La música de Charles Fefferman

por

Luis Seco

Resumen. Basándonos en la obra matemática de Charles Fefferman, y con ocasión de que haya recibido el Premio Fronteras del Conocimiento en Ciencias Básicas en la edición de 2022, presentamos una reflexión sobre el proceso creativo matemático a través de un divertimento musical.

Conocí a Charlie Fefferman en el otoño del 1985, cuando llegué a Princeton para hacer el doctorado. Como todo estudiante de primer año, nuestro cometido principal no era ni investigar, ni aprender; John Mather, el director del programa de posgrado, lo dejó muy claro en su charla introductoria: la tarea principal que se nos encomendaba era ir religiosamente, todos los días a las 3:30, a tomar el té. Para el que pueda pensar que esto era una afirmación frívola, o simplemente una exageración, diré que en realidad era una metáfora: lo que se pretendía es que nos conociéramos los unos a los otros durante ese primer año, en el que por supuesto asistíamos a cursos y empezábamos a decidirnos por la persona que sería nuestro director durante los tres años siguientes. Para ello era fundamental entender quién era, realmente, cada uno de los profesores del departamento, cada uno con su estilo y sus genialidades particulares.

En el caso de Charlie, yo ya tenía referencias previas —joven prodigioso, genio adulto—, y sabía de uno de sus logros más notables, su demostración ([7]), posterior pero independiente a la de Carleson, de la convergencia puntual de las series de Fourier (en el apéndice se recuerda la definición de los coeficientes y de la transformada de Fourier):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \cdot e^{2\pi n x} = f(x), \quad \text{en casi todo punto } x.$$

Esta era una pregunta que se originó en la segunda década del siglo XIX, a raíz de los trabajos de Fourier ([11]), y que puso de manifiesto las lagunas que había en las matemáticas de la época; dio lugar a la creación de las medidas de Lebesgue y al establecimiento de los argumentos δ-ε de Cauchy, que definió el concepto de límite. También originó los trabajos de Cantor y, posteriormente, la lógica formal de Frege, Whitehead y Russell, y, en definitiva, las matemáticas tal y como se conocen hoy en día.

Pero el problema original, en la extensión que le dieron los matemáticos en el siglo XX, continuaba abierto hasta que fue resuelto por Carleson en 1966 ([1]), el año en que Charlie ingresaba como estudiante de doctorado en Princeton, con 17 años.

Charlie ideó su propia demostración siete años más tarde, con 24 años, la edad que tenía Mozart cuando compuso su *Sinfonía n.º 34* o la ópera *Idomeneo*, el Mozart joven de Salzburgo antes de ir a Viena; por esto, llegué a Princeton con la curiosidad de que hubiera alguna analogía entre la música de Mozart y las matemáticas de Charlie, preguntándome si podía encontrar retazos de la *Sinfonía Júpiter* o de La *Flauta Mágica* en la manera de entender Charlie sus matemáticas.

Todo me quedo claro un día, cuando en su curso sobre la estabilidad de la materia, presentó la ecuación

$$\frac{1}{|x|} = \frac{1}{\pi} \iint_{R>0, z\in\mathbb{R}^3} \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{si } x, 0 \in B(z,R) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{matrix} \right\} \frac{dz\, dR}{R^5}. \tag{1}$$

Como única explicación, se limitó a decir que ambos lados de la ecuación se comportan del mismo modo ante las dilataciones y rotaciones, por lo que uno tiene que ser múltiplo del otro por un número real; lo único que habría que hacer es calcular la constante $\frac{1}{\pi}$. La fórmula permite entender la energía potencial del átomo a base de contar, de modo casi pueril, el número de partículas en bolas. En ese mismo momento, no me quedó ninguna duda: Charlie era, en realidad, Beethoven, y su ecuación (1), se corresponde con el famoso primer compás de su quinta sinfonía,

