

Jean François Le Gall y las geometrías brownianas universales

por

Marta Sanz-Solé

RESUMEN. Este artículo es un modesto homenaje a Jean-François Le Gall, con ocasión de su distinción con el Premio Fronteras del Conocimiento en Ciencias Básicas, en su XIV edición. Contiene una breve reseña biográfica y la presentación, de manera asequible a matemáticos con conocimientos de probabilidad no necesariamente amplios, de uno de sus resultados más destacados: la existencia de la *esfera browniana* y el papel que desempeña.

1. INTRODUCCIÓN BIOGRÁFICA

Jean-François Le Gall es uno de los probabilistas contemporáneos de mayor calibre y proyección internacional. Recibió su formación matemática en la École Normale Supérieure de París entre los años 1978–1982 y, ya durante este periodo, se inició en la investigación para elaborar una tesis doctoral. Lamentamos no poder desvelar cuál fue inicialmente su elección de línea de investigación y quién era el investigador que debía dirigirle el proyecto. El caso es que el joven Le Gall sintió cierto descontento con el estilo de supervisión de su tutor. Buscó, reflexionó e identificó un nuevo camino que le pareció atractivo y solvente para poder remontar la crisis y llevar a término su proyecto. Fue pues en parte el azar quien propició el encuentro entre Le Gall, el doctorando, y Marc Yor (1949–2014), su director de tesis, mentor, compañero de laboratorio durante muchos años y uno de sus colaboradores durante la infancia científica de Le Gall. Esta casualidad, tan fantástica para el desarrollo de la probabilidad, explica en buena medida la importancia de los problemas que han motivado los descubrimientos de Le Gall y, en general, su espectacular trayectoria profesional.

Marc Yor es una de las figuras más relevantes de las últimas décadas en el área de los procesos estocásticos. Enamorado de la obra pionera de Paul Lévy sobre el movimiento browniano, su legado, extremadamente prolífico, original y profundo, se mueve alrededor de este objeto matemático tan intrigante y complejo. Yor supo transmitir a Le Gall atracción por la probabilidad y fascinación por el movimiento browniano. Lo hizo del modo más adecuado para un joven estudiante con talento excepcional: recomendándole artículos substanciales y recientes para su estudio y análisis, ejerciendo de acompañante en sus descubrimientos y de catalizador en la transformación de su gran potencial en resultados tangibles. Todo ello con constancia y sin intervencionismo, con generosidad y entusiasmo.

La obra científica de Le Gall pivota en torno al mundo browniano: las salchichas, serpientes, excursiones y esferas *brownianas*, los discos y cactus *brownianos*, etc., forman parte de los titulares de sus resultados. Sus contribuciones abarcan el estudio fino de las trayectorias del movimiento browniano; por ejemplo, puntos múltiples, puntos accesibles desde el infinito, propiedades fractales o las genealogías aleatorias (procesos de ramificación, árboles aleatorios), desarrollos todos ellos seminales en la teoría del potencial aleatorio y las geometrías aleatorias. En este artículo nos centramos en un resultado concreto de este último campo: la existencia de un objeto geométrico aleatorio llamado *esfera browniana*. Para facilitar la comprensión, empezamos situando el tema en un marco elemental que tiene interés por sí mismo.

2. PRELIMINARES

No podemos adentrarnos en el universo browniano sin asegurar el conocimiento de algunos ingredientes fundamentales. Esta sección tiene esta finalidad. Consta de dos partes. En la primera se presenta el objeto básico, el *movimiento browniano*, y, en la segunda, se describe una de sus posibles construcciones como límite de una sucesión de *paseos aleatorios*. Como se verá más adelante, la construcción de la *esfera browniana* es de alguna manera una réplica de esta construcción en un paisaje mucho más complejo.

2.1. EL MOVIMIENTO BROWNIANO

Una buena parte de los desarrollos en matemáticas tienen su origen en la observación de fenómenos que ocurren a nuestro alrededor y en los laboratorios. Un ejemplo lo tenemos en el *movimiento browniano*, un objeto paradigmático y central en este artículo. Robert Brown, un botánico escocés del siglo XIX, publicó en 1828 un informe sobre las observaciones que llevó a cabo en el microscopio del movimiento de partículas de polen, y también de componentes inorgánicos en suspensión en un líquido (véase [8]). En aquella época era casi imposible dar una explicación científica rigurosa de las trayectorias erráticas de las partículas. Sin embargo, años más tarde, a finales del siglo XIX y comienzos del XX, matemáticos, físicos y químicos ilustres, entre ellos Bachelier, Ehrenhaft, Perrin, Schmoluchowski y, muy especialmente, Einstein ([12]), avanzaron en su comprensión, motivados por obtener una confirmación de la teoría atómica de la materia. No nos adentraremos aquí en una descripción de los descubrimientos tan importantes de estos científicos, sino que damos un salto en el tiempo hasta el año 1938, cuando Norbert Wiener propuso en [29] una definición sintética del movimiento browniano que es la que exponemos a continuación.

