Guido L. Weiss (1928–2021), in memoriam

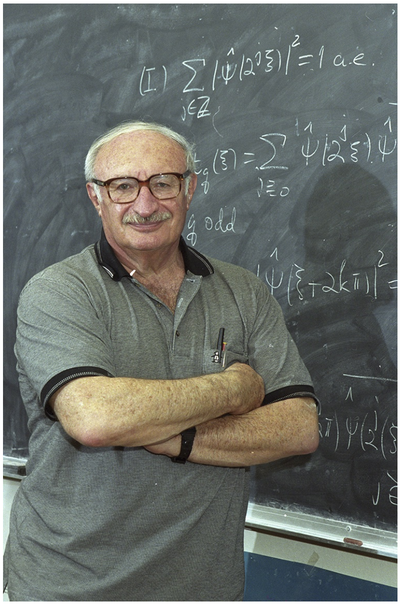
En recuerdo de la memoria de nuestro entrañable y querido maestro, Guido L. Weiss.

Guido L. Weiss

por

Eugenio Hernández y Javier Soria

Guido Weiss nació en Trieste, Italia, el 29 de diciembre de 1928 y falleció en St. Louis, Missouri, EEUU, el 24 de diciembre de 2021. Tras unos años en Trieste y en Roma, en 1939 toda la familia tuvo que emigrar a los Estados Unidos de América, donde Guido residiría toda su vida.



Guido L. Weiss (imagen: Washington University).

En el momento de elegir sobre su educación superior decidió matricularse en la Universidad de Chicago con la intención de realizar estudios de Química. Una mononucleosis, y el correspondiente reposo, le permitió descubrir la belleza del análisis matemático, y cambió su rumbo para decidir graduarse en Matemáticas. No solo lo logró, sino que finalizó en 1956 su tesis doctoral en la misma área, bajo la dirección del matemático polaco Antoni Zygmund.

En esta época comienza su relación con Eli Stein (1931–2018) que les llevó a desarrollar la teoría de funciones armónicas de varias variables [5], y que produciría más tarde un libro básico sobre análisis de Fourier en varias variables [6].

Después de haber realizado estancias postdoctorales en Argentina y Francia, y haber trabajado en De Paul University en Chicago, se incorporó en 1961 a Washington University en St. Louis. Fue director de su Departamento de Matemáticas durante tres años, comenzando en 1967, aunque su influencia en las decisiones departamentales se dejó notar hasta 2018, fecha de su jubilación.

Durante su larga carrera profesional, Guido trabajó en varias áreas del análisis armónico. A la ya mencionada de funciones armónicas de varias variables, que permitió desarrollar la teoría de los espacios $H^p(\mathbb{R}^n)$, hay que añadir, por la misma época, la interpolación de operadores, tema al que regresaría más adelante colaborando en la construcción de la teoría de interpolación de familias de espacios de Banach [1].

Cuando conoció a Raphy Coifman (en Ginebra en 1964) y a Yves Meyer (en Oberwolfach en 1965) se interesó por el estudio de los operadores de Calderón-Zygmund y por las descomposiciones atómicas de los espacios $H^p(\mathbb{R}^n)$, así como por los métodos de transferencia. Con la publicación por M. Frazier y B. Jawerth [2], [3] de la *transformada* φ y el descubrimiento de las ondículas, Guido comenzó a interesarse por la obtención de fórmulas de reproducción y la teoría matemática de las ondículas. A partir de la década de los 90 del siglo pasado muchos de los trabajos con sus estudiantes y colaboradores han sido sobre estos temas.

Su relación con matemáticos de varias partes del mundo, con quienes solía hablar en su propio idioma, propició la internacionalización del Departamento de Matemáticas de Washington University a través de la admisión de nuevos estudiantes de doctorado de diversos países y la financiación de profesores visitantes. Una buena parte de los analistas que trabajamos actualmente en universidades españolas hemos

Guido Weiss rodeado de matemáticos asociados con Washington University durante la conferencia en su honor celebrada en 1993 en la Universidad Autónoma de Madrid. Fotografía propiedad de E. Hernández.

tenido alguna relación de este tipo con Washington University a través de Guido.

Guido asistió a varios seminarios y congresos celebrados en España, y realizó en varias ocasiones visitas de investigación a universidades españolas. Participó en cinco de las conferencias en *Análisis Armónico y Ecuaciones en Derivadas Parciales* que tradicionalmente se celebran en El Escorial, Madrid (las de 1983, 1987, 1992, 1996 y 2000), dictando uno de los tradicionales cursos en la de 1992. Impartió las lecciones sobre espacios generados por bloques en los *III Cursos de Iniciación a la Investigación* celebrados en Jarandilla de la Vera, Cáceres, en 1984, y que organizaban Miguel de Guzmán (1936–2004) y Carlos Benítez (1943–2014).

Del 10 al 14 de mayo de 1993 se celebró en la Universidad Autónoma de Madrid un congreso sobre *Análisis Armónico* en su honor, con la participación de más de 120 matemáticos de varios países. En 1994 fue investido Doctor Honoris Causa por la Universidad de Barcelona. Del 1 de octubre al 30 de noviembre del año 2000 disfrutó de una Cátedra de la Fundación BBVA que le permitió impartir nueve lecciones en el Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid, con el título de *Aspectos matemáticos de la teoría de ondículas.*

MathSciNet muestra 117 publicaciones con Guido como autor o coautor y un total de 8682 citas. Resulta difícil hacer una descripción matemática exhaustiva de su trabajo, que en 2018 él había encuadernado en cuatro volúmenes que conservaba en su casa de St. Louis. El lector interesado puede aumentar su conocimiento sobre la vida y obra de Guido Weiss leyendo el artículo de S. Kelly y R. Torres [4], publicado con ocasión de su 90 cumpleaños.

