilmente en una ecuación cuadrática, cuya solución es lo que hemos denominado razón áurea $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Es posible ver lo curioso que resulta este número, con unos sencillos trucos algebraicos. En efecto, substituyendo Φ por su valor equivalente en la parte derecha de la ecuación, obtenemos:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}},$$

reiterando esta operación, obtenemos una fracción continua en la que sólo aparece el número 1:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}. \tag{1}$$

En esta expresión del número áureo, aparece su intrigante carácter recursivo. Pero aún hay más, porque las relaciones entre las propiedades aditivas y multiplicativas de este número, que se derivan de la forma en que está construido, son notables. En efecto, si formamos la sucesión que se obtiene con las potencias n-ésimas de Φ:

$$1,\ \Phi,\ \Phi^2,\ \Phi^3,\ \Phi^4,\ \dots$$

resulta ser equivalente a esta otra,

$$1,\ \Phi,\ 1+\Phi,\ 1+2\Phi,\ 2+3\Phi,\ \dots$$

En la que cada término es la suma de los dos que le preceden. Podemos resumir esta propiedad en la siguiente fórmula: $\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$. Este tipo de relaciones abren las vías que conducen a la elegante fórmula descubierta por Binet, en 1843, para el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci[5],

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} = \frac{1}{\sqrt{5}} \{ \Phi^n - (-\Phi)^{-n} \}.$$

La fórmula, dotada de una singular simetría "áurea", aunque más complicada que la expresión recursiva, tiene la ventaja de que facilita la demostración de

[5]Muchos autores atribuyen esta fórmula a Edouard Lucas ya que fue éste quién le dió aplicaciones interesantes.

la existencia del límite de la sucesión f_{n+1}/f_n, que como hemos visto es el número áureo.

Resulta chocante que en el problema planteado por Fibonacci en su Libro del ábaco, aparentemente desprovisto de otro interés que el puramente calculístico, aparezca este número mágico ligado al canon de belleza y equilibrio geométrico. Recordemos que Φ también recibe la denominación de **divina proporción**, introducida por el matemático italiano Luca Pacioli, en su libro *De divina proportione*, que colaboró en el estudio de sus propiedades con Leonardo da Vinci. La denominación de proporción áurea, es posterior. Pero sea cual sea el nombre que se le adjudique esta proporción apareció por primera vez en la literatura matemática en la proposición 30 del sexto libro de los *Elementos* de Euclides, y probablemente era ya conocida por los Pitagóricos. Su presencia es insoslayable en muchas actividades humanas en las que la apreciación estética resulta importante. El diseño del Partenón griego, rezuma proporciones áureas por sus cuatro costados. Su presencia en la arquitectura ha persistido a lo largo del tiempo, así podemos ver que Le Corbusier adoptó en su *modulador* proporciones basadas en sucesiones de Fibonacci generalizadas tomando como semillas proporciones humanas. Innumerables pintores como Boticcelli, Leonardo o Durero adoptaron la proporción áurea en la composición geométrica de muchos cuadros. Ni siquiera la poesía escapa a su influjo, pues se ha encontrado que la proporción entre el tamaño de las estrofas de la Eneida de Virgilio sigue también la razón áurea!! Por alguna misteriosa razón, el cerebro humano reconoce en las múltiples caras del número áureo una recóndita belleza.

Para concluir esta sección podemos proponer un ejercicio práctico al lector diestro en la programación de ordenadores, que seguramente sería del gusto de Fibonacci. Aprovechando que el año 2000 fue declarado año mundial de las matemáticas, calcúlese el valor del término f_{2000}. La fórmula de recurrencia puede resultar útil, pero obligará a realizar una engorrosa serie de monumentales sumas. La fórmula de Binet no simplifica demasiado el trabajo, porque implica realizar bastantes productos o usar logaritmos. Utilizando cualquiera de los dos caminos habrá que operar con enormes números enteros. Si el lector elabora un programa adecuado, podrá finalmente comprobar que f_{2000} consta de los cuatrocientos dieciocho dígitos siguientes:

4224696333392304878706725602341482782579852840250681098010280137 314
3085843701307072241235996391415110884460875389096036076401947116435
9602927198331259873732625355580260699158591522949245390499872225679
5316982874482472992263901833716778060607011615497886719879858311468
8708762645973690867228840236544222952433479644801395153495629720876
5265606952980649984197744872015561280266540455417171788193032402520
4312082516817125.

Figura 3: El número áureo está presente en muchas manifestaciones arquitectónicas, donde las relaciones geométricas son importantes.