En la teoría de la probabilidad, el azar se introduce mediante una variable $\omega \in \Omega$ de un *espacio de probabilidad* subyacente (Ω, \mathcal{F}, P) , un caso particular de *espacio de medida*. Motivado por la modelización de fenómenos evolutivos no deterministas, se introduce el concepto de *proceso aleatorio* o *estocástico*, un conjunto de funciones que dependen del parámetro $\omega \in \Omega$ y que representan la evolución temporal del fenómeno. El *movimiento browniano* unidimensional es un ejemplo, entre los más

famosos, de proceso aleatorio. Siguiendo la definición dada por Wiener, es una aplicación B definida sobre $[0, \infty) \times \Omega$, con valores en \mathbb{R} , que cumple ciertas condiciones de medibilidad (que no precisaremos) y tal que:

1. $B(0, \omega) = 0$, para todo $\omega \in \Omega$.
2. Para cualquier $0 \leq s < t$, la variable aleatoria $\omega \mapsto B(t, \omega) - B(s, \omega)$ tiene una distribución normal (o gaussiana) $N(0, t - s)$.
3. Fijados $0 \leq s_1 < t_1 < s_2 < t_2$ arbitrariamente, las variables aleatorias $B(t_1, \omega) - B(s_1, \omega)$ y $B(t_2, \omega) - B(s_2, \omega)$ son independientes.
4. Para cualquier ω en un subconjunto de Ω de probabilidad 1 (es decir, *casi seguramente*), las funciones $t \mapsto B(t, \omega)$, llamadas *trayectorias*, son continuas.

En general, se omite la escritura explícita de la variable ω . La propiedad 1 establece el valor cero como inicio de todas las trayectorias. La condición 2 expresa la idea de estacionariedad temporal. Además, de ella se deduce que para cualquier valor $t > 0$, la variable aleatoria $B(t)$, definida por $\omega \mapsto B(t, \omega)$, tiene una ley normal, con valor medio cero y varianza t . La propiedad 3 indica una pérdida de memoria en la evolución futura respecto a la pasada.

La definición de movimiento browniano (o proceso de Wiener) unidimensional puede generalizarse a cualquier dimensión. Un *movimiento browniano d -dimensional*, $d \geq 1$, es una aplicación B definida en $[0, \infty) \times \Omega$, con valores en \mathbb{R}^d , tal que las aplicaciones componentes $B^j := (B^j(t, \omega), (t, \omega) \in [0, \infty) \times \Omega)$, $1 \leq j \leq d$, son movimientos brownianos unidimensionales *independientes*, es decir, cualquiera de las variables aleatorias de B^j son independientes de las de B^k si $j \neq k$. El movimiento browniano en dimensión $d = 3$ proporciona una descripción rigurosa de la trayectoria de una partícula en suspensión en un fluido: la partícula browniana. Cada una de las componentes del vector posición evoluciona independientemente de las demás en la forma de un movimiento browniano unidimensional. En el caso $d = 2$, hablamos del movimiento browniano en el plano.

2.2. APROXIMACIÓN DEL MOVIMIENTO BROWNIANO POR PASEOS ALEATORIOS

A partir de la aproximación del movimiento browniano mediante una sucesión de paseos aleatorios, ilustramos en esta sección un principio de aproximación de trayectorias aleatorias continuas por estructuras aleatorias discretas, a la vez que se exhibe una propiedad de universalidad del movimiento browniano. El objetivo es doble. Por una parte, ahondar un poco más en el conocimiento del movimiento browniano y, por otra, presentar el enfoque que servirá de guía para la comprensión del resultado de Le Gall sobre la construcción de la esfera browniana.

Consideremos el desplazamiento de una partícula en el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} de acuerdo con el mecanismo siguiente. Inicialmente ($n = 0$) la partícula está en 0. Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, la partícula se sitúa en 1; si sale cruz, la partícula se desplaza al punto -1 . Repetimos este proceso de manera independiente. Al cabo de n repeticiones, la partícula se encontrará en un punto de \mathbb{Z} que es la suma de los desplazamientos en todas las etapas anteriores. Denotaremos por $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ la sucesión de posiciones de la partícula a partir de $S_0 = 0$.