A este seguiría el segundo compás

para la energía cinética en su versión relativista,

$$\left\langle (-\Delta)^{1/2} u, u \right\rangle = c \iint_{R>0, z\in\mathbb{R}^3} \int_{x,y\in B(z,R)} |u(x) - u(y)| \frac{dz\, dR}{R^8},$$

con la misma escueta explicación anterior. Lo que seguía era una maravillosa combinación de estos dos compases, con sus desarrollos, exposiciones, variaciones y recapitulaciones, que tuvo como resultado la maravillosa sinfonía de la estabilidad relativista de la materia, demostrada conjuntamente con Rafael de la Llave ([10]):

$$\langle H_{Z,M,N}\psi, \psi\rangle \geq -C_Z \cdot (M+N).$$

Remitimos al lector interesado al apéndice para las definiciones de los operadores $H_{Z,M,N}$ y las constantes C_Z que aparecen en esta expresión, así como otros detalles que puedan ser de utilidad.

Yo seguí con el doctorado, feliz y convencido de que estaba bajo la supervisión de Beethoven, hasta que unos años más tarde, buscando inspiración para redactar mi tesis, se me ocurrió leer la de Charlie, que tenía muy a mano en los sótanos del edificio Fine Hall, sede del Departamento de Matemáticas de Princeton. En ella, mecanografiada y con fórmulas y dibujos hechos a mano, Charlie sentó las bases de una nueva manera de pensar el análisis armónico, con la que meses más tarde resolvía ([5]) una antigua conjetura del análisis de Fourier, relacionada con el problema del multiplicador de la bola, un operador que se define truncando la transformada de Fourier de una función por la bola unidad:

$$\widehat{Tf}(\xi) = \chi_{B(0,1)}(\xi) \cdot \hat{f}(\xi).$$

Si, en vez de con la bola unidad, se trunca con cualquier rectángulo, el operador es esencialmente la transformada de Hilbert, la piedra angular de la escuela de Chicago, para el cual era obvio que está acotado en todos los espacios $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. La conjetura era que la bola no es tan distinta a los rectángulos, y por tanto ese operador debería estar acotado también en los espacios L^p, $1 < p < \infty$. El caso de $p = 2$ era evidente, pero el problema seguía abierto para $p \neq 2$. Charlie demostró en su célebre artículo [5], hecho público en 1970, que no era así, que ese operador no era acotado en ningún espacio L^p salvo el trivial $p = 2$. Este fue un resultado revolucionario e inesperado, obtenido solo unos meses después de su tesis, que yo me disponía a leer.

Cuál sería mi sorpresa leyendo la introducción, un documento magistral, escrita por un chico que acababa de cumplir 20 años, que explicaba de modo sencillo pero profundo cuáles eran las complicaciones del problema, cómo enfocarlo y por qué los intentos anteriores no funcionaron. Leyendo esas pocas páginas de su introducción, uno podría pensar que los miembros de la escuela de Chicago, una de las más fuertes corrientes de pensamiento matemático del siglo XX, fueran meros Salieri. Claro que esto no era cierto; de hecho, mucha de la profundidad de pensamiento que brotaba de aquellas páginas tenía el ADN de Elias Stein, el director de tesis de Charlie y al que Charlie mismo retrató en su célebre tributo ([9]). De todos modos, en aquel momento, mientras leía esas páginas, no me cabía ninguna duda: Charlie, en realidad, era Mozart.

También se podría argumentar que Charlie era Johann Sebastian Bach. De hecho, su resultado más notable ([6]), el que le llevó a conseguir la medalla Fields en 1978, dio lugar a la ya famosa ecuación

$$H^1 = \mathrm{BMO}^*. \tag{2}$$

De acuerdo con las explicaciones que el mismo Charlie presenta cuando cuenta el substrato de este resultado al gran público, el origen de estos objetos tiene que ver con la realidad bidimensional que era objeto de deseo para la ciencia del siglo XIX, desde entender los campos eléctricos a los modos de hacer mapas bidimensionales de superficies como la Tierra. Desde nuestra perspectiva musical, lo que vamos a subrayar son los elementos palindrómicos que (2) comparte con la *Ofrenda Musical* de Bach:

Si se mira la partitura desde el final, uno verá la clave de do invertida, lo que indica al lector avispado que hay dos voces, una que recorre el pentagrama de arriba hacia abajo, y otra que lo recorre de abajo hacia arriba. En su resultado [6] de 1971 (ver también la exposición brillante de Stein en [3]), Charlie conectó dos mundos. Por una parte, el mundo de las ecuaciones en derivadas parciales de John, Nirenberg, Lax, Moser, Nash, DiGiorgi y tantos otros, en el cual los espacios de funciones BMO (*Bounded Mean Oscillation*, o variación media acotada, concepto descrito en el apéndice) fueron piezas angulares en el tratamiento riguroso de un sinfín de problemas, como por ejemplo las ecuaciones que rigen la elasticidad no lineal. Por otra parte, el análisis de la escuela de Chicago, que mencionamos antes, había encontrado la utilidad del espacio de Hardy H^1 como sustituto de L^1 en el estudio de las integrales singulares, como la transformada de Hilbert, que mencionamos también anteriormente. El resultado (2) de Charlie permite, por tanto, una lectura de ida y vuelta entre las ecuaciones diferenciales y el análisis de Fourier, que nos recuerda la epifanía que supuso para las matemáticas el resultado de Joseph Fourier de 1822 ([11]), creando esos ecos tan típicos de la música de órgano del gran maestro de Leipzig, y que tan bien narró Elias Stein en su oda a Charlie publicada en las *Notices of the AMS* ([4]).

Nunca sospeché, en aquel año 1985, que me esperaba una vida llena de colaboración con Charlie; unos años más tarde, habiendo llegado a mi edad adulta, ya tenía una perspectiva mas sólida sobre sus matemáticas. Durante los años siguientes, escribimos juntos más de mil páginas de artículos, la mayoría de ellas redactadas por él mismo a una velocidad de vértigo. Por este hecho, si uno no supiera ni matemáticas ni música, se le podría comparar con Rossini, el compositor mas rápido de la historia, que escribió las 150 000 notas de *El Barbero de Sevilla* en tres semanas, y del que Wagner llegó a decir que tenía la capacidad de inventar melodías narcóticas con suma facilidad. Wagner nunca dijo nada bueno sobre nadie más, por eso Charlie, que es una bellísima persona, no se puede comparar con él, ni de hecho con Rossini, pues las matemáticas de Charlie son siempre profundas. Y a un nivel más personal, tampoco sería Leonardo da Vinci, que con sus libros de cocina establecería una distancia culinaria entre uno y otro.

Más recientemente ([8]), Charlie ha estado concentrando gran parte de su trabajo en los teoremas de extensión de Whitney, cuya formulación original se remonta al año 1934 y se centra en la extensión de funciones f definidas en un conjunto arbitrario $E \subset \mathbb{R}^n$ a una función lisa sobre todo el espacio euclídeo, $F \in C^M(\mathbb{R}^n)$. Las preguntas son numerosas: ¿existe tal extensión?; si existe, ¿cómo de pequeña podemos hacer la norma de F en C^M?; ¿qué relación hay entre f y F? Estas preguntas tienen un transfondo académico de geometría algebraica y variables complejas, pero, si lo planteamos como un ejercicio de interpolación/extrapolación, nos damos cuenta de la relevancia que tienen en el postmodernismo de la ciencia de datos, del mismo modo que Stravinsky, al componer su ballet *Pulcinella*, no tuvo escrúpulos en recurrir a temas musicales clásicos, lo que curiosamente hizo que fuera criticado por algunos de sus colegas de la época.

Poincaré decía que hay dos tipos de matemáticos, los lógicos y los intuitivos, que desde nuestra perspectiva serían, unos, los que dominan la letra, y otros, los que dominan la música; Charlie sería los dos, y por tanto se asemejaría a Schubert y cada uno de sus artículos sería un *lieder* grandioso. Pero quizá Charlie sea más revolucionario que todo esto; se podría argumentar que, más allá de letra y música, Charlie es como Monteverdi, el que creó un estilo musical nuevo, mezclando música, letra, la representación escénica y el baile para alcanzar cotas nunca vistas de expresión artística: la ópera. Su primera creación, *L'Orfeo*, como no podía ser de otro modo, nos cuenta cómo la música permite al héroe encantar a Caronte y de ese modo rescatar a su amada del ultramundo, convirtiendo a la música en el personaje central y, como en el caso de Charlie, a su obra en algo que nos redime.