2.1. Los números de Fibonacci en la naturaleza

Si uno sabe buscar con paciencia y atención, puede encontrar muchas huellas de los números de Fibonacci en el reino natural. Aparecen al analizar desde un punto de vista geométrico la morfología de multitud de seres vivos y objetos inanimados. En algunos casos, no es posible descartar la posibilidad de que esto sea producto de la casualidad, pero tampoco debemos olvidar que, al fin y al cabo, las matemáticas constituyen el lenguaje en el que están escritas las leyes de la naturaleza.

2.1.1. La geometría de las caracolas

En cierta ocasión cuando se pidió a Newton que emitiera un juicio sobre sí mismo, el contestó más o menos lo siguiente: *No se que les pareceré a los demás hombres, pero yo me veo como un niño que juega en la playa, y que* *se divierte de vez en cuando porque encuentra una piedra o una caracola más llamativa que las demás, mientras el gran océano de la verdad se extiende inalcanzable en el horizonte*. Si durante sus "juegos" Newton se hubiera topado con la concha de un Nautilus, sin duda le habría proporcionado gran placer. Porque como veremos, su forma geométrica guarda una sorpresa matemática relacionada con la sucesión de Fibonacci.

Es posible construir una figura muy simple que nos permitirá ilustrar fácilmente a que nos estamos refiriendo: Dibujemos dos cuadrados de lado unidad, unidos por uno de sus lados. Añadamos un cuadrado de dos unidades de lado sobre los dos anteriores. Uno de tres unidades de lado adosado a los anteriores, y así sucesivamente. Si unimos los vértices diagonales de los cuadrados dibujados por medio de cuartos de circunferencia, obtendremos la siguiente figura:

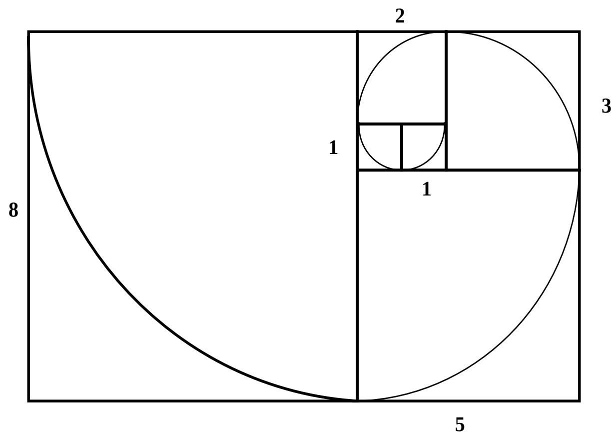


Figura 4: Espiral de Fibonacci.

Las longitudes de los lados de los cuadrados resultantes, ¡reproducen por la forma en que se ha construido la figura, la sucesión mágica! Por este motivo, a la espiral que resulta se la denomina *espiral de Fibonacci*, y es curiosamente la forma geométrica que poseen las conchas de algunas caracolas marinas. La razón probable de este hecho es la economía que rige la mayor parte de los principios naturales. Crecer de este modo, permite aprovechar la estructura existente del caparazón para aumentar de tamaño armoniosamente.

En la espiral de Fibonacci, el radio se incrementa en un factor Φ cada cuarto de vuelta. ¡Pero hay otra posibilidad más áurea si cabe! El nautilus, es un molusco marino propio del Océano Índico, cuya concha con múltiples cámaras sigue una espiral de manera que su radio aumenta en un factor Φ por cada vuelta completa. Una forma semejante tienen también los cuernos

Figura 5: Conchas de nautilus. La sección transversal reproduce perfectamente una espiral logarítmica.

de algunas cabras, las telas de ciertas arañas, y es la forma que adoptan muchos fluidos en su evolución sometidos a las leyes físicas. Este tipo de espiral se denomina logarítmica o equiangular y fue descubierta por Descartes. Las propiedades de la función matemática que corresponde a este tipo de espiral son curiosas, ya que la mayoría de curvas auxiliares que sirven para caracterizarla geométricamente (evoluta, involuta, pedal, caústica, etc) reproducen su forma original. Por esta razón, Jakob Bernouilli la denominó *spira mirabilis*, e hizo que la grabasen sobre su tumba con el siguiente lema latino "Eadem mutata resurgo" (Idéntica y cambiada resurjo), que hace una sutil referencia a las propiedades de la espiral, y del alma según la tradición cristiana. Sin duda un ingenioso epitafio para un excelente matemático.

