Mirando hacia el futuro

Sección a cargo de

Antonio Viruel

La conjetura de pesos de Alperin

por

Carolina Vallejo Rodríguez

Jonathan (Jon) Lazare Alperin es un matemático estadounidense nacido en 1937. Alperin se graduó en la Universidad de Harvard en 1956 y se doctoró en la Universidad de Princeton bajo la tutela de G. Higman en 1961. Desde 1971 es profesor en la Universidad de Chicago.

La influencia de Alperin en la teoría de grupos finitos es innegable y se refleja en resultados como su teorema de fusión, que explica las propiedades de conjugación de subconjuntos de un subgrupo de Sylow en un grupo finito, o el teorema de Alperin-Feit-Thompson, que determina la estructura de un grupo de orden potencia de 2 en función de su número de involuciones. Destacan también sus trabajos en teoría de la representación local, bloques y sistemas de fusión. Entre los problemas más importantes que ha propuesto se encuentra su conjetura de pesos, conocida también como AWC por sus siglas en inglés (*Alperin Weight Conjecture*).

1. La filosofía global-local

La conjetura de pesos de Alperin es un enunciado de tipo global-local. En teoría de grupos finitos, los p-subgrupos locales de un grupo G son sus p-subgrupos no triviales y los normalizadores de estos. Por supuesto, los subgrupos locales más importantes son los subgrupos de Sylow y sus normalizadores. La idea que subyace a la filosofía global-local es que ciertas propiedades de un grupo, ligadas a un cierto primo p que divide a su orden, determinan y están determinadas por propiedades de sus p-subgrupos locales. Un ejemplo paradigmático de esta filosofía es el teorema de p-nilpotencia de Frobenius. Se dice que un grupo finito G es p-nilpotente si existe un subgrupo normal N de G de forma que $G = NP$ y $N \cap P = 1$, donde P es un p-subgrupo de Sylow de G. En otras palabras, G es isomorfo a un producto semidirecto $N \rtimes P$, donde N es un subgrupo de orden no divisible por p sobre el que actúa un p-grupo P.

Recordamos que el normalizador $\mathbf{N}_G(H)$ de un subgrupo $H \leq G$ es el conjunto de elementos $g \in G$ tales que $P^g = P$. Es decir, $\mathbf{N}_G(H)$ es el mayor subgrupo de G en el que H es normal.

TEOREMA 1 (Frobenius). *Sea G un grupo finito y p un número primo. El grupo G es p-nilpotente si, y solo si, $\mathbf{N}_G(Q)$ es p-nilpotente para cada p-subgrupo $Q > 1$ de G.*

Este teorema nos dice que la p-nilpotencia de un grupo es una propiedad local. Queremos destacar que la condición sobre los normalizadores en el teorema de Frobenius debe ser verificada para cada p-subgrupo no trivial, y no solo para un p-subgrupo de Sylow. De hecho, gran parte de los grupos finitos simples satisface que $\mathbf{N}_G(P) = P$ donde P es un 2-subgrupo de Sylow de G.

En teoría de representaciones de grupos finitos existe una serie de conjeturas de tipo global-local con profundas conexiones entre sí conocidas como conjeturas de conteo (*Counting Conjectures* en inglés). La idea, en este caso, es contar ciertos invariantes numéricos de un grupo asociados a sus representaciones estudiando únicamente las representaciones de sus subgrupos locales. Tenemos que pensar que la estructura normal de los subgrupos locales es más rica que la del grupo original. El ejemplo extremo es el caso de los grupos simples. La conjetura de pesos de Alperin [2] es una de estas conjeturas de conteo, como también lo son la conjetura de McKay [17] y la conjetura ordinaria de Dade [6].

2. REPRESENTACIONES Y CARACTERES

Para poder adentrarnos en el misterioso mundo de las conjeturas de conteo debemos introducir brevemente dos de los principales objetos de estudio de la teoría de representaciones de grupos finitos: las representaciones y los caracteres. El propósito básico en teoría de representaciones de grupos finitos es estudiar los grupos a través de sus acciones lineales sobre espacios vectoriales finito-dimensionales. Por cuestiones técnicas consideraremos siempre que estos espacios vectoriales están definidos sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado.

2.1. REPRESENTACIONES

Una representación de G es un homomorfismo

$$\rho \colon G \to \mathrm{GL}_n(K).$$

Cuando K tiene característica cero (en esta nota $K = \mathbb{C}$) decimos que ρ es una representación ordinaria. Cuando K tiene característica $p > 0$ decimos que ρ es una representación modular. R. Brauer introdujo los bloques como método para estudiar simultáneamente las representaciones ordinarias y modulares de un grupo dado. Aunque no pretendemos ahondar en la teoría de bloques en esta exposición, haremos algunos apuntes sobre ella en la sección 3.3.1.

Una representación induce una acción del grupo sobre el espacio vectorial subyacente $V = K^n$, y cada acción lineal sobre un K-espacio vectorial V finito-dimensional tiene asociada una representación tras la elección de una base de V. Dos representaciones asociadas a la misma acción lineal sobre V se dicen equivalentes. Es decir, ρ y ρ' son equivalentes si existe una matriz invertible M sobre K de modo que $\rho'(g) = M^{-1}\rho(g)M$ para cada $g \in G$.

Una representación $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(K)$ se dice irreducible si la acción de G sobre K^n que induce no tiene subespacios invariantes propios. Si ρ es ordinaria, esto es equivalente a que K^n se descomponga como suma directa de subespacios G-invariantes por un teorema de Maschke.

A partir de ahora, fijamos un número primo p arbitrario. Denotaremos por $k(G)$ y $l(G)$ el número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles ordinarias y modulares, respectivamente. Los invariantes $k(G)$ y $l(G)$ pueden calcularse atendiendo únicamente a la estructura del grupo: $k(G)$ es el número de clases de conjugación de G por un teorema de Wedderburn, mientras que $l(G)$ es el número de clases de conjugación de elementos de G de orden no divisible por p (elementos p-regulares de G) según probó R. Brauer.

La conjetura de pesos de Alperin propone un método para calcular $l(G)$ contando un invariante específico en los normalizadores de p-subgrupos de G (casi localmente, porque no excluimos al p-subgrupo trivial). Existen diversas formulaciones de esta conjetura (en términos de caracteres, módulos, sumas alternadas, sistemas de fusión, etcétera). En esta exposición comenzaremos presentando una formulación en términos de caracteres.