Debido al carácter aleatorio del mecanismo, cada S_n , $n \geq 1$, es una variable aleatoria que se expresa como $S_n = \sum_{m=1}^n X_m$, siendo $(X_n, n \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes que toman los valores ± 1 con probabilidad $\frac{1}{2}$, si la moneda no está trucada. La sucesión $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ es el *paseo aleatorio de Bernoulli*. Este esquema puede generalizarse. Por ejemplo, partiendo del origen del retículo \mathbb{Z}^d elegimos al azar un desplazamiento a un punto (adjunto) del conjunto $\{(\pm 1, 0, \dots, 0), (0, \pm 1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, \pm 1)\}$, cada uno de ellos con la misma o distinta probabilidad. Ello nos llevará a un valor aleatorio $S_1 \in \mathbb{Z}^d$. Repetimos el proceso de manera independiente obteniendo una sucesión $S_n : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}^d$, $n \geq 1$, en la que, como antes, $S_n = \sum_{m=1}^n X_m$, siendo $(X_n, n \geq 1)$ copias independientes de la variable aleatoria que hemos especificado en la descripción del primer desplazamiento. Otra generalización consiste en suponer que $(X_n, n \geq 1)$ son copias independientes de una variable aleatoria cualquiera. La sucesión $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$ se denomina *paseo aleatorio o caminata al azar* en \mathbb{Z}^d .

A continuación explicamos cómo se puede aproximar la *curva browniana*, o movimiento browniano d -dimensional, a partir de la sucesión de variables aleatorias $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, es decir, de una *estructura discreta*. Sin pérdida de generalidad supondremos $d = 1$ y también que $(X_n, n \geq 1)$ está formada por variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas (i.i.d) de valor medio 0 y varianza $\sigma^2 > 0$.

El procedimiento de aproximación consiste en los pasos siguientes:

- a) Se transforman las trayectorias de $(S_n, n \in \mathbb{Z}_+)$, que están formadas por un conjunto de puntos en el plano, en trayectorias continuas obtenidas por interpolación lineal de aquellas. La información contenida en ambos casos es idéntica. Así, para $t \geq 0$, y siendo $[t]$ el valor entero de t , se define $Y_t = S_{[t]} + (t - [t])X_{[t]+1}$.
- b) Se aplica al proceso aleatorio $(Y_t, t \geq 0)$ un *cambio de escala*, que produce una aceleración temporal, y una *normalización* por el factor $\sigma\sqrt{n}$. Concretamente, para todo $n \geq 1$, se define

$$B^{(n)} := \left(B_t^{(n)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} Y_{nt}, t \geq 0 \right).$$

- c) Se demuestra que la sucesión de variables aleatorias $(B^{(n)}, n \geq 1)$, con valores en el espacio de las funciones continuas, converge *en distribución*, para $n \rightarrow \infty$, hacia el movimiento browniano.

Añadimos algunos comentarios que ayudan a comprender mejor estos pasos. En la etapa b), la aceleración consiste en sustituir cada unidad de tiempo por n unidades de duración $\frac{1}{n}$. El factor $1/\sqrt{n}$ es el mismo que en el teorema del límite central de aproximación de la ley normal estándar por una sucesión de sumas de variables aleatorias i.i.d. Recordemos que, en dicho teorema, la aproximación significa que la sucesión de funciones de distribución de las respectivas variables aleatorias aproximadoras converge hacia la función de distribución de la ley $N(0, 1)$. En la teoría de la probabilidad este tipo de convergencia se denomina *convergencia en distribución*, en ley o débil.

El resultado que se enuncia del apartado c) es el *teorema de Donsker*, una versión en dimensión infinita del teorema del límite central. La terminología *versión en dimensión infinita* se refiere a que las variables aleatorias de la sucesión aproximadora toman sus valores en un espacio que no es de dimensión finita. En el ejemplo que nos ocupa, es el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}([0, \infty); \mathbb{R})$.

La extensión de la noción de convergencia en distribución de variables aleatorias con valores en $\mathcal{C}([0, \infty); \mathbb{R})$, o incluso en espacios más generales, no es una cuestión trivial. El problema es la falta de noción análoga a la de función de distribución de variables aleatorias con valores en \mathbb{R}^d . Para superar esta dificultad, se introducen las *distribuciones en dimensión finita*, es decir, las funciones de distribución de los vectores aleatorios obtenidos fijando un número cualquiera de valores $t_1, \dots, t_n \in [0, \infty)$. La convergencia de las distribuciones en dimensión finita y condiciones de compatibilidad proporcionan la generalización adecuada. Recomendamos al lector interesado en más detalles consultar la referencia [6].

El teorema de Donsker ilustra el papel universal del movimiento browniano: independientemente de la ley de las variables aleatorias $(X_n, n \geq 1)$ que intervienen en la definición del paseo aleatorio, el límite en distribución de la sucesión $(B^{(n)}, n \geq 1)$ es el movimiento browniano. En dimensión finita, el teorema del límite central nos dice que la ley $N(0, 1)$ posee una propiedad de universalidad similar.