2.1.2. Semillas, hojas y flores: El jardín de Fibonacci

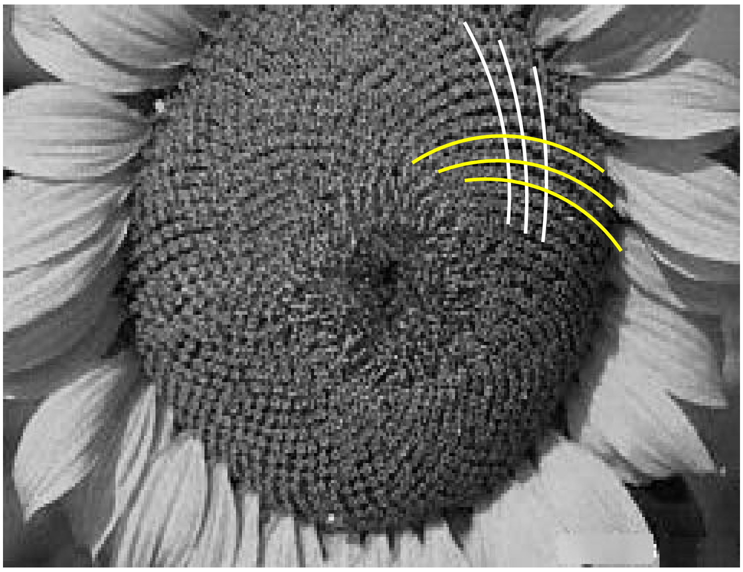
Los números de Fibonacci, aparecen de forma curiosa en la estructura de la distribución de las semillas de algunas plantas, en las corolas de muchas flores, en la disposición de las espinas de algunos cactus, e incluso en la estructura de ramificación de muchas plantas.

El *Helianthes annulus*, un tipo de girasol, es el ejemplo más llamativo del primer caso. Si miramos con detenimiento, podemos ver que sus pipas siguen una distribución ordenada, formando líneas espirales que parten de la zona

Figura 6: Estructuras espirales en la naturaleza.

central y se abren hacia fuera. Se pueden distinguir dos tipos de espirales, unas levógiras y otras dextrógiras, y ambas están imbricadas de tal forma que producen un empaquetamiento regular de las semillas. Si contamos las espirales de cada tipo, casi siempre obtenemos sorprendentemente dos números de Fibonacci consecutivos: 13 y 31, 21 y 34, o 34 y 55 como en el caso de la Figura 7. Este no es un hecho aislado, podremos comprobar que la misma distribución aparece en las semillas de muchas flores, y también en las piñas de algunas coníferas.

La razón de que las semillas se distribuyan con el patrón descrito obedece a un principio extremal, a los que la naturaleza es tan aficionada para regular sus leyes. La planta produce, a partir de la zona central de la flor, sucesivas generaciones de semillas, que aparecen desplazadas por un $1/\Phi$ de vuelta respecto a las anteriores. De esta forma, en cada paso, el ángulo de apertura de las semillas aumenta exactamente en la proporción áurea. La distribución así formada constituye una forma óptima de empaquetar semillas de tamaño semejante, de forma que se distribuyan uniformemente con independencia de



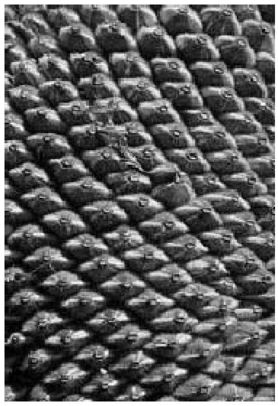


Figura 7: Patrones espirales de las pipas de un girasol (Helianthes annulus), las espirales levógiras y dextrógiras se han resaltado con líneas superpuestas. A la derecha puede verse un detalle del empaquetamiento de las pipas.

la extensión del cáliz. Una semilla determinada, al cabo de varias generaciones seguirá formando el ángulo original, aunque su distancia al centro habrá aumentado al crecer la planta. La distribución de las espinas de muchos tipos de cactus se ajusta también al mismo patrón, y es muy fácil distinguir las espirales levógiras y dextrógiras.

Los números de Fibonacci vuelven a aparecer en las flores, con otro disfraz. Y es que son muchas las plantas con flores cuyo número de pétalos resulta ser un número de Fibonacci. Este hecho se presenta con diversos grados de precisión, es decir, hay especies cuyas flores tienen un número fijo de pétalos siempre, mientras que en otras especies es el promedio de pétalos el que resulta ser un número de Fibonacci. Así encontramos que la mayor parte de los geranios, las violetas, el heliotropo, algunos tipos de azaleas, y muchas orquídeas tienen 5 pétalos. El delphinium tiene 8 pétalos. Las margaritas 21, 34, 55. No existe una evidencia empírica que apoye definitivamente el significado de la presencia de los números de Fibonacci en las flores, sin embargo no deja de ser llamativa su reiterada preferencia por éstos a la hora de formar los pétalos.