2.2. Caracteres

Dada una representación ordinaria $\rho\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, el carácter que esta origina es la función $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ dada por la traza de ρ. Esto es, $\chi(g) = \mathrm{Traza}(\rho(g))$ para cada $g \in G$. Como $\rho(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tiene orden finito, entonces $\rho(g)$ es diagonalizable y el valor $\chi(g)$ es una suma de raíces de la unidad. El valor más importante de un carácter es su grado, la evaluación del carácter en el elemento trivial de G. El grado $\chi(1)$ de χ, por tanto, se corresponde con la dimensión de cualquier representación que origina χ.

Representaciones equivalentes originan el mismo carácter puesto que la traza es un invariante de semejanza. Aún más, el carácter determina la representación que lo origina en el sentido de que dos representaciones originan el mismo carácter si, y solo si, son equivalentes.

Decimos que un carácter χ es irreducible, y escribimos $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, si χ está originado por una representación irreducible. Esto es equivalente a que χ no pueda escribirse como $\alpha + \beta$ con α y β caracteres de G. Por todo lo que hemos comentado se sigue que

$$|\,\mathrm{Irr}(G)| = k(G).$$

Los grados de caracteres irreducibles satisfacen propiedades numéricas fascinantes, entre ellas destacamos

$$\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \chi(1)^2 = |G|$$

y

$$\chi(1) \mid |G|. \tag{1}$$

Es decir, la suma de los cuadrados de los grados de los caracteres irreducibles es igual al orden del grupo y los grados de caracteres irreducibles dividen al orden del grupo.

Los caracteres lineales de G son aquellos que tienen grado 1 (y que, por tanto, coinciden con la representación que los origina). El conjunto de caracteres lineales se denota por $\mathrm{Lin}(G)$. Evidentemente $\mathrm{Lin}(G) \subseteq \mathrm{Irr}(G)$. Además, se cumple que

$$\mathrm{Lin}(G) = |G : G'|,$$

donde $G' = [G, G]$ es el subgrupo derivado de G. En particular, un grupo G es abeliano si, y solo si, todo carácter irreducible es lineal. También vemos que G es perfecto (es decir, $G = G'$) si, y solo si, el único carácter lineal del grupo es el carácter principal $\mathbf{1}_G$ asociado a la acción trivial de G sobre $\mathbb{C}$.

Una definición importante para esta exposición, ligada a la noción de grado y relativa a un primo fijado p, es la de defecto de un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Fijemos, por tanto, un primo p y supongamos que $|G| = p^a m$, con $(p, m) = 1$. Dado un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, por la ecuación (1) sabemos que $|G|/\chi(1) \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $1 \leq |G|/\chi(1) = p^d \leq p^a$. Decimos entonces que χ tiene defecto d. Como el lector habrá notado, la noción de defecto de un carácter irreducible depende del primo p. Si queremos hacer explícita esta dependencia, porque pueda haber lugar a confusión, hablaremos de p-defecto de un carácter. Sin embargo, a lo largo de esta exposición consideraremos sobrentendido el primo p con respecto al que trabajamos. Dado un entero no negativo d, denotaremos por $k_d(G)$ al número de caracteres irreducibles de G con defecto d. Es decir,

$$k_d(G) = \big|\{\chi \in \mathrm{Irr}(G) \mid (\chi(1), p^a) = p^{a-d}\}\big|.$$

Vemos que $k_d(G) = 0$ siempre que $d > a$ y también que

$$k(G) = k_0(G) + \cdots + k_a(G).$$

Los casos extremos en cuanto a defecto son los caracteres con defecto cero, que estudiaremos en el próximo apartado, y los caracteres con defecto maximal. Estos últimos son exactamente los caracteres cuyo grado es no divisible por p. La conjetura de McKay establece que el invariante $k_a(G)$ es local. Aún más, propone que es suficiente conocer su valor en el normalizador de un p-subgrupo de Sylow para conocer su valor global.

CONJETURA DE MCKAY. *Sea G un grupo finito y p un número primo. Supongamos que $|G| = p^a m$ con $(p, m) = 1$. Entonces*

$$k_a(G) = k_a(\mathbf{N}_G(P)).$$

La conjetura de McKay atrajo inmediatamente el interés de la comunidad matemática. A pesar de haber sido verificada para una gran cantidad de familias de grupos finitos (todos los simples, simétricos, resolubles, etc.), hasta 2007 no se presentó un método que aspirara a probar la conjetura en total generalidad. Este método, propuesto por I. M. Isaacs, G. Malle y G. Navarro en [10], ha dado como fruto uno de los resultados más importantes de la teoría de representaciones del presente siglo: G. Malle y B. Späth [16] han probado que la conjetura de McKay es cierta para $p = 2$ basándose en él. La idea fundamental es hacer uso de la clasificación de los grupos simples (remitimos al lector a la sección 3.1 para más comentarios al respecto).

Llegados a este punto de la exposición, el lector habrá notado que hemos considerado únicamente caracteres asociados a representaciones ordinarias. R. Brauer definió la noción de carácter para representaciones modulares. Estos se conocen como caracteres de Brauer. Un carácter φ de Brauer es una función $\varphi\colon G^0 \to \mathbb{C}$ asociada a una representación modular de G, donde G^0 es el conjunto de elementos p-regulares de G. La elección del cuerpo K de característica p es importante en este caso. El lector interesado puede consultar la construcción de los caracteres de Brauer, así como propiedades que comparten con los caracteres ordinarios, en [19, capítulos 2 y 8]. Hay muchas propiedades importantes de los caracteres ordinarios que los caracteres de Brauer no satisfacen, como aquellas relacionadas con los grados. Por ejemplo, las representaciones modulares irreducibles originan caracteres de Brauer irreducibles, y el conjunto que estos conforman se denota comúnmente por $\mathrm{IBr}(G)$. Si $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$, en general $\varphi(1)$ no divide al orden del grupo. Sí se cumple que $l(G) = |\mathrm{IBr}(G)|$, como en el caso ordinario. A pesar de este hecho, y de que estamos interesados en contar $l(G)$, no necesitaremos en esta exposición trabajar con caracteres de Brauer.

2.3. Caracteres de defecto cero

Es importante notar que el número $k_0(G)$ de caracteres irreducibles con defecto cero de G no es un invariante local. Si pensamos en un grupo G de orden no divisible por p, tenemos que $k_0(G) = k(G)$, pero el grupo G no tiene estructura p-local, porque no tiene p-subgrupos no triviales.