3. LA ESFERA BROWNIANA

En esta sección presentaremos un ejemplo central de modelo continuo de geometría aleatoria en el plano, *la esfera browniana*, e indicaremos los elementos básicos de su construcción a partir de modelos discretos. Una característica importante de este objeto es su universalidad: modelos discretos diferentes, convenientemente escalados, convergen hacia el mismo límite. En la sección anterior hemos visto cómo una estructura discreta, el paseo aleatorio, tras un proceso de escalado (véase el paso b) en el apartado 2.2), converge hacia una estructura continua, el movimiento browniano. En esta sección el contexto es más complejo, pero el *principio* es análogo. El nombre «esfera» evoca un objeto geométrico bidimensional, mientras que el adjetivo «browniana» destaca el papel fundamental del movimiento browniano en su construcción. La esfera browniana, con el nombre de *carta browniana*, fue introducida en [22] con una presentación distinta.

3.1. CARTAS PLANARES ALEATORIAS

Las cartas aleatorias en dimensión 2, o planares, son estructuras aleatorias discretas que se utilizan en la construcción de la esfera browniana, aunque su interés trasciende este objetivo específico. Damos seguidamente su definición y dejamos para el final la descripción de algunos de los campos en los que tienen importancia.

DEFINICIÓN 3.1. *Una carta planar es una inmersión propia de un grafo finito y conexo en la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 . Se identifican las cartas planares que se corresponden vía un homeomorfismo de la esfera que conserva la orientación.*

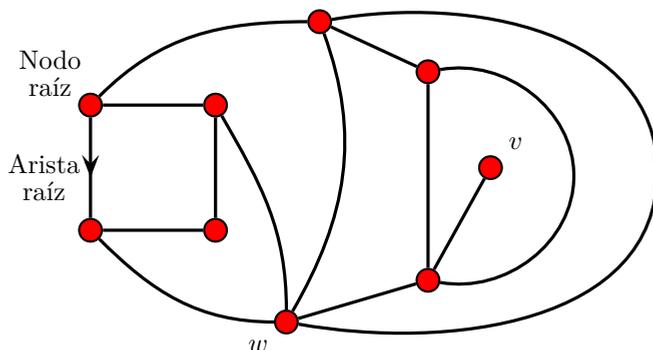


Figura 1: Una cuadrangulación planar.

El término «propia» significa que no se permiten cruces de las aristas. Las caras de la carta son las componentes conexas del complemento de la unión de aristas o, equivalentemente, las regiones limitadas por las aristas. El grado p de una cara es el número de aristas que la limitan; en el caso de que los dos lados de una arista incidan en la misma cara, esta arista cuenta dos veces en el grado de la cara. Ejemplos relevantes de cartas planares son las triangulaciones ($p = 3$) y las cuadrangulaciones ($p = 4$). En ellas todas sus caras son triángulos o cuadriláteros, respectivamente. Usaremos el término p -angulaciones en el caso de que todas las caras de la carta tengan grado p . Consideraremos cartas planares enraizadas, es decir, con una arista raíz orientada y su vértice o nodo raíz. El motivo de esta restricción es básicamente técnico.

Dotamos al conjunto $V(M)$ de los vértices de una carta planar M de la distancia usual sobre grafos, d_{gr}^M , definida así: para $v, w \in V(M)$, $d_{\text{gr}}^M(v, w)$ es el mínimo número de aristas de los caminos que conectan v con w .

Dados dos números enteros $p \geq 1$ y $n \geq 1$, denotaremos por \mathbb{M}_n^p el conjunto finito de cartas planares enraizadas con n caras y grado p . Señalemos que, si p y n son ambos impares, el conjunto \mathbb{M}_n^p es vacío. Una carta planar aleatoria es una variable aleatoria con valores en \mathbb{M}_n^p . A lo largo de este artículo suponemos que esta variable aleatoria tiene ley uniforme, es decir, suponiendo que los elementos de \mathbb{M}_n^p son bolas de una urna, se asigna a cada bola la misma probabilidad de ser elegida, y esta probabilidad es $1/\text{card}(\mathbb{M}_n^p)$.

Como veremos más adelante, para determinados valores de p , la esfera browniana se obtiene como «límite» cuando $n \rightarrow \infty$ de una sucesión de espacios métricos aleatorios $(V(M_n), d_{\text{gr}}^{M_n})$, siendo M_n una carta planar aleatoria de \mathbb{M}_n^p . En la sección siguiente introducimos la métrica que se utiliza en dicha convergencia.

Las cartas planares son objetos muy populares en combinatoria ([28]). En física teórica son utilizadas como modelos de geometría aleatoria en el ámbito de la gravedad cuántica en dimensión 2 ([3]).