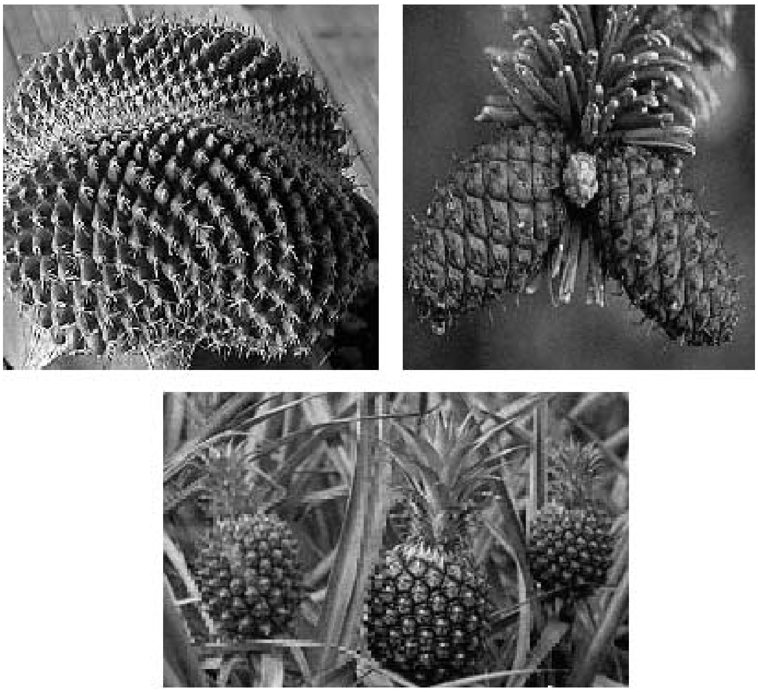


Figura 8: Las espirales de Fibonacci aparecen en diversos tipos de plantas.

Si hay un aspecto del mundo vegetal en el que la presencia de la sucesión de Fibonacci aparece de forma innegable, es el patrón de ramificación de algunas especies. En muchos casos, la estructura de las ramas es idéntica a la que aparece en la Figura 9. Este hecho tiene una cierta cualidad fractal, es decir, si cortamos la rama a una cierta altura, la estructura de ramificación es la misma que la de la planta completa. La rama de la botánica dedicada a estudiar los patrones de organización de la plantas se denomina **filotaxia**[6] y como es natural la sucesión de Fibonacci, es la estrella de los modelos matemáticos de esta disciplina.

La distribución angular de las hojas de una planta alrededor del tallo, según su altura, presenta también una notable conexión con la sucesión de Fibonacci. El número de giros horarios y antihorarios que hay que dar alrededor del tallo hasta que una hoja queda exactamente en la vertical de otra, y el

[6]Del griego orden de las plantas.

número de hojas que crecen entre estas dos posiciones son números consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

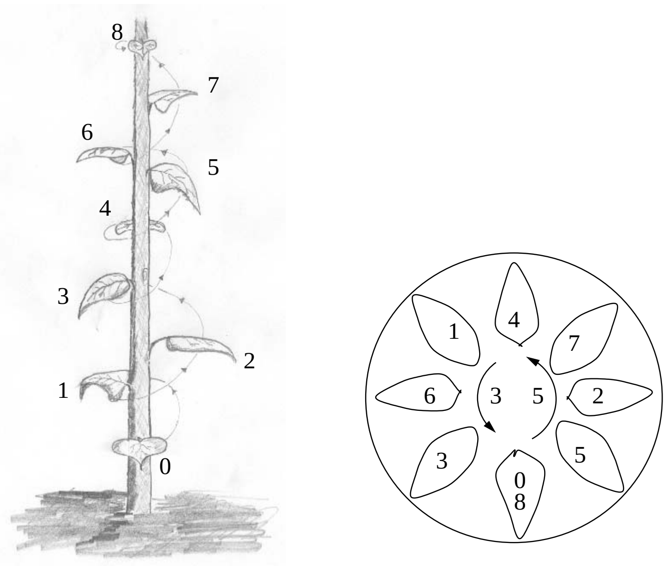


Figura 9: La distribución angular de las hojas de las plantas y la sucesión de Fibonacci.

En la planta de la Figura 9 hay que dar tres giros en sentido horario antes de que se produzca la primera coincidencia en la posición de dos hojas (dos giros en sentido antihorario). En ambos casos contamos cinco hojas hasta que se produce la coincidencia. Dos, tres y cinco son números consecutivos de la sucesión.