Investidura de Guido Weiss en la Universidad de Barcelona en 1994. Fotografía propiedad de E. Hernández.

Los escritos que siguen a este son una muestra de los resultados alcanzados por Guido, escritos por matemáticos que estuvieron en Washington University, bien como estudiantes de doctorado o como profesores visitantes. Sirven también para conocer mejor su personalidad, que le hizo una persona tan entrañable entre quienes le conocimos.

Referencias

[1] R. R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher y G. Weiss, A theory of complex interpolation for families of Banach spaces, *Adv. in Math.* **43** (1982), no. 3, 203–229.

[2] M. Frazier y B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), no. 4, 777–799.

[3] M. Frazier y B. Jawerth, A discrete transform and decompositions of distribution spaces, *J. Funct. Anal.* **93** (1990), no. 1, 34–170.

[4] S. E. Kelly y R. H. Torres, Guido Weiss: from immigrant boy to internationally renowned mathematician, *J. Geom. Anal.* **31** (2021), no. 9, 9146–9179.

[5] E. M. Stein y G. Weiss, On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H_p-spaces, *Acta Math.* **103** (1960), 25–62.

[6] E. M. Stein y G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

Eugenio Hernández, Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid
Correo electrónico: eugenio.hernandez@uam.es
Página web: https://verso.mat.uam.es/~eugenio.hernandez

Javier Soria, Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid
Correo electrónico: javier.soria@ucm.es
Página web: https://www.ucm.es/jsoria

Guido y el método de transferencia

por

María J. Carro

Fue en agosto de 1988 cuando me incorporé a Washington University emocionada con la idea de trabajar con el llamado *Grupo de St. Louis*, a cuyos artículos había dedicado tanto tiempo mientras realizaba mi tesis doctoral. El «grupo» estaba formado por R. R. Coifman, M. Cwikel, R. Rochberg, Y. Sagher y Guido, y mi tesis consistió en una extensión del método de interpolación de familias de espacios que ellos habían desarrollado en el artículo [6], entre otros.

A nivel personal fui recibida con mucho cariño por el estupendo grupo de españoles que se encontraban allí y, en particular, Patricio Cifuentes se encargó de buscarme un alojamiento temporal hasta que encontrara mi sitio.

Desde el primer día que pisé aquella universidad, entendí que Guido era como un padre para todos, te cuidaba a nivel personal y te hacía «ponerte las pilas» a nivel profesional.

Y tanto que me las puse… Recuerdo con toda claridad el momento en el que Guido me dijo que no iba a estudiar teoría de interpolación; que él ese tema ya lo había dejado. Y me dio varios artículos sobre el método de transferencia en el que quería seguir investigando. Como se dice ahora, ¡me sacó rápidamente de mi zona de confort! A los pocos días llegó P. Auscher, también postdoc, y Guido nos propuso trabajar juntos. Las reuniones con Guido fueron exactamente eso: «reuniones con Guido»; todos los que alguna vez han trabajado con él, saben perfectamente a qué me refiero. Eran sencillamente entrañables, aunque en aquellos momentos y con otra edad se visualizaran de otra manera. Fruto de aquella colaboración surgieron los trabajos [2, 1].

Pero dejadme que os explique en qué consiste el método de transferencia al que dediqué los 18 meses que estuve en St. Louis y muchos años de los que vinieron después, hasta que dirigí la tesis a Salvador Rodríguez-López en 2008 y que llevó por título *Transference Theory between Quasi-Banach Function Spaces with Applications to the Restriction of Fourier Multipliers* [4, 5].

Todo empieza con un operador de convolución con un núcleo estupendo $K \in L^1$,

$$(K * f)(x) = \int K(y) f(x - y)\, dy.$$

Este tipo de operadores son absolutamente fundamentales en cualquier curso de Análisis Armónico, Teoría de la Medida o en un curso de EDPs, principalmente por su relación con la transformada de Fourier.

En general, el núcleo K estará definido sobre un grupo G que cumplirá ciertas propiedades y que, en esta sección, podemos pensar que es $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ o $\mathbb{Z}^n$. Claramente $x - y$ representa la operación interna en el grupo G.

En la oficina de Guido (St. Louis, 2013). De izquierda a derecha: Javier Soria, Guido Weiss y María Jesús Carro.

Consideremos ahora un espacio de medida σ-finito $(\mathcal{M}, \mu)$, y sea R una representación de G en $L^p(\mathcal{M})$; esto es, que

$$u \in G \longmapsto R_u \in B(L^p(\mathcal{M}))$$

es una aplicación continua de G en la clase de operadores acotados en $L^p(\mathcal{M})$ y tal que

$$R_{uv} = R_u R_v, \qquad \forall u, v \in G.$$

Se supone también que si e es el elemento neutro de G, R_e es el operador identidad y que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|R_u F\|_p \leq c\|F\|_p, \quad \forall u \in G,$$

donde

$$\|F\|_p = \left(\int_{\mathcal{M}} |F(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$$

es la norma usual en $L^p(\mathcal{M})$. Con todos estos ingredientes, el resultado principal del método de transferencia es el siguiente:

TEOREMA. *Si el operador de convolución $K*$ es acotado en $L^p(G)$ con norma menor o igual que $N_p(K)$, entonces el operador de transferencia definido por*

$$T_K F(x) = \int_G K(u) R_{u^{-1}} F(x) \, du$$

cumple que

$$T_K : L^p(\mathcal{M}) \longrightarrow L^p(\mathcal{M})$$

es acotado con norma menor o igual que $c^2 N_p(K)$.