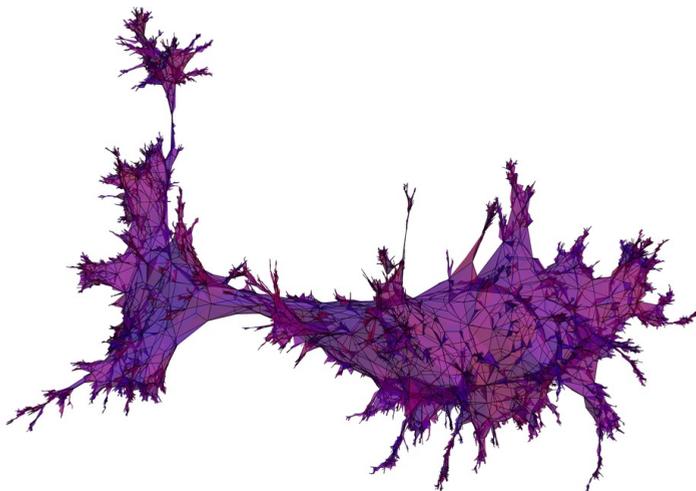


Figura 2: Simulación de una gran cuadrangulación (imagen cortesía de Jérémie Bettinelli).

3.2. LA DISTANCIA DE GROMOV-HAUSDORFF

La distancia de Gromov-Hausdorff es una métrica definida en espacios compactos. En su definición se utiliza la distancia de Hausdorff que recordamos a continuación.

Sea (E, d) un espacio métrico y K_1, K_2 subconjuntos compactos de E . La *distancia de Hausdorff* entre K_1 y K_2 se define como

$$d_{\text{Haus}}^E(K_1, K_2) := \inf \left(\varepsilon > 0 : K_1 \subset K_2^{(\varepsilon)} \text{ y } K_2 \subset K_1^{(\varepsilon)} \right),$$

donde, para un conjunto $K \subset E$, la notación $K^{(\varepsilon)}$ indica el ε -entorno de K , es decir, el conjunto de puntos de E que se encuentran a distancia menor o igual que ε de K .

Consideremos ahora dos espacios métricos compactos $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$. La *distancia de Gromov-Hausdorff* entre E_1 y E_2 es

$$d_{\text{GH}}(E_1, E_2) = \inf \left(d_{\text{Haus}}^E(\psi_1(E_1), \psi_2(E_2)) \right),$$

donde el ínfimo se extiende al conjunto de inmersiones isométricas $\psi_1 : E_1 \rightarrow E$ y $\psi_2 : E_2 \rightarrow E$.

Sobre el conjunto \mathbb{K} de los espacios métricos compactos (módulo isometrías), d_{GH} define una distancia. Además, el espacio $(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$ es un espacio separable y completo (espacio *polaco*). En la construcción de la esfera browniana este resultado es importante, ya que, en la teoría de la probabilidad, la convergencia en ley de variables aleatorias con valores en un espacio polaco está bien desarrollada.

3.3. CONVERGENCIA HACIA LA ESFERA BROWNIANA

Definimos en esta sección la sucesión de estructuras aleatorias geométricas discretas cuyo límite define el objeto aleatorio denominado esfera browniana. Precisamos

el sentido del *límite* y damos enunciados exactos de los teoremas fundamentales.

Fijamos un valor $p \geq 1$ y, para cada $n \geq 1$, elegimos una p -angulación M_n , es decir, un elemento del conjunto \mathbb{M}_n^p , siguiendo una distribución uniforme en este conjunto. Si no hay lugar a confusión diremos simplemente que «elegimos al azar» M_n , a pesar de que el término «azar» podría referirse a distribuciones de probabilidad discreta no necesariamente uniformes. De este modo obtenemos una sucesión de variables aleatorias $M_n : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_n^p$, $n \geq 1$. Consideramos esta sucesión en el marco del espacio polaco $(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$. Concretamente, estudiaremos la sucesión $(V(M_n), n^{-a} d_{\text{GH}}^{M_n})_{n \geq 1}$, $a > 0$. El factor de escalado n^{-a} se elige de modo que $\text{diam}(V(M_n)) \approx n^a$.

El teorema siguiente, que combina varios resultados de Le Gall, determina el límite en distribución de la sucesión de variables aleatorias $(V(M_n), n^{-a} d_{\text{GH}}^{M_n})_{n \geq 1}$ con valores en el espacio polaco $(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$. Es el resultado fundamental de existencia (y unicidad) de la esfera browniana, un objeto aleatorio geométrico universal.