Por ejemplo el roble, el manzano, el ciruelo y el cerezo siguen un patrón (2,3,5) correspondiente a dos giros antihorarios, tres giros horarios y cinco hojas. El peral sigue un patrón (3,5,8) y el almendro (5,8,13). ¡Estos patrones aparecen en el 90 % de las plantas!

La explicación plausible de esta organización vuelve a estar en un principio de optimización, ya que con ella se garantiza que todas las hojas reciban la mayor cantidad posible de agua y luz solar a lo largo del ciclo diario.

Si tenemos en cuenta que el desarrollo de las plantas esta dirigido por su código genético, podríamos concluir de las anteriores observaciones que muchas plantas tienen codificada en sus genes, de alguna forma, la sucesión de Fibonacci!!

3. Las matemáticas y la sucesión de Fibonacci

Si notables son las apariciones de la sucesión de Fibonacci en la esfera del arte y de la naturaleza, las conexiones con las matemáticas alcanzan tanto a objetos elementales que se estudian en el instituto, como a campos de lo más complejo, situados en el límite del conocimiento matemático.

3.1. La sucesión de Fibonacci y el triángulo de Pascal

Entre la ilustre parentela de los números de Fibonacci, se cuenta el triángulo de Pascal, sin duda uno de los objetos matemáticos más bellos, relacionado con el cálculo de probabilidades.

El triángulo de Pascal es bien conocido, y se estudia en el colegio para introducir por ejemplo el binomio de Newton, o trabajar con números combinatorios.

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ \vdots \end{array}$$

Lo que no es tan conocido es su relación con la sucesión de Fibonacci. Representemos el triángulo de Pascal como una matriz triangular superior, que obtenemos situando los unos en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

Si procedemos a sumar los números que aparecen en cada columna obtenemos de nuevo la sucesión de Fibonacci. Podemos expresar este resultado singular de la siguiente forma:

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-k}{k-1}.$$

Teniendo en cuenta propiedades parecidas, podemos derivar interesantes propiedades que poseen los índices de la sucesión respecto a la suma y la multiplicación:

$$f_{m+n} = f_{m-1}f_n + f_m f_{n+1}.$$

$$f_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} f_k f_n^k f_{n-1}^{m-k}.$$

Estas fórmulas nos serán, quizá, de utilidad al final de nuestra pequeña excursión por el mundo de Fibonacci.

3.2. El décimo problema de Hilbert

En agosto de 1900, se reunieron en París matemáticos de todo el mundo para celebrar un congreso extraordinario. En una de las conferencias plenarias, David Hilbert, a la sazón el principal matemático de Alemania, presentó una lista de veintitrés problemas[7] que marcarían los derroteros de la investigación matemática en el siglo XX. En efecto, matemáticos de todo el mundo se han dedicado con esfuerzo y entusiasmo a resolver estos problemas durante los más de cien años transcurridos. Una prueba de las tremendas dificultades que entrañan, la constituye el hecho de que aun quedan algunos por resolver de forma definitiva.

El hilo que une a Fibonacci con Hilbert, es que su sucesión fue la guinda de la solución de uno de los problemas más complejos de la famosa lista. En concreto el décimo problema de Hilbert planteaba la siguiente cuestión:

> *¿Existe un método universal (que valga para cualquier ecuación) que, con un número finito de pasos, permita decidir si una ecuación diofántica dada tiene o no solución?*

Este problema se encuadra en la teoría de la decisión, y fue resuelto de forma definitiva por un joven matemático ruso de veintidós años, Yuri Matijaseviv. Quien probó que **no hay tal método universal**. Pero gran parte del mérito de la solución, corresponde a una extraordinaria matemática norteamericana: Julia Robinson. Esta ingeniosa mujer persiguió con ahinco al décimo problema de Hilbert, y desarrolló los teoremas claves para su solución. En particular, demostró que si algún tipo de ecuación diofántica satisfacía un cierto criterio (de Robinson), entonces el problema tendría de forma lógica un "no" como respuesta. El "ingrediente" que condujo a la solución final lo constituye una sucesión recursiva que verifica una ecuación diofántica parecida a la de

[7] David Hilbert, Mathematische Proleme. Vortrag gehalten auf dem internationalen Mathematiker Kongress zu Paris 1900, Nachr. K. Ges. Wiss., Göttingen, Math.–Phys. Kl. (1900), 253–297.