Resumiendo, es un teorema que *transfiere* la acotación de un operador de convolución definido sobre un grupo, a otros operadores que no son necesariamente de convolución definidos sobre un espacio de medida.

Es difícil poder transmitir en tan pocas líneas la sutileza de este resultado y la gran cantidad de aplicaciones que ha tenido en diferentes ramas de las matemáticas, así como el amplio campo que se abrió a otros muchos contextos.

Empezaré diciendo que la sutileza está en el hecho de que el núcleo K ha de estar, a priori, en $L^1(G)$, pero la norma de K en este espacio no aparece en ningún sitio de la demostración del teorema, por lo que el resultado se puede aplicar a núcleos en los que no se tenga esta propiedad, que son la práctica totalidad de los núcleos interesantes. Y, sobre las aplicaciones, empezaré por una sencilla que creo que ayuda a entender el resultado: sea $G = \mathbb{Z}$ y consideremos una aplicación invertible T actuando sobre $L^p(\mathcal{M})$, con norma igual a 1. Sea $\{k_n\}_n$ una sucesión tal que el operador de convolución

$$\{a_n\}_n \longmapsto \Big\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} k_j a_{n-j} \Big\}_n$$

es acotado en el espacio de sucesiones $\ell^p(\mathbb{Z})$. Entonces, tomando la representación $R_j f = T^j f$, obtenemos que el operador

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} k_j T^j f(x)$$

es acotado en $L^p(\mathcal{M})$. Este ejemplo pone de manifiesto, en particular, la importancia del método de transferencia en la demostración de la acotación de operadores que surgen en el área de Teoría Ergódica. De hecho, se ha de mencionar que el teorema de transferencia tiene su origen en el trabajo de N. Wiener [8], fue formulado más generalmente por A. P. Calderón en [3] y utilizado de diversas formas por M. Cotlar, C. S. Herz y A. Zygmund entre otros. Pero el objetivo del artículo [7] fue formular la idea en un contexto muy general y mostrar la gran variedad de aplicaciones de dicho resultado.

Es más, entre las muchas extensiones que tiene el teorema de transferencia está aquella que hace referencia a operadores maximales:

Teorema. *Si el operador maximal asociado a los núcleos de convolución* $\{K_j\}_j$ *y definido por*

$$T^* f(x) = \sup_j \left| \int_G K_j(y) f(x-y)\, dy \right|$$

es acotado en $L^p(G)$ *con norma menor o igual que* $N_p(\{K_j\}_j)$, *entonces el operador de transferencia definido por*

$$TF(x) = \sup_j \left| \int_G K_j(u) R_{u^{-1}} F(x)\, du \right|$$

cumple que

$$T : L^p(\mathcal{M}) \longrightarrow L^p(\mathcal{M})$$

es acotado con norma menor o igual que $c^2 N_p(\{K_j\}_j)$.

En particular, este teorema permite obtener, por ejemplo, acotaciones del operador maximal ergódico de Birkhoff, partiendo de la acotación del operador maximal discreto de Hardy-Littlewood; acotaciones del operador maximal asociado a las sumas parciales de la serie de Fourier, partiendo de las acotaciones de un operador maximal de Hilbert asociado a una familia de modulaciones; y otras muchas aplicaciones pueden encontrarse en [7].

Por todo ello y muchísimo más, ¡mil gracias, Guido!

REFERENCIAS

[1] P. AUSCHER Y M. J. CARRO, On relations between operators on $\mathbb{R}^N$, $\mathbb{T}^N$ and $\mathbb{Z}^N$, *Studia Math.* **101** (1992), no. 2, 165–182.

[2] P. AUSCHER Y M. J. CARRO, Transference for radial multipliers and dimension free estimates, *Trans. Amer. Math. Soc.* **342** (1994), no. 2, 575–593.

[3] A. P. CALDERÓN, Ergodic theory and translation-invariant operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **59** (1968), 349–353.

[4] M. J. CARRO Y S. RODRÍGUEZ-LÓPEZ, Transference results on weighted Lebesgue spaces, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **138** (2008), 239–263.

[5] M. J. CARRO Y S. RODRÍGUEZ-LÓPEZ, On restriction of maximal multipliers in weighted settings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 2241–2260.

[6] R. R. COIFMAN, M. CWIKEL, R. ROCHBERG, Y. SAGHER Y G. WEISS, A theory of complex interpolation for families of Banach spaces, *Adv. in Math.* **43** (1982), no. 3, 203–229.

[7] R. R. COIFMAN Y G. WEISS, Transference methods in analysis, *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics*, No. 31, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

[8] N. WIENER, The ergodic theorem, *Duke Math. J.* **5** (1939), no. 1, 1–18.

MARÍA J. CARRO, DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Correo electrónico: `mjcarro@ucm.es`

Página web: `https://www.ucm.es/mjcarro`

Guido Weiss: recuerdos de mi maestro

por

José R. Dorronsoro

Los espacios de Hardy clásicos $H^p(\mathbb{D})$ de funciones analíticas en el disco unidad $\mathbb{D}$ tales que

$$\sup_{0\leq r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p\, d\theta < \infty$$