TEOREMA 3.1 (Límite escalado de p -angulaciones). *Consideremos los casos $p = 3$ (triangulaciones) y $p \geq 4$ par. Sean*

$$c_3 = 6^{1/4}, \quad c_p = \left(\frac{9}{p(p-2)} \right)^{1/4}, \quad \text{si } p \text{ es par.}$$

Para todo $n \geq 2$ (n par si $p = 3$), sea M_n una variable aleatoria con distribución uniforme en \mathbb{M}_n^p . Entonces se cumple

$$\left(V(M_n), c_p n^{-1/4} d_{\text{GH}}^{M_n} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (\mathbf{m}_\infty, D_\infty) \quad (1)$$

en el sentido de la convergencia en distribución de variables aleatorias con valores en $(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$.

El límite $(\mathbf{m}_\infty, D_\infty)$ es una variable aleatoria con valores en $(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$ que no depende de p , tiene dimensión de Hausdorff (casi seguramente) igual a 4 y es (casi seguramente) homeomorfa a la esfera bidimensional \mathbb{S}^2 . Se denomina esfera browniana.

COMENTARIOS

1. En [26] O. Schramm conjeturó la existencia del límite (1) en el caso $p = 3$. Para los valores de p del enunciado del teorema, la demostración de (1) se encuentra en [17]. El caso $p = 4$ fue demostrado independientemente por G. Miermont en [23]. También para cuadrangulaciones, J.-F. Marckert y A. Mokkadem demuestran en [22] una versión más débil de la convergencia (1). Estos autores llaman *carta browniana* al objeto límite.
2. La constante c_p en el factor de normalización de la distancia $d_{\text{GH}}^{M_n}$ produce el efecto de independencia del límite respecto de p .
3. El resultado sobre la dimensión de Hausdorff de la esfera browniana se encuentra en [15].

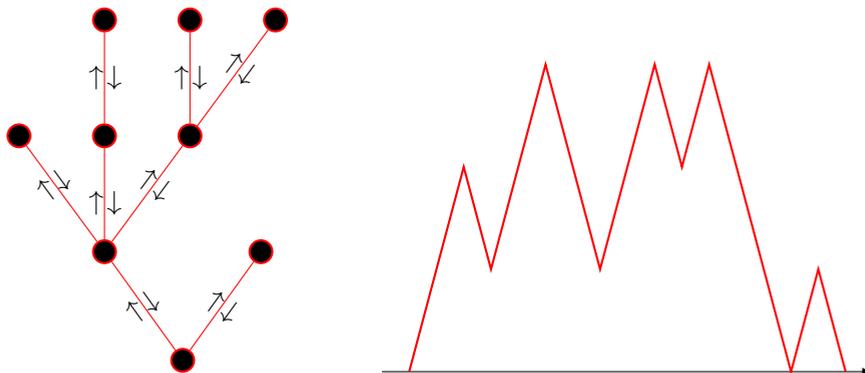


Figura 3: Codificación de un árbol plano (izquierda) por su función de contorno (derecha).

4. La propiedad de homeomorfismo (casi seguramente) de la esfera browniana y la esfera bidimensional está demostrada en [21].
5. La figura 2 es una aproximación de la esfera browniana.

3.4. METODOLOGÍA DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA ESFERA BROWNIANA

Para simplificar la exposición nos centramos en el caso $p = 4$ (cuadrangulaciones). La esfera browniana se obtiene en tres etapas en las que se utilizan dos procedimientos clave, *codificaciones* y *límites escalados*. Son las siguientes:

1. Codificación de cuadrangulaciones (cartas planares) mediante árboles etiquetados.
2. Límite escalado de árboles etiquetados aleatorios hacia un objeto continuo: el *árbol aleatorio continuo*.
3. Definición de la esfera browniana a partir del árbol aleatorio continuo.

Los *árboles planos* son árboles enraizados en los que se especifica un orden para los descendientes de cada generación. Notaremos \mathbb{A}_n el conjunto de árboles planos con n aristas. A todo árbol plano se le asocia una *función de contorno*, (C_τ) , una codificación o manera de representar la evolución de la descendencia (véase la figura 3). Sin entrar en los detalles precisos de su definición, que el lector puede encontrar en [27], destacamos que la gráfica de (C_τ) es similar a la de un paseo aleatorio forzado a tomar solamente valores mayores o iguales a cero.

Los *árboles etiquetados* (τ) son árboles planos cuyos vértices se enumeran de una forma *coherente* $((l_v)_{v \in \tau})$. Los designaremos $(\tau, (l_v)_{v \in \tau})$ y notaremos \mathbb{T}_n el conjunto de árboles etiquetados de n aristas. La figura 4 muestra un ejemplo de árbol plano etiquetado.