Recordamos que un carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ tiene defecto cero si $\chi(1)_p = |G|_p$. Aquí estamos denotando por n_p la p-parte del entero n, es decir, la mayor potencia de p que divide a n. Un teorema de Brauer y Nesbitt [21, teorema 4.6] garantiza que los caracteres de defecto cero toman el valor 0 sobre elementos de orden divisible por p. Knörr probó que esta propiedad los caracteriza [21, corolario 4.7].

Teorema 2 (Brauer-Nesbitt-Knörr). *Sea G un grupo finito y p un número primo. Dado $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *χ tiene defecto cero.*
2. *$\chi(g) = 0$ para cada $g \in G$ con orden divisible por p.*

Los caracteres de defecto cero representan un papel importante en problemas de diversa naturaleza en teoría de representaciones. En 1963, R. Brauer escribió un influyente artículo en el que recopilaba una serie de problemas abiertos en teoría de representaciones de grupos finitos (entre estos problemas figuran la conjetura $k(B)$ y la conjetura de altura cero, ambos importantes problemas abiertos en el área). En el problema 19 de esta lista, Brauer propone caracterizar el número $k_0(G)$ a través de propiedades estructurales del grupo. G. Robinson resolvió este problema en [26], probando que $k_0(G)$ es el rango de una cierta matriz definida sobre el cuerpo de p elementos que depende únicamente de propiedades del grupo G. Desafortunadamente, es difícil calcular el rango de dicha matriz en muchos grupos. En 1996, Granville y Ono [8] culminaron un trabajo colectivo clasificando los grupos finitos simples que admiten un carácter de defecto cero.

Se puede ver que el teorema de Brauer-Nesbitt-Knörr impone una restricción importante sobre la estructura normal de un grupo que admite un carácter de defecto cero. Esta restricción estructural tiene consecuencias importantes en el contexto de la conjetura de pesos de Alperin. En lo que sigue, denotamos por $\mathbf{O}_p(G)$ al mayor subgrupo normal de G de orden potencia de p.

TEOREMA 3. *Si G admite un carácter irreducible χ con defecto cero (con respecto al primo p), entonces $\mathbf{O}_p(G) = 1$.*

Como hemos comentado, el enunciado de la conjetura de pesos de Alperin nos proporcionará un método para contar $l(G)$, el número de clases de equivalencia de representaciones modulares irreducibles de G. Además, como enunciado global-local, predice que el invariante $l(G) - k_0(G)$ es de tipo local.

3. La conjetura de pesos de Alperin

Alperin formuló su conjetura inspirado por el estudio de las representaciones modulares en grupos de tipo Lie. De hecho, parece que eligió el término «pesos» debido a que, en un grupo finito de tipo Lie, los caracteres irreducibles de Brauer (relativos a la característica que define dicho grupo) están en correspondencia biyectiva con los pesos (restringidos) del correspondiente grupo algebraico lineal [15].

DEFINICIÓN (Peso). *Sea G un grupo y p un primo, un peso (relativo a p) de G es un par (Q, γ), donde Q es un p-subgrupo de G y $\gamma \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_G(Q)/Q)$ es un carácter con defecto cero.*

En el caso en que $Q = 1$ tenemos que $(1, \chi)$ es un peso de G si, y solo si, $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ es un carácter de defecto cero. En el otro caso extremo, si Q es un p-subgrupo de Sylow, vemos que para cada $\gamma \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_G(Q)/Q)$ se tiene que (Q, γ) es un peso de G puesto que $\mathbf{N}_G(Q)/Q$ es un grupo de orden no divisible por p. En general, dado un p-subgrupo Q de G, el número de pesos (Q, γ) es exactamente $k_0(\mathbf{N}_G(Q)/Q)$.

LEMA. *Si (Q, γ) es un peso de G (relativo al primo p), entonces $\mathbf{O}_p(\mathbf{N}_G(Q)) = Q$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $L = \mathbf{O}_p(\mathbf{N}_G(Q))$, de modo que $Q \subseteq L \leq \mathbf{N}_G(Q)$ y L/Q es un p-subgrupo normal de $\mathbf{N}_G(Q)/Q$. Por definición de peso, el carácter $\gamma \in \mathrm{Irr}(\mathbf{N}_G(Q)/Q)$ tiene defecto cero. Por el teorema 3 tenemos que

$$1 = \mathbf{O}_p(\mathbf{N}_G(Q)/Q) \supseteq L/Q,$$

de donde se sigue que $L = Q$. □

Los p-subgrupos Q de un grupo G que satisfacen $\mathbf{O}_p(\mathbf{N}_G(Q)) = Q$ se denominan subgrupos p-radicales de G. Así que en un peso (Q, γ) el subgrupo Q es p-radical.

Notamos también que si (Q, γ) es un peso de G y $g \in G$, entonces $(Q, \gamma)^g = (Q^g, \gamma^g)$ es otro peso de G, donde $\gamma^g(x) = \gamma(gxg^{-1})$ para cada $x \in \mathbf{N}_G(Q)/Q$. De modo que G actúa por conjugación sobre sus pesos.

Finalmente estamos en condiciones de poder enunciar la conjetura de pesos de Alperin [2], que este anunció durante «The Arcata Conference on Representations of Finite Groups» en 1986.

Conjetura de pesos de Alperin. *Sea G un grupo, p un primo y Ω un sistema de representantes de las órbitas bajo la acción por conjugación de G sobre sus subgrupos p-radicales. Entonces*

$$l(G) = \sum_{Q \in \Omega} k_0(\mathbf{N}_G(Q)/Q). \tag{2}$$

Si tomamos $Q = 1$ el número de pesos $(1, \gamma)$ es exactamente el número $k_0(G)$ de caracteres irreducibles con defecto cero de G, un invariante no local. Con la notación de la conjetura de pesos de Alperin, si consideramos $\Omega_0 = \Omega \setminus \{1\}$ entonces la ecuación (2) se puede reescribir como

$$l(G) - k_0(G) = \sum_{Q \in \Omega_0} k_0(\mathbf{N}_G(Q)/Q).$$

El segundo miembro de la ecuación anterior sí es local, en el sentido esbozado al comienzo de esta nota. Por tanto, la conjetura de pesos de Alperin predice que el invariante $l(G)-k_0(G)$ es local (veremos una forma precisa de entender este resultado en la sección 3.2). El lector puede preguntarse cómo se relacionan los caracteres de defecto cero con las representaciones modulares. Cada carácter $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ de defecto cero se corresponde con una representación modular irreducible de G; por tanto, con un carácter irreducible de Brauer $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$. En este sentido, el número $l(G)-k_0(G)$ cuenta las representaciones irreducibles modulares de G que no están asociadas a caracteres de defecto cero de G.