Pell ($x^2 - xy - y^2 = \pm 1$). Y dicha sucesión resultó ser, la constituida por los ¡*términos pares de la sucesión de Fibonacci*! En palabras simples, la ecuación $f_{2m} = n$ es el tipo de ecuación diofántica que satisface el criterio de Robinson. Este hecho afortunado sirvió para tachar el décimo problema de la lista de Hilbert, y es a su vez un ejemplo de como los objetos matemáticos más sencillos pueden ser claves en el estudio de las ramas más complejas de las matemáticas modernas.

3.3. El conjunto de Mandelbrot

Otra presencia curiosa de los números de Fibonacci, tiene que ver con el famoso conjunto de Mandelbrot, uno de los objetos fractales emblemáticos de la teoría del caos.

Se define la siguiente transformación no lineal del plano complejo, $F_c(x) := x^2 + c$ donde x y c son números complejos. Entonces, el conjunto de Mandelbrot, $\mathcal{M}$, está formado por todos los valores c complejos cuya *órbita crítica* u órbita del cero (es decir $\{F_c(0), F_c^2(0), F_c^3(0), \dots\}$) está acotada. Por ejemplo $1 \notin \mathcal{M}$ y $-1 \in \mathcal{M}$. El aspecto de este conjunto tiene la forma de un extraño insecto, como puede apreciarse en la Figura 10.

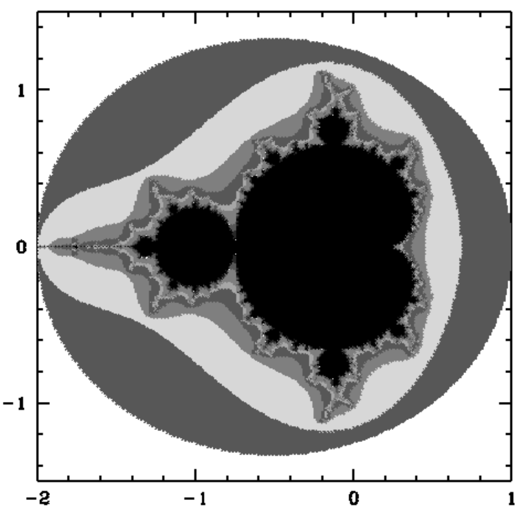


Figura 10: El conjunto de Mandelbrot.

Se dice que la función F_c tiene un *ciclo atractor de período* n si existe un número x_0 tal que $F_c^n(x_0) = x_0$ y $|F_c^n(x_0)| < 1$.

Una propiedad importante de la órbita crítica en relación con el ciclo atractor (en caso de existir) justifica en cierto sentido su uso. Robert Devaney demostró que si existe un ciclo atractor para F_c, entonces la órbita crítica converge al ciclo atractor. Por tanto F_c tiene a lo sumo un ciclo atractor por la unicidad del límite.

Por ejemplo, el cardiode principal de $\mathcal{M}$, coincide con el conjunto de números c tales que F_c posee un ciclo atractor de período 1. De forma análoga, el mayor disco a la izquierda del cardiode principal, está formado por los números c tales que F_c tiene un ciclo atractor de período 2. Estos bulbos filamentosos que se repiten una y otra vez, con la misma forma y diferente escala, se denominan técnicamente *decoraciones*. El interior de cualquier decoración coincide con el conjunto de números c tal que F_c tiene un ciclo atractor de período n. A dicho entero n se le denomina precisamente período del bulbo (o de la decoración).

Existen varias formas geométricas de obtener el período de cada bulbo sin hacer uso de la definición. Una de ellas lleva el cuño de la sucesión de Fibonacci y, sin necesidad de entrar en los detalles técnicos, que no son simples, puede verse en la Figura 11: Observamos que el conjunto $\mathcal{M}$ es simétrico con respecto al eje X. Asignamos al bulbo grande el período 1, al siguiente que le sigue por el tamaño el período 2. Ahora, al bulbo mayor entre los bulbos de período 1 y 2 le asignamos el período del siguiente término de la sucesión de Fibonacci, el 3. Entre los bulbos de período 2 y 3 asignamos el período 5, y así sucesivamente.

El estudio de la dinámica de funciones complejas cerca del punto límite de una determinada sucesión de bulbos (generados mediante la sucesión de Fibonacci) constituye el núcleo del trabajo de Jean-Christophe Yoccoz, que le valió la concesión de la medalla Fields en 1994. Esta medalla es el equivalente al premio Nobel de matemáticas. Aunque pueda parecer que la teoría del caos es una rama muy abstracta de las matemáticas, sus resultados son de gran interés en física, tanto en ramas aplicadas como la hidrodinámica o la astronomía, como en ramas teóricas como la mecánica cuántica.