Existe una biyección, llamada CVS, entre \mathbb{T}_n y $\mathcal{Q}_n := \mathbb{M}_n^4$, el conjunto de cuadrangulaciones con n caras. La denominación hace referencia a Cori, Vauquelin y

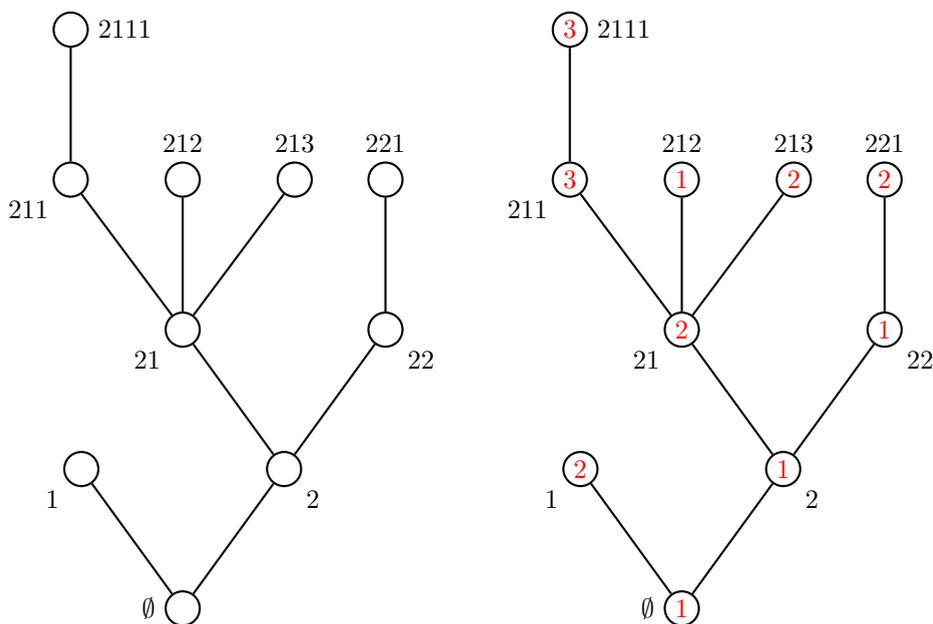


Figura 4: Izquierda: árbol plano (la raíz se ha denotado por \emptyset). Derecha: árbol plano etiquetado.

Schaeffer, los autores de [10], [25], y también [9], donde se encuentra la construcción detallada de la cuadrangulación asociada al árbol y la de la aplicación inversa. Además de la biyección, también se obtiene una fórmula que relaciona la distancia de grafo $d_{\text{gr}}^{\mathcal{Q}_n}$ con las etiquetas $(l_v)_v$ del árbol. Esta observación es relevante puesto que la esfera browniana es un espacio métrico compacto aleatorio y, por tanto, en su construcción como objeto límite, se deben tener en cuenta las métricas de los espacios relevantes en las distintas etapas. La biyección CVS proporciona la codificación mencionada en la etapa 1.

De la biyección CVS se deduce que un buen conocimiento del árbol etiquetado asociado a una carta aleatoria plana proporciona información útil sobre las propiedades métricas del conjunto de vértices de la carta planar equipada con la distancia de grafo. Cabe señalar que existen biyecciones análogas a la CVS para p -angulaciones con $p \geq 3$ cualquiera (véase, por ejemplo, [7]).

La etapa 2 se desarrolla en varias fases. En primer lugar se considera una sucesión de árboles *aleatorios planos*, es decir, una sucesión de variables aleatorias $\tau_n : \Omega \rightarrow \mathbb{A}_n$ independientes con distribución uniforme. Una cuestión fundamental consiste en determinar qué tipo de aleatoriedad subsiste cuando se efectúan límites en distribución de escalados de $(\tau_n)_n$. Para mejor entender este objetivo, es útil recordar el teorema de Donsker de convergencia en distribución del paseo aleatorio hacia el movimiento browniano. Fijada la sucesión $(\tau_n)_n$, consideramos la sucesión de funciones de contorno (aleatorias) correspondiente, $(C_{\tau_n})_n$. Convenientemente escalada,