Como ya pasó con la conjetura de McKay, el enunciado de la conjetura de pesos de Alperin atrajo el interés de los expertos de forma inmediata. La simplicidad aparente de su enunciado escondía una gran complejidad conceptual, que aún hoy no parece haber sido desvelada. En 1988, Cabanes [4] probó la conjetura de pesos de Alperin en grupos de tipo Lie $G(p^f)$ con respecto al primo p. En 1990, Alperin y Fong [3] probaron la conjetura para los grupos simétricos S_n y generales lineales $\mathrm{GL}_n(q)$ con respecto a cualquier primo p coprimo con q. En 1995, Isaacs y Navarro [11] probaron la conjetura para grupos p-resolubles (completando así algunos argumentos aparecidos previamente en la literatura basados en trabajos nunca publicados) con respecto al primo p.

Basándose en el método de resolución de la conjetura de McKay [10], Navarro y Tiep propusieron en 2011 un método para probar la conjetura de pesos de Alperin [23] del que hablaremos a continuación.

3.1. UN TEOREMA DE REDUCCIÓN

La clasificación de los grupos finitos simples (CGFS, en siglas) es uno de los resultados más importantes de la matemática contemporánea y fue completada a comienzos del siglo XXI. La CGFS impulsó un enorme progreso en la teoría de representación de grupos finitos. Un ejemplo muy claro de lo que queremos decir es la prueba del llamado teorema de Itô-Michler.

TEOREMA 4 (Itô-Michler). *Sea G un grupo finito con $|G|_p = p^a$ y P un p-subgrupo de Sylow de G. Entonces P es normal en G y abeliano si, y solo si, $k_a(G) = k(G)$.*

La implicación directa se sigue del argumento de Itô, un resultado elemental. La implicación indirecta es mucho más profunda. Nos dice que un grupo G en el que todo carácter irreducible χ tiene grado $\chi(1)$ coprimo con p, tiene un único p-subgrupo de Sylow P y este es abeliano. La conmutatividad de P se sigue de su unicidad, así que la clave es mostrar que P es normal. La implicación indirecta tiene una reducción directa a grupos simples, en el sentido de que el enunciado se cumple en general si podemos verificarlo en grupos simples [9, teorema 12.33]. Es decir, para probar esta implicación basta probar que todo grupo simple admite un carácter χ irreducible de grado divisible por p (para cada primo p que divide a su orden). Esto es exactamente lo que probó Michler [18].

Puesto que los grupos finitos simples son las componentes atómicas de los grupos finitos, Isaacs, Malle y Navarro se propusieron reducir la prueba de la conjetura de McKay a un problema relativo únicamente a grupos simples. A diferencia de lo que ocurre con el teorema de Itô-Michler, descubrieron que no parecía bastar con que los grupos simples satisficieran el enunciado de la conjetura, sino que estos debían satisfacer lo que ahora se conoce como condiciones inductivas para McKay (abreviadas como iMc, de *inductive McKay conditions*). El teorema de reducción para la conjetura de McKay dice que si los grupos finitos simples satisfacen las iMc, entonces la conjetura de McKay es válida para todo grupo finito. Para verificar las iMc con respecto a un grupo simple S y a un número primo p hay que verificar fundamentalmente dos condiciones:

(i) Todo grupo perfecto X que es una extensión central de S satisface una versión fuerte de la conjetura de McKay con respecto a p (que respeta caracteres centrales y la acción de los automorfismos de S que establizan un p-subgrupo de Sylow de S).

(ii) Una condición cohomológica entre caracteres de X y del normalizador de un p-subgrupo de Sylow de X.

Si N es un grupo normal de G y $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ es tal que $\theta(gxg^{-1}) = \theta(x)$ para todo $x \in N$ y para todo $g \in G$, se dice que θ es G-invariante. En tal caso, la terna (G, N, θ) define un elemento α en el segundo grupo de cohomología $H^2(G/N, \mathbb{C}^\times)$ (con respecto a la acción trivial de G/N). Resulta que α «controla» los caracteres de G que se encuentran por encima de θ. Al grupo $H^2(G/N, \mathbb{C}^\times)$ se le conoce como multiplicador de Schur de G/N. La condición (ii) está enunciada en términos de igualdad de elementos en multiplicadores de Schur.

Las iMc son extremadamente técnicas, como el lector puede comprobar, y no pretendemos profundizar en ellas. Lo que sí nos parece interesante comentar es que Späth presentó en [28] una reformulación de la condición (ii) en términos de representaciones proyectivas que ha resultado ser clave para la verificación de las iMc en diferentes familias de grupos simples.

A pesar de su complejidad técnica, el teorema de reducción para la conjetura de McKay es uno de los resultados más importantes en teoría de representaciones de grupos finitos de las últimas décadas. Como ya hemos comentado anteriormente, Malle y Späth han probado la conjetura de McKay para $p = 2$ [16] apelando a él. Además, supuso un gran impulso para el resto de conjeturas de conteo, ya que abrió la puerta a encontrar teoremas de reducción para las mismas. De hecho, Navarro y Tiep presentaron cuatro años más tarde un teorema de reducción para la conjetura de pesos de Alperin. Usando este teorema de reducción, y analizando algunas familias de grupos simples, Navarro y Tiep probaron en el mismo artículo que cualquier grupo finito G con 2-subgrupos de Sylow abelianos satisface la conjetura de pesos de Alperin con respecto a cualquier primo p. De manera análoga al teorema de reducción para la conjetura de McKay, la idea es que si los grupos finitos simples satisfacen las condiciones inductivas para Alperin (iAWc, de *inductive Alperin-weight conditions*) entonces la conjetura de pesos de Alperin es cierta.

No sorprenderá al lector que la naturaleza de las iAWc sea aún más técnica que la de las iMc, visto que el enunciado de la conjetura de pesos de Alperin es más complejo que el de la conjetura de McKay. Para probar un teorema de reducción es necesario contar con una versión «proyectiva» o «relativa» de la conjetura, ya que esto permite usar potentes argumentos inductivos. Es decir, fijado un subgrupo normal N de G y un carácter $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$ conveniente, queremos contar caracteres que se encuentran por encima del carácter θ; en el sentido de que la restricción a N de los mismos es una suma de caracteres irreducibles entre los que aparece θ. En el caso de la conjetura de McKay, la versión proyectiva es muy natural (ver [10, conjetura C]); en el caso de la conjetura de pesos de Alperin, la versión proyectiva requiere un poco más de esfuerzo. Por un lado, hay que trabajar con pesos relativos a caracteres de defecto cero de N. Otra característica especial del teorema de reducción de la AWC es la necesidad de asociar a cada carácter irreducible de Brauer $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ una clase de conjugación de p-subgrupos radicales de G, que de algún modo generaliza la teoría de vértices de Green para representaciones modulares.