fueron introducidos por F. Riesz en 1923, quien les dio ese nombre en honor a un artículo de G. H. Hardy de 1915. Para $p \geq 1$, los límites radiales $\tilde{f}(\theta)$, cuando $r \to 1$, de funciones $F \in H^p(\mathbb{D})$ existen para casi todo θ en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, son funciones en $L^p(\mathbb{T})$ y las funciones $F \in H^p(\mathbb{D})$ se pueden recuperar a partir del espacio $H^p(\mathbb{T})$ de estos límites mediante el núcleo de Poisson. Los espacios de Hardy pueden también definirse en el semiplano superior $\mathcal{H} = \{x + iy : y > 0\}$ y, aunque ambos espacios no son estrictamente equivalentes, muchas de las propiedades de las funciones $H^p(\mathbb{D})$ se extienden a $H^p(\mathcal{H})$. Esto es particularmente cierto en lo que se podría llamar la teoría «real» de los espacios de Hardy. De hecho, para $1 < p < \infty$ los espacios $H^p(\mathcal{H})$ coinciden esencialmente con los $L^p(\mathbb{R})$, dado que la transformada de Hilbert está acotada en estos, aunque no en $L^1(\mathbb{R})$. En realidad, $H^1(\mathcal{H})$ está contenido estrictamente en $L^1(\mathbb{R})$ y, a su vez, su dual, el espacio BMO($\mathbb{R}$) de funciones de oscilación media acotada, contiene estrictamente a $L^\infty(\mathbb{R})$. La situación es más complicada en el caso $p < 1$ donde, por ejemplo, los valores frontera ya han de tomarse como distribuciones.

La teoría «clásica» de los espacios H^p de funciones analíticas dio paso en los años 60 y 70 a la teoría de los espacios de Hardy reales en el semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Uno de los primeros grandes trabajos de Guido fue el artículo de 1960 en *Acta Mathematica* [5], escrito con Elias Stein, probablemente la figura más relevante del Análisis Armónico de los últimos 60 años, y el primer colaborador estrecho de Guido tras sus casi simultáneos doctorados en Chicago bajo la dirección de Antoni Zygmund.

En cierto sentido, ese artículo abrió el camino a los espacios de Hardy de varias variables «a la Fefferman-Stein», descritos en su gran artículo de 1972 en *Acta Mathematica* [2], y donde se dan caracterizaciones «intrínsecas» de los espacios H^p ya en términos de sus funciones o distribuciones en $\mathbb{R}^n$ y de forma paralela (cuando no independiente) de su definición inicial en términos de funciones armónicas.

Todo esto dio lugar a una explosión en la que los espacios de Hardy se extendieron a diversos dominios, y que se puede apreciar en los dos volúmenes de los *Proceedings* del simposio *Harmonic Analysis in Euclidean Spaces*, celebrado en julio de 1978 en Williamstown, Massachusetts y organizado por Guido y Steve Wainger, volúmenes que recogen el estado del arte tras su enorme desarrollo en las dos décadas previas y marcan su devenir en la siguiente. Muchas de estas extensiones se describen en otro gran artículo de Guido, en el *Bulletin de la AMS* [1], y escrito con Raphy Coifman, también uno de sus grandes colaboradores. El ámbito habitual de estas extensiones suele ser el de los espacios de tipo homogéneo, y en este contexto el estudio de los espacios H^p, $0 < p \leq 1$, profundiza en su carácter más intrínseco, centrándose en las descomposiciones atómicas, debidas a Fefferman, Stein y Coifman, y que en cierta medida pasaron a ser su definición de hecho.

Sin embargo, en algunos casos estas extensiones de los espacios H^p sí se pueden abordar desde una perspectiva afín a la clásica o a la del semiespacio superior $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Un ejemplo son los semiplanos de Siegel: al igual que $\mathbb{R}^{n+1}_+$ se sitúa «encima» de $\mathbb{R}^n$, los semiplanos de Siegel se sitúan «encima» del grupo de Heisenberg. En este caso Korany y Vagi estudiaron H^p, para el caso $1 < p < \infty$, mediante acotaciones L^p del operador de Cauchy-Szegő, mientras que Garnett y Latter lo hicieron para $p \leq 1$ mediante descomposiciones atómicas. Este es, junto a la teoría de pesos A_p de Muckenhoupt (ya estudiados por José García-Cuerva para los espacios H^p clásicos), el contexto de mi tesis doctoral, codirigida por Guido y por Mitch Taibleson, a partir de una sugerencia de Coifman.

La tesis me dio, naturalmente, la oportunidad de interactuar con Guido de manera continuada y conocer así su vasto conocimiento de todos los aspectos del Análisis Armónico del momento, su pasión por las matemáticas, su permanente disponibilidad y su paciencia para explicar lo que no sabía o lo que por mis limitaciones no llegaba a comprender. Guido era además un excelente docente, claro, ordenado y metódico, como pude apreciar al poco de llegar a la Washington University (o Wash U, en abreviatura un poco equívoca) en el curso que nos impartió sobre Teoría de la Medida y Análisis Funcional, basado en los dos míticos libros verdes de Walter Rudin. Y, también, un magnífico escritor, lo que se aprecia en sus artículos y en su famoso libro *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces* [4], escrito con Stein, y que junto con el no menos famoso *Singular integrals and differentiability properties of functions* [3], también de Stein, fueron de estudio y consulta obligada casi todos los días.

Otra cualidad muy sobresaliente de Guido (y de Barbara, su mujer) era su hospitalidad, no solo personal sino también institucional, en el sentido de la acogida que, por su mediación, el departamento de matemáticas de Wash U nos ofreció a muchos. No hay que olvidar que la oportunidad de hacer un doctorado en una universidad americana, nada fácil hoy, lo era mucho menos en la España de los 70, llena de cambios, dificultades e incertidumbres. Aquí es también inevitable recordar a Miguel de Guzmán, buen amigo de Guido y otra persona enormemente generosa que trabajó sin descanso para abrir la matemática española al mundo. Se ha observado en otro sitio cómo la prohibición, siendo un niño en la Italia de finales de los 30, de seguir yendo a su escuela puede estar en la raíz del esmero de Guido en la bienvenida y atención que nos dio. Yo, que también le oí comentar, sonriendo y sin ninguna traza de amargura, algún que otro episodio similar de rechazo, estoy de acuerdo con esa idea. A ello seguro que contribuía su constante sentido del humor, tanto con sus frecuentes *puns* (como cuando paseando por los alrededores de Jarandilla llegamos al pueblo vecino del Guijo de Santa Bárbara, nombre que inmediatamente cambió

Guido Weiss con algunos de sus colaboradores y alumnos (El Escorial, 1987).

a Guido de Santa Bárbara), como con sus chistes (unos mejores que otros, pero siempre me río al acordarme de la discusión entre un sacerdote católico, un pastor protestante y un rabino judío sobre el origen de la vida). Y otra observación, esta vez mía pero puede que bastante compartida, es que nuestros años en Cupples Hall están entre los mejores de nuestras vidas.