Finalmente, y al margen de posibles desavenencias con mis apreciaciones, bien musicales, bien matemáticas, sí espero que estemos de acuerdo en que, de una manera u otra, las matemáticas de Charlie Fefferman merecen celebración, y el premio Fronteras del Conocimiento es justo reconocimiento. Su huella es profunda, visible, transcendental y ha sido objeto de numerosas reflexiones ([2], [4], y muchas otras). Consecuentemente, animo a los presentes, como ya hiciera en otra memorable ocasión ese alumno aventajado de Charlie, Antonio Córdoba, a un brindis.

¡A su salud, maestro!

Apéndice

1. Los coeficientes de Fourier de una función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ se definen como

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n\cdot x}\, dx, \qquad n \in \mathbb{N},$$

y la transformada de Fourier de f como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \xi\cdot x}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. La estabilidad de la materia se expresa de modo matemático por la desigualdad

$$\langle H_{Z,M,N}\psi, \psi\rangle \geq -C_Z \cdot (M + N),$$

donde

$$H_{Z,M,N} = \sum_{k=1}^{N} (-\Delta_{x_k}) + V_{Z,M,N} \tag{3}$$

es el hamiltoniano correspondiente a M núcleos de carga Z_i localizados en puntos y_i acompañados de N electrones en puntos x_j, y C_Z es una constante que solo depende de las cargas Z_i. En (3) el término laplaciano representa la energía cinética y la energía potencial viene dada por el operador multiplicativo

$$V_{Z,M,N} = \sum_{j<k} \frac{1}{|x_j - x_k|} + \sum_{j<k} \frac{Z_j\, Z_k}{|y_j - y_k|} - \sum_{j,k} \frac{Z_k}{|x_j - y_k|}.$$

3. Las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de *Bounded Mean Oscillation* (BMO), o de variación media acotada, vienen definidas como aquellas cuya variación sobre su media $f_Q = \fint_Q f(x)\, dx$ está acotada para todos los cubos $Q \subset \mathbb{R}^n$,

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|\, dx \leq A < \infty.$$

Por otra parte, las funciones de $H^1(\mathbb{R}^n)$ son aquellas que, estando en $L^1(\mathbb{R}^n)$, sus transformadas de Riesz $R_k f$ también estén en $L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\widehat{R_k f}(\xi) = -i\, \frac{\xi_k}{|\xi|} \cdot \hat{f}(\xi), \qquad 1 \leq k \leq n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Referencias

[1] L. Carleson, On convergence and growth of partial sums of Fourier series, *Acta Math.* **116** (1966), no. 1, 135–157,

[2] A. Córdoba y D. Córdoba, Charles Louis Fefferman, la potencia del Análisis, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **7** (2004), no. 3, 757–765.

[3] A. Córdoba, J. L. Fernández y P. Fernández (Eds.), *All That Math. Portraits of Mathematicians as Young Readers*, Real Sociedad Matemática Española y Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 2011.

[4] A. Córdoba y otros, Ad Honorem Charles Fefferman, *Notices of the AMS* **64** (2017), no. 11, 1254–1273.

[5] C. Fefferman, The multiplier problem for the ball, *Ann. of Math. (2)* **94** (1971), no. 2, 330–336.

[6] C. Fefferman, Characterizations of bounded mean oscillation, *Bull. Amer. Math. Soc.* **77** (1971), no. 4, 587–588.

[7] C. Fefferman, Pointwise convergence of Fourier series, *Ann. of Math. (2)* **98** (1973), no 3, 551–571.

[8] C. Fefferman, Whitney's extension problems and interpolation of data, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **46** (2009), no. 2, 207–220.

[9] C. Fefferman, Tribute to Elias Stein, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **57** (2020), no. 4, 639–640.

[10] C. Fefferman y R. de la Llave, Relativistic stability of matter. I, *Rev. Mat. Iberoamericana* **2** (1986), no. 1-2, 119–213.

[11] J. Fourier, *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822. Reeditado por Cambridge University Press, 2009.

Luis Seco, Department of Mathematics, University of Toronto, Canadá
Correo electrónico: luis.seco@utoronto.ca
Página web: http://seco.risklab.ca