Dado un grupo simple S, las iAWc están enunciadas para grupos perfectos X que son una extensión central de S. Navarro y Tiep subdividen las iAWc en tres clases [23, § 3]:

(i) Condiciones de partición: Existe una partición de $\mathrm{IBr}(X)$ en términos de clases de conjugación de p-subgrupos radicales de X que respeta caracteres centrales y la acción de automorfismos de S que estabilizan un p-subgrupo de Sylow de S.

(ii) Condición de biyección: Existen biyecciones entre los miembros de la partición en (i) y pesos relativos con propiedades especiales (una versión fuerte de la conjetura).

(iii) Condiciones de embebimiento normal: Incluye una condición de igualdad de elementos en multiplicadores de Schur.

Aunque no hemos enunciado las condiciones inductivas para McKay y Alperin formalmente, el lector puede apreciar un cierto paralelismo. De hecho, Cabanes [5] probó que las ideas de Späth para simplificar las iMc podían aplicarse también al teorema de reducción de la conjetura de pesos de Alperin. Recientemente, Brough y Späth han presentado un criterio que simplifica aún más la verificación de las iAWc, lo que ha dado lugar a una serie de artículos en los que diversos autores prueban las iAWc para distintas familias de grupos simples de tipo Lie (evitamos aquí enumerar estas contribuciones puesto que en su mayoría no han sido aún publicadas).

3.2. Cadenas de p-subgrupos y funciones locales

La conjetura de pesos de Alperin admite diversas reformulaciones. Una de las más importantes es la propuesta por Knörr y Robinson [14] en 1989. La reformulación de Knörr-Robinson introduce la perspectiva de las sumas alternadas sobre cadenas de p-subgrupos, e inspiró a Dade a formular una serie de conjeturas de dificultad creciente que pretendían explicar el resto de conjeturas de conteo.

Para enunciar la reformulación de Knörr-Robinson de la conjetura de pesos de Alperin, así como la conjetura ordinaria de Dade, necesitamos introducir algunos conceptos.

Sea G un grupo finito y p un primo. Una cadena C de p-subgrupos de G es

$$C\colon 1 = P_0 < P_1 < \cdots < P_n,$$

donde P_i son p-subgrupos de G. La longitud $|C|$ de la cadena C es el número de desigualdades estrictas en C. Si denotamos por $\mathcal{C}(G)$ al conjunto de cadenas de p-subgrupos de G, tenemos que G actúa sobre $\mathcal{C}(G)$ por conjugación según $C^g : 1 = P_0^g < P_1^g < \cdots P_n^g$ y $|C^g| = |C|$. El estabilizador de la cadena C bajo esta acción es

$$G_C = \bigcap_{i=0}^{n} \mathbf{N}_G(P_i).$$

En particular, si $|C| > 0$ entonces G_C es una intersección de normalizadores de p-subgrupos no triviales.

Denotamos ahora por $\mathcal{G}$ al conjunto de grupos finitos. Dada una función $f\colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ con $f(G_1) = f(G_2)$ si $G_1 \cong G_2$, definimos la función $f^*\colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ según

$$f^*(G) = \sum_{C \in \mathcal{C}(G)} (-1)^{|C|} \frac{|G_C|}{|G|} f(G_C).$$

Puesto que $G_{C^g} = (G_C)^g \cong G_C$, por el teorema de la órbita-estabilizador, si Ω es un sistema completo de representantes de las órbitas de $\mathcal{C}(G)$ bajo la acción de G, entonces

$$f^*(G) = \sum_{C \in \Omega} (-1)^{|C|} f(G_C).$$

En la definición de f^* podemos sustituir $\mathcal{C}(G)$ por el conjunto $\mathcal{N}(G)$ de cadenas normales de p-subgrupos (cadenas C en las que todo P_i es normal en P_n), e incluso por el conjunto $\mathcal{E}(G)$ de cadenas de p-subgrupos elementales abelianos (cadenas C en las que P_n es elemental abeliano) [14, proposición 3.3]. Como consecuencia de este hecho, se puede probar el siguiente resultado [21, teorema 9.16].

Teorema 5. *Con la notación anterior, si* $\mathbf{O}_p(G) > 1$ *entonces* $f^*(G) = 0$.

Consideramos la función $k_0 \colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ dada por el número de caracteres de defecto cero de $G \in \mathcal{G}$. Si C es una cadena normal de p-subgrupos de G de longitud $n > 0$, entonces $\mathbf{O}_p(G_C) \supseteq P_n > 1$. Por el teorema 3, tenemos que $k_0(G_C) = 0$. Por tanto, $k_0^*(G) = k_0(G)$ para todo $G \in \mathcal{G}$. Es decir, $k_0^* = k_0$.

Definición (Función local). *Decimos que una función* $f \colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ *con* $f(G_1) = f(G_2)$ *si* $G_1 \cong G_2$ *es local si* $f^* = 0$.

Hemos visto que k_0 no es una función local ya que $k_0^* = k_0$ y existen grupos con caracteres de defecto cero para cualquier primo p; por ejemplo, los grupos simples de tipo Lie. Remitimos al lector interesado en el concepto de función local, tal y como lo hemos definido más arriba, a [12].

En el siguiente resultado, consideramos la función $l \colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ dada por el número de clases de equivalencia de representaciones modulares irreducibles de $G \in \mathcal{G}$; es decir, tal que $l(G) = |\mathrm{IBr}(G)|$.

Teorema 6 (Reformulación de Knörr-Robinson). *La conjetura de pesos de Alperin es cierta si, y solo si, la función* $l - k_0$ *es local.*

La reformulación anterior sigue estando enunciada en términos de representaciones modulares. Recordemos que el número $l(G) - k_0(G)$ es el número de clases de equivalencia de representaciones modulares irreducibles de G que no están asociadas a un carácter de G de defecto cero. Lo que resulta aún más sorprendente es que, usando cadenas de p-subgrupos y sumas alternadas (complejos simpliciales asociados a la estructura local de un grupo), la conjetura de pesos de Alperin se puede reformular en términos de representaciones ordinarias. Concretamente, Knörr y Robinson mostraron que, en el teorema anterior, la función l se puede sustituir por la función k, dada por $k(G) = |\operatorname{Irr}(G)|$.