En fin, no es fácil sintetizar todo lo que ha supuesto Guido para muchos de nosotros, pero igual puede servir una frase que le escuché y que creo que atribuía a Zygmund, y es que para juzgar el trabajo de un matemático hay que integrar su parte positiva. Esa integral es enorme en el caso de Guido. Pero diría que la frase no solo vale para los matemáticos, sino también para la función que en cierto modo es la vida de cualquier persona. Y si bien la estimación de la integral matemática de Guido es relativamente sencilla, creo que acotar superiormente su integral vital sería mucho más difícil.

Referencias

[1] R. Coifman y G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), no. 4, 569–645.

[2] C. Fefferman y E. M. Stein, H^p spaces of several variables, *Acta Math.* **129** (1972), 137–193.

[3] E. M. STEIN, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[4] E. M. STEIN Y G. WEISS, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Mathematical Series, No. 32, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971.

[5] E. M. STEIN Y G. WEISS, On the theory of harmonic functions of several variables. I. The theory of H_p-spaces, *Acta Math.* **103** (1960), 25–62.

JOSÉ R. DORRONSORO, DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA, UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MADRID

Correo electrónico: jose.dorronsoro@uam.es

Guido Weiss y la teoría de descomposición de funciones

por

Gustavo Garrigós

Guido Weiss ha dejado una profunda huella en el Análisis Armónico, con importantes contribuciones en gran variedad de temas, y una amplia escuela de alumnos, colaboradores y admiradores, que cuenta con varios representantes en nuestro país. Más allá de las matemáticas, destaca también su extraordinaria personalidad, amigable, generoso, abiertamente internacional y con un toque de humor característico que tanto recordamos quienes lo conocimos. En esta nota daremos algunas pinceladas sobre el trabajo de Guido, en el que las facetas personal y profesional siempre han estado estrechamente ligadas.

Como matemático, hay dos cualidades de Guido que destacaría sobre las demás. La primera, su excelente labor como maestro, con una capacidad natural para explicar conceptos profundos en términos sencillos, apoyado siempre en una redacción y una caligrafía impecables. Una muestra temprana de ello fue la concesión en 1967 del premio Chauvenet de la MAA al mejor artículo expositivo, por su trabajo *Harmonic Analysis* [11], donde hace un recorrido de la teoría desde las series de Fourier a los grupos LCA.

El segundo aspecto, relacionado con su investigación, ha sido su gran intuición para descubrir, desarrollar y difundir teorías básicas de una gran trascendencia, recogidas desde su fase inicial en monografías muy bien redactadas y autocontenidas. Entre estas podemos mencionar la teoría de espacios de Hardy H^p en varias variables (con E. Stein), la teoría de espacios de naturaleza homogénea y los métodos de transferencia en análisis (ambos con R. Coifman), la teoría molecular de los espacios de Hardy (con R. Coifman y M. Taibleson), y más recientemente, sus relevantes contribuciones relacionadas con la teoría de ondículas (con E. Hernández, E. Wilson y otros colaboradores).

En esta nota haremos un breve recorrido de las contribuciones de Guido Weiss relacionadas con la descomposición de funciones, desde las teorías atómica y molecular hasta las bases de wavelets, a través de tres monografías fundamentales [3, 6, 8].

La monografía [3] presenta la teoría de espacios de Hardy desde un enfoque centrado en las descomposiciones atómicas, obtenidas por Coifman en [1]. Esta establece que toda distribución $f \in H^p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, se puede escribir como una suma infinita de «átomos»

$$f = \sum_j \lambda_j a_j,$$

donde un p-átomo es una función $a(x)$ que cumple

$$\operatorname{sop} a \subset I, \quad |a(x)| \leq |I|^{-1/p} \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}} a(x) x^k \, dx = 0, \quad 0 \leq k < \lfloor 1/p \rfloor, \tag{1}$$

para algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Además, $\|f\|_{H^p}$ es equivalente a

$$\|f\|_{H^p_{\mathrm{at}}} := \inf \Big\{ \Big(\sum_j |\lambda_j|^p \Big)^{1/p} : f = \sum_j \lambda_j a_j \Big\}.$$

En [3], a partir de esta definición, se desarrolla una teoría general de espacios $H^p(X)$, cuando el conjunto X es un espacio de naturaleza homogénea [2], que recupera de manera sencilla y elegante los resultados de la teoría clásica.

Además, en [3] se introduce la noción de «molécula» (ampliada posteriormente en [10]), para solventar algunas limitaciones de las descomposiciones atómicas. Una molécula $M(x)$ ya no tiene necesariamente su soporte en un intervalo I, pero sí suficiente decaimiento en torno a un punto x_0, de modo que

$$|M(x)| \leq C\, |I|^{-1/p} \Big/ \Big(1 + \tfrac{|x - x_0|}{|I|} \Big)^{1/p + \varepsilon},$$

para un número fijo $\varepsilon > 0$ (además de la condición de cancelación en (1)). Todo átomo es una molécula y, como se demuestra en [3, 10], toda molécula se descompone como suma de átomos. Además, se cumple la caracterización

$$\|f\|_{H^p} \approx \inf \Big\{ \Big(\sum_j |\lambda_j|^p \Big)^{1/p} : f = \sum_j \lambda_j M_j \Big\}.$$

En general, los operadores interesantes en análisis no preservan átomos, pero sí envían átomos en moléculas, estableciéndose de esta forma un sencillo criterio para comprobar que un operador T está acotado en H^p. A partir de este criterio se deducen en [3, 10] nuevos teoremas sobre multiplicadores de Fourier en H^p.