3.4. Juegos

También hay un espacio para los juegos "matemágicos" en la sucesión de Fibonacci. En este caso, aparece una divertida paradoja en la construcción de un rectángulo a partir de un cuadrado, cuyos lados (los dos del rectángulo y el del cuadrado) son tres números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. La primera referencia histórica a este enigma matemático en cuestión corresponde a Sam Lloyd famoso creador de innumerables rompecabezas y juegos de ingenio. Sin embargo, fue Charles Lutwidge Johnson, un matemático autor de ingeniosas paradojas lógico-lingüísticas, mucho más conocido por ser el autor de "Alicia en el país de las maravillas", quién la popularizó.

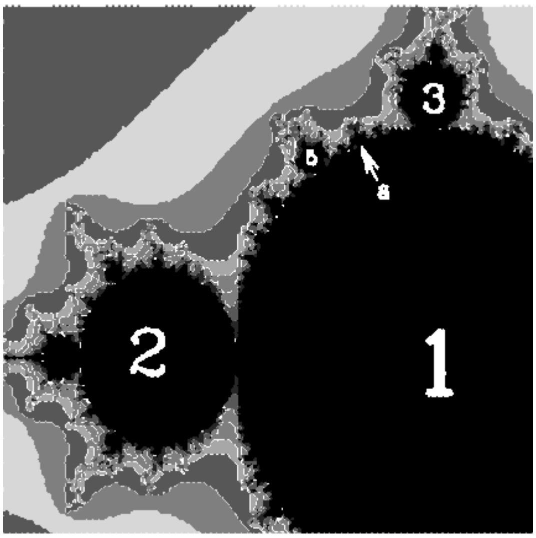


Figura 11: Periodos de los ciclos atractores en el conjunto de Mandelbrot.

La paradoja surge al tomar un cuadrado de ocho unidades de lado (es decir con una superficie de 64 cuadrículas unitarias). Si lo cortamos en piezas de la forma adecuada como se muestra en la Figura 12, las podemos ensamblar de nuevo para formar un rectángulo con 13 unidades de base y 5 unidades de altura. La superficie de este rectángulo es por lo tanto de 65 cuadrículas unitarias. Esto parece llevarnos a la disparatada conclusión de que 64 = 65!!.

La unidad de superficie que falta o que sobra, desaparece o se distribuye a lo largo de la diagonal del rectángulo, por lo que su pérdida es difícil de notar cuando se realiza el juego con papel y tijeras tomando un cuadrado de superficie adecuada.

La clave del truco radica en el hecho siguiente: $f_{n-1} \times f_{n+1} = f_n^2 \pm 1$. En la Figura 13 se muestra lo que sucede al considerar otras ternas de números de Fibonacci, y puede verse más claramente como las piezas no encajan de forma exacta en la diagonal del rectángulo. Naturalmente cuanto mayor es el lado del cuadrado original, más difícil resulta apreciar la trampa en la que se basa este interesante rompecabezas.

3.5. Un problema abierto

No hay mejor final para una nota sobre matemáticas que mencionar un problema aún sin resolver.

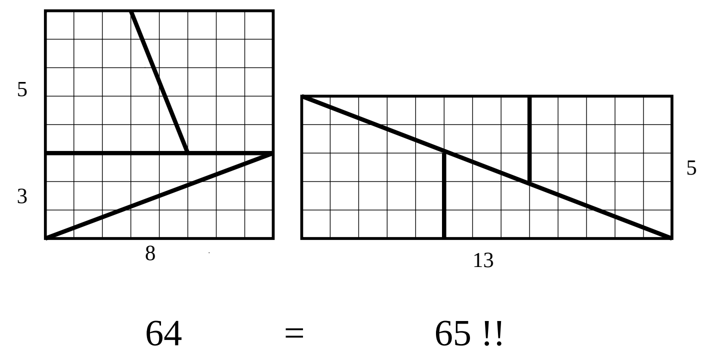


Figura 12: ¿Dónde está la cuadrícula que falta?

Una inspección sencilla de los primeros términos de la sucesión nos permite ver que cada dos términos sucesivos son primos entre sí. De hecho se puede probar de forma trivial por reducción al absurdo, que este punto es cierto en general. Pues, si existiera un divisor común a dos términos consecutivos cualesquiera, por la forma en que está definida la sucesión, este divisor sería común a todos los términos de la sucesión. Observando los primeros términos de la sucesión podemos concluir por lo tanto que el máximo común divisor de f_n y f_{n+1} es efectivamente 1.