Teorema 7 (Reformulación de Knörr-Robinson II). *La conjetura de pesos de Alperin es cierta si, y solo si, la función* $k - k_0$ *es local.*

Las cadenas (normales, elementales) de p-subgrupos dotan de una estructura de complejo simplicial al conjunto de p-subgrupos de G. Estos complejos simpliciales habían sido estudiados por Brown, Quillen y Bouc (ver [14, § 2]), entre otros. Knörr y Robinson tuvieron la brillante idea de relacionar estos conceptos con la conjetura de pesos de Alperin. Veremos cómo esta idea inspiró, además, la conjetura ordinaria de Dade [6].

Notamos que $k - k_0 = \sum_{d>0} k_d$, donde la función $k_d \colon \mathcal{G} \to \mathbb{Z}$ asigna a cada grupo finito G el número $k_d(G)$ de caracteres irreducibles de G con defecto d. La reformulación de Knörr-Robinson de la conjetura de pesos de Alperin predice que la función $k - k_0$ es local. La conjetura ordinaria que Dade propuso en [6] puede ser simplificada en los siguientes términos (ver [21, conjetura 9.5]).

Conjetura ordinaria de Dade. *Si $d > 0$, entonces la función k_d es local.*

No es difícil comprobar que la conjetura ordinaria de Dade, tal y como la hemos enunciado, implica la conjetura de pesos de Alperin. Por otro lado, si $|G|_p = p^a$, la conjetura ordinaria de Dade nos dice que $k_a^*(G) = 0$. En particular,

$$k_a(G) = \sum_{\substack{C \in \mathcal{C}(G) \\ |C| \neq 0}} (-1)^{|C|} k_a(G_C).$$

Es decir, el invariante $k_a(G)$ puede ser expresado como suma alternada de $k_a(H)$ donde H es una intersección de normalizadores de p-subgrupos no triviales de G. Recordemos que la conjetura de McKay predice que $k_a(G) = k_a(\mathbf{N}_G(P))$ donde P es un p-subgrupo de Sylow de G, una forma mucho más precisa de expresar $k_a(G)$ de forma local. Recientemente, G. Navarro ha probado que el enunciado de la conjetura ordinaria de Dade implica la igualdad $k_a(G) = k_a(\mathbf{N}_G(P))$ en [21, teorema 9.27].

La conjetura ordinaria de Dade es la más sencilla de una serie de conjeturas que Dade propuso a lo largo de la década de los noventa del pasado siglo [6, 7]. Su enunciado ha recibido menor atención que el enunciado de la versión proyectiva (por ejemplo, no cuenta con su propio teorema de reducción). Sin embargo, hemos visto que generaliza tanto la conjetura de McKay como la conjetura de pesos de Alperin.

3.3. Bloques y otras generalizaciones

La conjetura de pesos de Alperin admite generalizaciones muy diversas, algunas surgidas a partir de la reformulación de Knörr-Robinson, y otras sugeridas por generalizaciones de otros problemas globales-locales. Sin duda, la generalización más importante de la conjetura de pesos de Alperin es su versión para bloques. El lector interesado puede leer otras exposiciones al respecto, por ejemplo [15, § 4].

3.3.1. Bloques

Como ya hemos adelantado en esta nota, la teoría de bloques fue introducida por Brauer con el propósito de estudiar simultáneamente las representaciones ordinarias y modulares (con respecto a un primo fijado p) de un grupo finito dado. Brauer introdujo los bloques desde la perspectiva de los caracteres, aunque cada vez está más extendido el estudio de los bloques desde el punto de vista de las álgebras. Veamos sucintamente cómo aparecen los bloques en teoría de representaciones de grupos finitos.

Denotamos por R el anillo de enteros algebraicos de $\mathbb{C}$. Si escogemos un ideal maximal M de R con $p \in M$, se tiene que $\mathbb{F} = R/M$ es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica p. Si G es un grupo finito de orden divisible por p, entonces el álgebra de grupo $\mathbb{F}G$ no es semisimple y, por tanto, no se descompone como suma directa de álgebras de matrices sobre $\mathbb{F}$. A cambio, el álgebra $\mathbb{F}G$ tiene un número finito t de ideales minimales B_i y se descompone como

$$\mathbb{F}G = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t.$$

Los ideales minimales B_i, que tienen estructura de álgebra, se conocen como los bloques de G (con respecto a p). Escribimos $\mathrm{Bl}(G) = \{B_1, \ldots, B_t\}$. La descomposición de $\mathbb{F}G$ en bloques induce particiones de los conjuntos $\mathrm{Irr}(G)$ e $\mathrm{IBr}(G)$ según

$$\mathrm{Irr}(G) = \dot{\bigcup}_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Irr}(B) \quad \text{y} \quad \mathrm{IBr}(G) = \dot{\bigcup}_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{IBr}(B).$$

Contrariamente a lo que ocurre con $k(G)$ y $l(G)$, no hay una forma de entender los invariantes $k(B) = |\mathrm{Irr}(B)|$ y $l(B) = |\mathrm{IBr}(B)|$ de un bloque atendiendo únicamente a la estructura de G como grupo.

Un bloque $B \in \mathrm{Bl}(G)$ define una clase de conjugación de p-subgrupos de G llamados grupos de defecto de B. Si D es un grupo de defecto de B entonces escribimos $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$. De algún modo, la complejidad estructural de D es una medida de la complejidad del bloque B. Por ejemplo, B tiene defecto $D = 1$ si, y solo si, B es un álgebra simple (que a su vez es equivalente a que $k(B) = 1$ o a que $\mathrm{Irr}(B)$ contenga un carácter de defecto cero).

Brauer caracterizó los p-subgrupos de G que son grupo de defecto de algún bloque de G. Para entender esta caracterización necesitamos definir el estabilizador de un carácter. Si N es un subgrupo normal de G y $\theta \in \mathrm{Irr}(N)$, escribimos G_θ para denotar el estabilizador de θ bajo la acción de G sobre $\mathrm{Irr}(N)$ por conjugación. Es decir, $G_\theta = \{g \in G \mid \theta(gng^{-1}) = \theta(n) \text{ para todo } n \in N\}$.