Las descomposiciones en átomos o moléculas, $f = \sum_j \lambda_j M_j$, sin embargo, tienen la limitación de no ser únicas; de hecho, la construcción de las M_j depende de cada f, y en aquel momento no parecía sencillo encontrar una familia común $\{M_j\}_j$ que representase a todos los elementos f del espacio H^p.

A mediados de los 80 este panorama cambia con las importantes aportaciones (simultáneas, pero independientes) de M. Frazier y B. Jawerth por un lado, y de P. G. Lemarié e Y. Meyer por otro. Los primeros, durante su paso por Washington University, desarrollan la teoría de la *transformada* φ, [4, 5], que establece para toda distribución $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (modulo polinomios) una representación común

$$f = \sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,k}\psi_{j,k}, \quad \text{con} \quad \lambda_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k}\rangle, \tag{2}$$

en términos de un par de funciones fijas $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, donde

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k). \tag{3}$$

Es decir, las «moléculas» $\psi_{j,k}$ son traslaciones y dilataciones de ψ, en torno al intervalo diádico $I_{j,k} = 2^{-j}[k, k+1)$, y los coeficientes $\lambda_{j,k}$ se determinan de forma explícita mediante el producto escalar de f con una función similar $\varphi_{j,k}$. Además, esta descomposición permite caracterizar las normas de los espacios clásicos de funciones de tipo Besov y Triebel-Lizorkin; por ejemplo, para estos últimos, de la forma

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} \approx \Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{jsq} \big| 2^{j/2} \langle f, \varphi_{j,k}\rangle \big|^q \mathbf{1}_{I_{j,k}} \Big)^{1/q} \Big\|_p.$$

Como caso especial, para los espacios de Hardy $H^p = \dot{F}^0_{p,2}$ se obtienen representaciones en términos de moléculas (o incluso átomos) de clase C^∞.

Por otro lado, Y. Meyer va más allá, y junto con Lemarié [9] construye una función $\psi \in \mathcal{S}$ de modo que no solo se cumple la descomposición en (2) (con $\varphi = \psi$), sino que además el sistema $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ es una *base ortonormal* de $L^2(\mathbb{R})$, e incluso una *base incondicional* en los espacios de suavidad clásicos $\dot{B}^s_{p,q}$ y $\dot{F}^s_{p,q}$.

Guido Weiss comprende rápidamente la importancia de estos resultados, y sus conexiones con la teoría clásica de Littlewood-Paley. Pronto comienza a trabajar con dichos autores, y emprende la tarea de redactar la monografía [6], basada en un curso impartido en Auburn University en 1989. Este texto proporciona un recorrido detallado y unificado de toda la teoría, desde los átomos y moléculas hasta la transformada φ y las wavelets, en un lenguaje claro y preciso, que convierten a [6] en un excelente recurso para quienes desean iniciarse en este campo.

A la vez, [6] marca también el inicio del interés de Guido Weiss por la teoría de ondículas, en la que trabajaría durante muchos años. Una ondícula (o *wavelet*) es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que el sistema $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in\mathbb{Z}}$ definido en (3) forma una base ortonormal. Para Guido se convierte en un reto comprender mejor las propiedades de estas funciones ψ, para lo cual las estudia detenidamente, encuentra nuevos ejemplos, escribe artículos fundamentales sobre su estructura, y dicta cursos de doctorado en el tema. Este trabajo culmina en 1996 con el libro [8], escrito junto con E. Hernández, y que es de nuevo una referencia fundamental en su campo. En ese libro aparece un resultado de su estudiante de doctorado Xihua Wang (e independientemente de G. Gripenberg [7]), que establece que una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondícula si y solo si $\|\psi\|_2 = 1$ y se cumplen las ecuaciones

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^j\xi)\,\overline{\widehat{\psi}(2^j(\xi+2\pi m))} = 0 \tag{4}$$

para todo $m \in 2\mathbb{Z}+1$ y casi todo punto $\xi \in \mathbb{R}$. Guido siempre estuvo muy orgulloso de este resultado, y las ecuaciones (4) sirvieron de modelo para muchas variantes de sistemas generalizados de tipo *wavelets* que se introdujeron posteriormente (una de ellas son las denominadas *shearlets*, con sus numerosas aplicaciones).

En conclusión, creo que (4) constituye un bonito ejemplo del estilo de trabajo de Guido: priorizando la comprensión de las propiedades fundamentales que subyacen en una teoría, las divulga y transmite con entusiasmo a estudiantes y colaboradores, y, tras reconocer con justo crédito la labor común, culmina con un texto elegante y completo, que pueda resultar útil para toda la comunidad matemática.

Referencias

[1] R. Coifman, A real variable characterization of H^p, *Studia Math.* **51** (1974), 269–274.

[2] R. Coifman y G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*, Lecture Notes in Math. **242**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[3] R. Coifman y G. Weiss, Extensions of Hardy spaces and their use in analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 569–645.

[4] M. Frazier y B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **34** (1985), no. 4, 777–799.

[5] M. Frazier y B. Jawerth, A discrete transform and decompositions of distribution spaces, *J. Funct. Anal.* **93** (1990), no. 1, 34–170.