En relación con esta propiedad aparentemente desprovista de interés, podemos mencionar un problema aún abierto que consiste en determinar *si los números primos que hay en la sucesión de Fibonacci forman un conjunto finito o infinito.*

Por ejemplo, los únicos números primos que hay entre los 100 primeros términos de la sucesión de Fibonacci son los siguientes:

$$f_3, f_4, f_5, f_7, f_{11}, f_{13}, f_{17}, f_{23}, f_{29}, f_{43}, f_{47}, f_{83}.$$

El último consta ya de 17 dígitos, pero aparentemente los números primos siguen apareciendo sin descanso.

Si nos fijamos en la sucesión nos damos cuenta que los términos f_{3n} son precisamente todos los números pares de la sucesión (múltiplos de $2{=}f_3$), y por tanto no son primos, excepto f_3, que es 2. De modo análogo, los términos f_{4n} son múltiplos de $3{=}f_4$, y por tanto no son primos, excepto el propio f_4. La demostración de estas propiedades es fácil a partir de la fórmula de recurrencia, sin más que aplicar el método de inducción. En general se puede demostrar que f_{nk} es múltiplo de f_k para todo valor de n. Con lo cual todo número de Fibonacci primo ha de tener necesariamente un subíndice primo con la excepción, ya mencionada, de f_4. Por desgracia lo recíproco no es cierto.

Quizás se pueda encontrar un método que nos permita decidir qué subíndices primos dan lugar a números de Fibonacci primos, quizás este problema

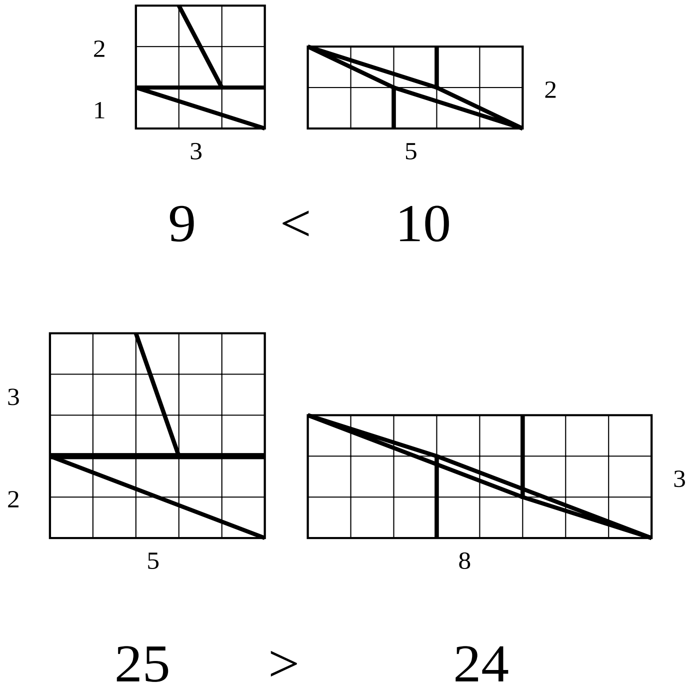


Figura 13: Rompecabezas resultantes de tomar las primeras ternas de números de Fibonacci. La cuadrícula faltante (arriba), o sobrante (abajo), se distribuye a lo largo de la diagonal del rectángulo, y da lugar al romboide que se puede apreciar en el rectángulo.

sea banal y no merezca el esfuerzo de intentar buscar una respuesta, o sencillamente puede que sea demasiado difícil. Pero nunca se sabe... las matemáticas siempre nos guardan hermosas sorpresas. ¡Y a buen seguro que la sucesión de Fibonacci nos espera de nuevo escondida en el lugar más insospechado!

Referencias

[1] Carl B. Boyer; *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos. Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[2] Robert Devaney. *The fractal geometry of the Mandelbrot set. I:The periods of the bulbs.*

[3] Martin Gardner. *Mathematics puzzles and magic.* Dover Books, New York, 1956.

[4] Constance Reid. *Julia (A life in Mathematics)*, The mathematical association of America, 1996.

[5] Edward Rothstein. *Emblems of mind. The inner life of music and mathematics.* Avon Books, New York, 1996.

[6] André Warusfel. *Les nombres et leurs mysterès.* Éditions du Seuil, Paris, 1961.

[7] H. Weyl. *Simetría.* Ed. Mc Graw-Hill, Madrid, 1991.

[8] http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci

[9] http://math.holycross.edu/~davids/fibonacci/fibonacci.html

[10] http://ulcar.uml.edu/~iag/CS/Fibonacci.html

Ángel Alonso
Instituto de Astrofísica de Canarias
38200 La Laguna, Tenerife
correo electrónico: aas@ll.iac.es

Teresa Bermúdez
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
38271 La Laguna, Tenerife
correo electrónico: tbermude@ull.es