Teorema 8. *Sea Q un p-subgrupo de G. Se tiene que Q es el grupo de defecto de algún bloque de G si, y solo si, existe un $\theta \in \mathrm{Irr}(Q\mathbf{C}_G(Q)/Q)$ con defecto cero y tal que $\mathbf{N}_G(Q)_\theta/Q\mathbf{C}_G(Q)$ es un grupo de orden coprimo con p.*

Como consecuencia del teorema anterior, el número $|\mathrm{Bl}(G)|$ de bloques de G es igual al número de clases de conjugación de pares (Q, θ) donde Q es un p-subgrupo y $\theta \in \mathrm{Irr}(Q\mathbf{C}_G(Q)/Q)$ es un carácter con defecto cero y tal que $\mathbf{N}_G(Q)_\theta/Q\mathbf{C}_G(Q)$ es un grupo de orden coprimo con p. Además, un par (Q, θ) con las características anteriores determina un único bloque $B_\theta \in \mathrm{Bl}(G|Q)$. Del mismo modo, (Q, θ) determina un único $b_\theta \in \mathrm{Bl}(\mathbf{N}_G(Q)|Q)$. Los bloques B_θ y b_θ se conocen como correspondientes de Brauer, y están relacionados a través del primer teorema fundamental de Brauer.

En 1976, Alperin [1] introdujo los bloques en el contexto de la conjetura de-McKay. La conjetura de Alperin-McKay propone que los números de caracteres irreducibles con grado minimal de un bloque B y de su correspondiente de Brauer b son iguales. Notamos que $\mathrm{Irr}(B)$ no contiene necesariamente caracteres de grado coprimo con p. De hecho, si $B \in \mathrm{Bl}(G|D)$, entonces $\text{mín}\{\chi(1)_p \mid \chi \in \mathrm{Irr}(B)\} = (|G|/|D|)_p$. En particular, los bloques que contienen caracteres de grado coprimo con p son exactamente los bloques con defecto un p-subgrupo de Sylow. Sumando sobre estos bloques, se puede ver que la conjetura de Alperin-McKay implica la conjetura de McKay.

La versión para bloques de la conjetura de pesos de Alperin establece un método para contar el número $l(B) = |\mathrm{IBr}(B)|$ de clases de equivalencia de representaciones modulares irreducibles. Para enunciarla, hay que tener en cuenta que dado un p-subgrupo Q de G y un subgrupo $H \leq G$ con $Q\mathbf{C}_G(Q) \leq H \leq \mathbf{N}_G(H)$, cada bloque b de H induce un bloque b^G de G. Dado un peso (Q, γ) de G, decimos que (Q, γ)

pertenece al bloque B, y escribimos $(Q,\gamma) \in B$, si el bloque de $\mathbf{N}_G(Q)$ al que pertenece γ induce B.

CONJETURA DE PESOS DE ALPERIN PARA BLOQUES. *Sea G un grupo, p un primo y B un bloque de G. Si Ω es un sistema de representantes de las órbitas bajo la acción por conjugación de G sobre sus subgrupos p-radicales, entonces*

$$l(B) = \sum_{\substack{Q\in\Omega \\ (Q,\gamma)\in B}} k_0(\mathbf{N}_G(Q)/Q).$$

La conjetura de pesos de Alperin para bloques también admite reformulaciones en términos de cadenas de p-subgrupos y funciones locales. Aún más, las conjeturas de Dade, incluyendo la conjetura ordinaria que hemos presentado en esta nota, fueron originalmente enunciadas en términos de bloques. Como en el caso libre de bloques, puede probarse que la conjetura ordinaria de Dade para bloques implica tanto la conjetura de pesos de Alperin para bloques como la conjetura de Alperin-McKay. Asimismo, la conjetura de pesos de Alperin para bloques ha motivado el estudio del concepto análogo de «pesos» en sistemas de fusión [13].

La conjetura de Alperin-McKay y la conjetura de pesos de Alperin para bloques cuentan con sendos teoremas de reducción, probados ambos por B. Späth [29, 30] en 2013.

3.3.2. ACCIÓN DE GALOIS

En 2004, Navarro introdujo la acción de automorfismos de Galois sobre caracteres en el contexto de las conjeturas de conteo [20]. El primo p con respecto al que trabajamos en los problemas globales-locales tiene gran importancia; así que cabe esperar que este primo también represente un papel importante al considerar esta nueva dimensión del problema.

Si pensamos en el enunciado de la conjetura de McKay, vemos que esta predice la existencia de una biyección entre los caracteres irreducibles de grado coprimo con p de un grupo G y el mismo conjunto de caracteres de $\mathbf{N}_G(P)$, donde P es un p-subgrupo de Sylow de G. A una biyección de este tipo la llamamos biyección de McKay. Como hemos comentado en el párrafo anterior, no cabe esperar que las biyecciones de McKay sean equivariantes con respecto a la acción del grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, ya que el primo p no representa un papel en la definición de este grupo de Galois. Podemos apreciar un ejemplo de este mal comportamiento en el grupo $G = \mathrm{GL}_2(3)$ para $p = 3$. En este caso, todos los caracteres de $\mathrm{Irr}(\mathbf{N}_G(P))$ de grado coprimo con 3, donde P es un 3-subgrupo de Sylow de G, tienen valores racionales; mientras que los caracteres $\mathrm{Irr}(G)$ de grado coprimo con 3 presentan irracionalidades.

Hemos definido los caracteres irreducibles ordinarios de un grupo usando el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Habríamos obtenido el mismo conjunto $\mathrm{Irr}(G)$ si en lugar de considerar representaciones complejas hubiéramos considerado representaciones sobre $\overline{\mathbb{Q}_p}$, la clausura algebraica del cuerpo de los números p-ádicos. De este modo, el grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ actúa sobre los caracteres irreducibles de cualquier grupo finito respetando sus grados. La conjetura de McKay-Navarro [20, conjetura A] propone la existencia de una biyección de McKay equivariante con respecto a la acción de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Dicho de otro modo, no solo debe ser posible establecer una correspondencia biyectiva entre caracteres irreducibles de grado coprimo con p de G y $\mathbf{N}_G(P)$, sino también entre los multiconjuntos formados por los cuerpos de valores sobre $\mathbb{Q}_p$ de dichos caracteres, donde por cuerpo de valor de χ entendemos la extensión de $\mathbb{Q}_p$ generada por los valores de χ.