[6] M. Frazier, B. Jawerth y G. Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 79, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[7] A. Gripenberg, A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet, *Studia Math.* **114** (1995), 207–226.

[8] E. Hernández y G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[9] P. G. Lemarié y Y. Meyer, Ondelettes et bases Hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1–18.

[10] M. Taibleson y G. Weiss, The molecular characterization of certain Hardy spaces, *Representation theorems for Hardy spaces*, pp. 67–149, Astérisque **77**, Soc. Math. France, Paris, 1980.

[11] G. Weiss, Harmonic Analysis, *Studies in Real and Complex Analysis*, pp. 124–178, MAA Studies in Mathematics, Vol. 3, Washington DC, 1965.

Gustavo Garrigós, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia
Correo electrónico: gustavo.garrigos@um.es
Página web: https://webs.um.es/gustavo.garrigos

Notas acerca de la contribución de Guido Weiss a la teoría de ondículas

por

Demetrio Labate

Guido Weiss contribuyó de manera significativa al estudio de las ondículas y su trabajo ha sido fundamental para desarrollar la teoría matemática y hacerla una parte integral del Análisis Armónico.

Las ondículas se comenzaron a usar en los años 80 del siglo pasado por Grossmann y Morlet para superar las limitaciones de la transformada de Fourier con ventana en las aplicaciones al tratamiento de señales. Su idea, basada en la construcción de una descomposición de funciones que consistía en dilatados y trasladados de una sola onda, ha sido muy fructífera y, a través de las contribuciones fundamentales de Lemariè y Meyer [8], Mallat [9] y Daubechies [2], permitió la formulación del Análisis Multirresolución (MRA) y la definición de un procedimiento algorítmico para construir descomposiciones con ondículas especialmente diseñadas para las aplicaciones al tratamiento de imágenes.

Cuando conocí a Guido en el año 2000 ya había publicado su excelente monografía titulada *A First Course on Wavelets* [6] junto con E. Hernández, donde todo lo conocido hasta la fecha sobre la teoría matemática de las ondículas se describía rigurosamente y con una cuidadosa presentación. Sin embargo, una queja frecuente de Guido era: «casi no sabemos nada acerca de las ondículas». Yo interpreté esta frase como una actitud socrática, donde el acto de cuestionarlo todo precede a un esfuerzo renovado para hacer una investigación exhaustiva.

La noción de ondícula todavía se estaba desarrollando en los años 90 del siglo pasado. Mientras que el Análisis Multirresolución se había consolidado como un método efectivo para construir bases de ondículas de la forma

$$\mathcal{A}(\psi) = \{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\} \subset L^2(\mathbb{R}), \tag{1}$$

este método dejaba sin respuesta muchas preguntas fundamentales, que incluían su extensión a varias variables y la relación entre las *ondículas MRA* —aquellas que provienen de un Análisis Multirresolución o alguna de sus variantes— y *las ondículas* entendidas en un sentido más general.

En el caso unidimensional, una *ondícula* es una función $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tal que la colección $\mathcal{A}(\psi)$, dada por (1), es una base ortonormal (BON) de $L^2(\mathbb{R})$; en este caso $\mathcal{A}(\psi)$ se conoce con el nombre de sistema ortonormal de ondículas. Por tanto, una pregunta natural es: ¿qué condiciones son necesarias o suficientes para que ψ sea una ondícula? Además, como se conocía que hay ondículas que no son ondículas MRA [1], otra pregunta relacionada con esto es: ¿qué condiciones se necesitan para que ψ no sea solo una ondícula, sino también una ondícula MRA?

Guido condujo a muchos estudiantes y colaboradores hacia la investigación de estas preguntas y concluyó con el descubrimiento de dos ecuaciones simples que caracterizan completamente todas las ondículas unidimensionales. Esto es, $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondícula si y solo si $\|\psi\|_2 = 1$ y satisface

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j\xi)|^2 = 1, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \hat{\psi}(2^j\xi)\,\overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2m\pi))} = 0, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R},\ m \in 2\mathbb{Z}+1, \tag{3}$$

donde $\hat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\psi(x)\,dx$ es la transformada de Fourier de ψ.

De hecho, estas ecuaciones eran conocidas, aunque bajo condiciones más restrictivas. Se sabía que la ecuación (2) era una condición necesaria, a la que frecuentemente se le llama *condición de Calderón*, ya que diferentes versiones de esta resolución de la identidad habían aparecido en los trabajos de A. Calderón. Las ondículas MRA también se pueden caracterizar usando una sencilla ecuación; a saber, una ondícula $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ es una ondícula MRA si y solo si

$$D_\psi(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j(\xi + 2k\pi))|^2 = 1, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R},$$

resultado demostrado por Wang [10], estudiante de Guido, y Gripenberg [3], de manera independiente. El lector interesado puede encontrar una demostración detallada, junto con una perspicaz discusión de estos resultados, en [6, Ch. 7].

