Miniaturas matemáticas de La Gaceta de la RSME
Vol. 25 (2022), Núm. 3, Pág. 488

Los babilonios y Newton

Hace ya más de 4000 años, los babilonios calculaban raíces cuadradas basándose en una bonita idea geométrica: si x_0 es una buena aproximación de $\sqrt{a}$, construimos un rectángulo con base x_0 y altura tal que su área sea a, es decir a/x_0. Si es un cuadrado, resulta que x_0 es la raíz cuadrada buscada. En caso contrario, uno de los lados es mayor que $\sqrt{a}$ y el otro es menor. Entonces es natural pensar que el promedio de ambos valores $(x_0 + a/x_0)/2$ es una aproximación mejor de $\sqrt{a}$. En resumen, esta idea da lugar al siguiente método iterativo para calcular $\sqrt{a}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}, \qquad x_0 \approx \sqrt{a}. \tag{1}$$

Parece ser que los babilonios sólo usaban unas pocas iteraciones de este proceso. Este método también fue descrito por Herón de Alejandría en el siglo I.

Siguiendo su idea, proponemos un razonamiento similar, pero con prismas, para calcular $\sqrt[3]{a}$. Dado $x_0 \approx \sqrt[3]{a}$ construimos un prisma de volumen a, con base cuadrada, y lados x_0, x_0 y a/x_0^2. Entonces la nueva aproximación sería $x_1 = (2x_0 + a/x_0^2)/3$. Más en general, para calcular $\sqrt[k]{a}$, comenzamos con un prisma k-dimensional de lados $x_0, x_0, \ldots, x_0$ y a/x_0^{k-1}, y como aproximación siguiente su promedio. Es decir, para calcular $\sqrt[k]{a}$ es natural considerar el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n + a x_n^{1-k}}{k}, \qquad x_0 \approx \sqrt[k]{a}.$$

Por otra parte, uno de los métodos más eficientes para encontrar una solución, s, de una ecuación general $f(x) = 0$, con f derivable, es el famoso *método de Newton*. Éste consiste en considerar la sucesión $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$, con $x_0 \approx s$. Se sabe que si x_0 está suficientemente cerca de s, entonces $\{x_n\}_n$ converge hacia s. Si tomamos $f(x) = x^k - a$, entonces $s = \sqrt[k]{a}$ y es fácil comprobar que el método basado en la idea babilónica coincide con el de Newton. Es curioso cómo para este caso particular, el método de Newton, que parece fuertemente basado en el cálculo de una derivada, aparece de manera natural usando sólo ideas de geometría clásica.

Para acabar, veamos cómo una variación de la idea babilónica da lugar a otro método para calcular $\sqrt{a}$. Si en lugar de tomar la media aritmética de y_0 y a/y_0 tomamos su media armónica $(A(u,v) = 2uv/(u+v))$ obtenemos el método

$$y_{n+1} = \frac{2a y_n}{a + y_n^2}, \qquad y_0 \approx \sqrt{a},$$

que tiende a $\sqrt{a}$ con la misma velocidad que (1), ya que si $y_0 = a/x_0 > a$, $x_n < \sqrt{a} < y_n = a/x_n$. Con la misma idea se puede obtener otro método para calcular $\sqrt[k]{a}$.

Armengol Gasull, Dep. de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona y CRM
Correo electrónico: gasull@mat.uab.cat
Página web: http://www.gsd.uab.cat/personal/agasull