Uno de los problemas más importantes en teoría de representaciones de grupos finitos es decidir qué propiedades locales de un grupo pueden caracterizarse atendiendo únicamente a los valores de sus caracteres irreducibles (siendo este problema, a su vez, una generalización del problema 12 de la influyente lista de problemas de Brauer, de la que hemos hablado anteriormente). La conjetura de McKay-Navarro ha supuesto una revolución en este campo [24, 27, 25]. Junto a Navarro y Späth, recientemente hemos reducido su verificación a un problema de grupos simples [22]. Navarro también propuso que la acción de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ debe respetar los conjuntos de caracteres involucrados en la conjetura de Alperin-McKay en [20, conjetura B]. Al final de su artículo, especula sobre la posibilidad de que la acción del grupo $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ sea suficientemente natural como para que la versión de la conjetura de pesos de Alperin con respecto a ella sea cierta. Poco se sabe sobre esta versión, más allá del hecho de que los grupos p-resolubles la satisfacen [31].

Esperamos haber convencido al lector de que la conjetura de pesos de Alperin es un problema fundamental en la teoría de representación de grupos finitos con ramificaciones a otras áreas de la matemática a través de sus reformulaciones y generalizaciones. Por esto, no bastará con demostrar su veracidad a través del estudio de los grupos simples, sino que será necesario entender todas sus variaciones para empezar a desentrañar el misterio de las conjeturas globales-locales.

Agradecimientos. Parte de esta exposición está inspirada en un curso que Gabriel Navarro impartió en el *Mathematical Science Research Institute* de Berkeley en 2018. Agradezco a Manuel J. Escolástico la corrección de algunas cuestiones de estilo relacionadas con el uso escrito del español, y a Gabriel Navarro por pertinentes sugerencias en torno a los temas tratados en esta exposición. Mi investigación está parcialmente subvencionada por los proyectos PID2019-103854GB-I00 y PID2020-118193GA-I00 financiados por el MCIN y la AEI.

Referencias

[1] J. L. Alperin, The main problem of block theory, *Proceedings of the Conference on Finite Groups, Univ. Utah, Park City, Utah (1975)*, 341–356, Academic Press, New York, 1976.

[2] J. L. Alperin, Weights for finite groups, *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups, Arcata, Calif. (1986)*, Proc. Sympos. Pure Math., 47, Part 1, 369–379, Amer. Math. Soc., Providence, 1987.

[3] J. L. Alperin y P. Fong, Weights for symmetric and general linear groups, *J. Algebra* **131** (1990), 2–22.

[4] M. Cabanes, Brauer morphism between modular Hecke algebras, *J. Algebra* **115** (1988), 1–31.

[5] M. Cabanes, Two remarks on the reduction of Alperin's weight conjecture, *Bull. Lond. Math. Soc.* **45** (2013), 895–906.

[6] E. C. Dade, Counting characters in blocks, I, *Invent. Math.* **109** (1992), 187–210.

[7] E. C. Dade, Counting characters in blocks, II, *J. Reine Angew. Math.* **448** (1994), 97–190.

[8] A. Granville y K. Ono, Defect zero p-blocks for finite simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (1996), 331–347.

[9] I. M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, reimpresión corregida del original de 1976 (Academic Press, New York), AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2006.

[10] I. M. Isaacs, G. Malle y G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, *Invent. Math.* **170** (2007), 33–101.

[11] I. M. Isaacs y G. Navarro, Weights and vertices for characters of π-separable groups, *J. Algebra* **177** (1995), 339–366.

[12] I. M. Isaacs y G. Navarro, Local functions on finite groups, *Represent. Theory* **24** (2020), 1–37.

[13] R. Kessar, M. Linckelmann, J. Lynd y J. Semeraro, Weight conjectures for fusion systems, *Adv. Math.* **357** (2019), 106825.

[14] R. Knörr y G. R. Robinson, Some remarks on a conjecture of Alperin, *J. London Math. Soc. (2)* **39** (1989), 48–60.

[15] G. Malle, Local-global conjectures in the representation theory of finite groups, *Representation theory – current trends and perspectives*, 519–539, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2017.

[16] G. Malle y B. Späth, Characters of odd degree, *Ann. of Math. (2)* **184** (2016), 869–908.

[17] J. McKay, Irreducible representations of odd degree, *J. Algebra* **20** (1972), 416–418.

[18] G. O. Michler, Brauer's conjectures and the classification of finite simple groups, *Representation theory, II (Ottawa, Ont., 1984)*, Lecture Notes in Math., 1178, Springer, Berlin, 1986, 129–142.

[19] G. Navarro, *Characters and blocks of finite groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 250, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[20] G. Navarro, The McKay conjecture and Galois automorphisms, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), 1129–1140.

[21] G. Navarro, *Character Theory and the McKay conjecture*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 175, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[22] G. Navarro, B. Späth y C. Vallejo, A reduction theorem for the Galois-McKay conjecture, *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (2020), no. 9, 6157–6183.

[23] G. Navarro y P. H. Tiep, A reduction theorem for the Alperin weight conjecture, *Invent. Math.* **184** (2011), 529–565.

[24] G. Navarro y P. H. Tiep, Sylow subgroups, exponents, and character values, *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), no. 6, 4263–4291.

[25] N. Rizo, A. A. Schaeffer Fry y C. Vallejo, Galois action on the principal block and cyclic Sylow subgroups, *Algebra Number Theory* **14** (2020), no. 7, 1953–1979.

[26] G. R. Robinson, The number of blocks with a given defect group, *J. Algebra* **84** (1983), 493–502.

[27] A. A. Schaeffer Fry, Galois automorphisms on Harish-Chandra series and Navarro's self-normalizing Sylow 2-subgroup conjecture, *Trans. Amer. Math. Soc.* **372** (2019), no. 1, 457–483.

[28] B. Späth, Inductive McKay condition in defining characteristic, *Bull. Lond. Math. Soc.* **44** (2012), no. 3, 426–438.

[29] B. Späth, A reduction theorem for the Alperin-McKay conjecture, *J. Reine Angew. Math.* **680** (2013), 153–189.

[30] B. Späth, A reduction theorem for the blockwise Alperin weight conjecture, *J. Group Theory* **16** (2013), 159–220.

[31] A. Turull, The strengthened Alperin weight conjecture for p-solvable groups, *J. Algebra* **398** (2014), 469–480.

Carolina Vallejo Rodríguez, Dpto. de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Correo electrónico: `carolina.vallejo@uam.es`
Página web: `http://www.uv.es/cavaro3`