Esta línea de investigación iniciada por Guido continuó desarrollándose, concluyendo con el descubrimiento de ecuaciones que extienden las fórmulas (2)–(3) a un contexto más general. En un trabajo conjunto con Guido y Eugenio Hernández [5], consideramos una colección muy general de funciones de la forma

$$\{T_{C_pk}\, g_p : k \in \mathbb{Z}^n, p \in \mathcal{P}\} \subset L^2(\mathbb{R}^n), \tag{4}$$

donde $\{g_p : p \in \mathcal{P}\}$ es una familia numerable en $L^2(\mathbb{R}^n)$, T_y es el operador de traslación definido como $T_y f(x) = f(x-y)$ y $\{C_p : p \in \mathcal{P}\}$ es una colección de

Guido Weiss rodeado de algunos colaboradores y alumnos durante la conferencia en su honor celebrada en 1993 en la Universidad Autónoma de Madrid.

matrices invertibles de orden $n \times n$. Bajo unas condiciones poco restrictivas, resulta que el sistema (4) es un marco de Parseval[1] de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si se cumplen

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \tfrac{1}{|\det C_p|} |\hat{g}_p(\xi)|^2 = 1, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$\sum_{j\in\mathcal{P}_\alpha} \tfrac{1}{|\det C_p|} \hat{g}_p(\xi)\,\overline{\hat{g}_p(\xi+\alpha)} = 0, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \Lambda, \tag{6}$$

donde $\Lambda = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} (C_p^{-1})^t(\mathbb{Z}^n)$ y $\mathcal{P}_\alpha = \{p \in \mathcal{P} : C_p^t\alpha \in \mathbb{Z}^n\}$. Se puede demostrar que las ecuaciones (5) y (6) no solo implican (2) y (3), sino que también se pueden usar para obtener resultados que caracterizan los sistemas de Gabor, los paquetes de ondículas y, en general, las ondículas multidimensionales. Por ejemplo, escribiendo $\mathcal{P} = \{(j,\ell) : j \in \mathbb{Z}, \ell = 1,\dots,L\}$, $C_p = C_{j,\ell} = A^{-j}$, $g_p = g_{j,\ell} = D_A^j\psi^\ell$, donde $\psi^\ell \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y D_A es el operador de dilatación asociado con la matriz invertible A de orden $n\times n$, definido como $(D_Af)(x) = |\det A|^{1/2} f(Ax)$, entonces el conjunto (4) se transforma en el siguiente sistema afín:

$$\mathcal{A}(\psi^1,\dots,\psi^\ell) = \{D_A^j T_k\,\psi^\ell : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n, \ell = 1,\dots,L\}.$$

[1]Un conjunto $\{\phi_\nu\} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ es un marco de Parseval de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si $\sum_\nu |\langle f,\phi_\nu\rangle|^2 = \|f\|^2$ se cumple para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si, además, $\|\phi_\nu\| = 1$ para todo ν, se tiene que $\{\phi_\nu\}$ es una base ortonormal.

Usando la teoría general se obtiene que el sistema afín $\mathcal{A}(\psi^1, \ldots, \psi^\ell)$ es un marco de Parseval de $L^2(\mathbb{R}^n)$ si y solo si se cumplen las ecuaciones

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}^\ell(B^j\xi)|^2 = 1, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{j\in\mathcal{P}_\alpha} \hat{\psi}(B^j\xi)\,\overline{\hat{\psi}(B^j(\xi+\alpha))} = 0, \qquad \text{c.t.p. } \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} B^j\mathbb{Z}^n,$$

donde $\mathcal{P}_\alpha = \{j \in \mathbb{Z} : B^{-j}\alpha \in \mathbb{Z}^n\}$ y $B = A^t$ es una matriz invertible de orden $n \times n$ que tiene la propiedad de ser *expansiva en subespacios*[2]. Las ecuaciones anteriores caracterizan no solo los sistemas de ondículas en varias dimensiones con matrices expansivas (esto es, aquellas cuyos autovalores tienen módulo mayor que uno), que son una generalización directa de las bases ortonormales en dimensión uno (1), sino también los sistemas de ondículas con matrices de dilatación no necesariamente expansivas. Esta última observación resulta sorprendente, puesto que era costumbre suponer que las matrices de dilatación tenían que ser expansivas para generar un sistema de reproducción. Resultó ser también una fuente de inspiración, ya que motivó la construcción de representaciones similares a las ondículas para funciones de varias variables que son más flexibles que las ondículas diádicas separables, tales como las *ondículas con dilataciones compuestas* [4] y las *shearlets* [7]. Este descubrimiento impulsó una intensa actividad investigadora acerca de las propiedades y aplicaciones de esta clase de sistemas parecidos a las ondículas, pero usadas para representar funciones de varias variables, que ha producido cientos de publicaciones.

Referencias

[1] P. Auscher, Solution of two problems on wavelets, *J. Geom. Anal.* **5** (1995), 181–236.

[2] I. Daubechies, Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Commun. Pure Appl. Math.* **41** (1988), 909–996.

[3] A. Gripenberg, A necessary and sufficient condition for the existence of a father wavelet, *Studia Math.* **114** (1995), 207–226.

[4] K. Guo, D. Labate, W. Lim, G. Weiss y E. Wilson, Wavelets with composite dilations, *Electr. Res. Ann. AMS* **10** (2004), 78–87.

[5] E. Hernández, D. Labate y G. Weiss, A unified characterization of reproducing systems generated by a finite family, II, *J. Geometric Analysis* **12** (2002), no. 4, 615–662.

[6] E. Hernández y G. Weiss, *A First Course on Wavelets*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.

[7] D. Labate, W. Lim, G. Kutyniok y G. Weiss, Sparse multidimensional representation using shearlets, *Wavelets XI (San Diego, CA, 2005), SPIE Proc.* **5914**, 254–262.

[2] Véase la definición 5.3 en [5].

[8] P. G. LEMARIÉ Y Y. MEYER, Ondelettes et bases Hilbertiennes, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), 1–18.

[9] S. MALLAT, A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet decompositions, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* **11** (1989), 674–693.

[10] X. WANG, *The Study of Wavelets from the Properties of Their Fourier Transforms*, Ph. D. Thesis, Washington University, St. Louis, MO, 1995.

DEMETRIO LABATE, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF HOUSTON
Correo electrónico: `dlabate@uh.edu`
Página web: `http://www.math.uh.edu/~dlabate.html`