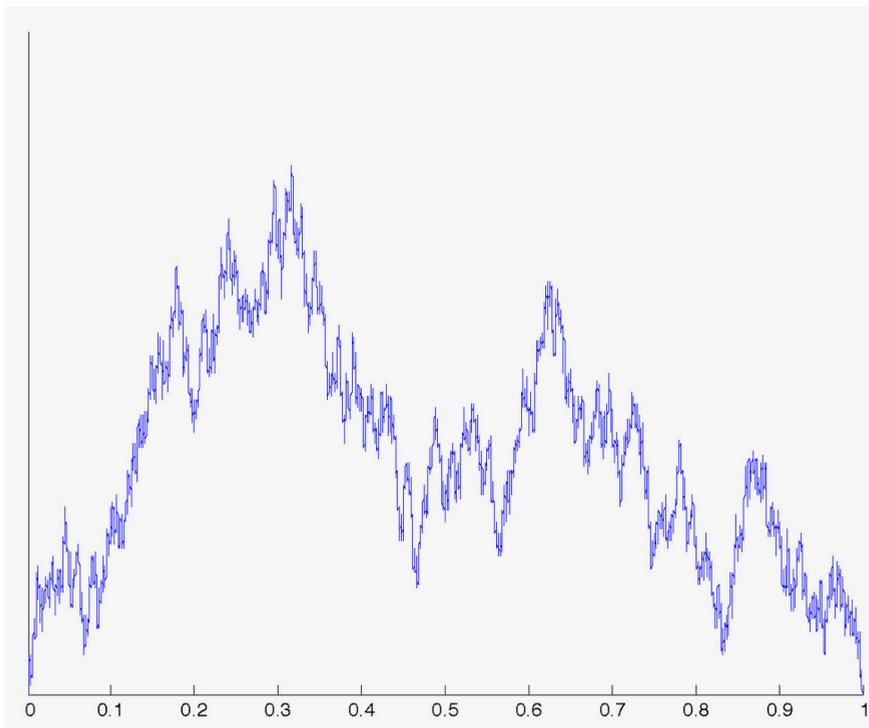


Figura 5: Simulación de una excursión browniana (imagen cortesía de Igor Kortchemski).

de manera análoga al teorema de Donsker, esta sucesión converge en distribución en el espacio de las funciones reales continuas de $[0, 1]$. Concretamente,

$$\left((2n)^{-1/2} C_{\tau_n}(2nt) \right)_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e_t)_{0 \leq t \leq 1}$$

(véase [20]). El proceso $(e_t)_{0 \leq t \leq 1}$ es una *excursión browniana*, que se define como un movimiento browniano unidimensional sometido a las restricciones $e_0 = e_1 = 0$, y $e_t \geq 0$, para todo $t \in (0, 1)$; la figura 5 es una simulación de una trayectoria de excursión browniana. Así, en esta primera fase de la etapa 2 aparece el movimiento browniano en la forma concreta de las excusiones de sus trayectorias.

Una vez identificado el límite de la sucesión de funciones de contorno $(C_{\tau_n})_n$, la fase siguiente consiste en «descodificar», es decir, descubrir un objeto aleatorio cuya función de contorno (definida adecuadamente) es la excursión browniana, y es un límite escalado de $(\tau_n)_n$. De manera más precisa, se demuestra la convergencia en distribución en el espacio \mathbb{K} ,

$$\left(\tau_n, (2n)^{-1/2} d_{\text{gr}}^{\tau_n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (\mathcal{T}_e, d_e). \tag{2}$$

El objeto límite \mathcal{T}_e es el CRT (del inglés *continuous random tree*) introducido y

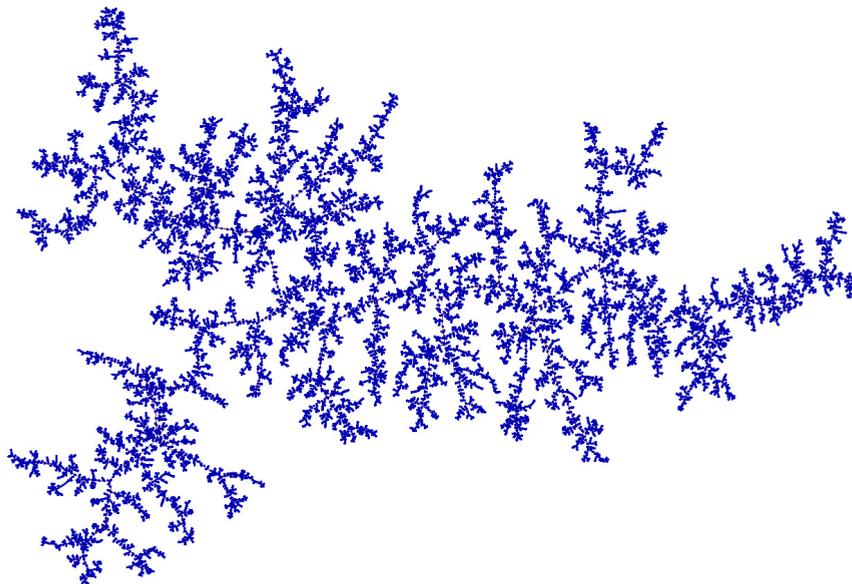


Figura 6: Aproximación del CRT (imagen cortesía de Igor Kortchemski).

estudiado por Aldous [2] en el contexto de los procesos estocásticos de ramificación. Le Gall interpreta en [14] el CRT como un elemento aleatorio de la clase de *árboles en \mathbb{R}* , enraizados, codificados por una función de contorno d , a partir de la cual se define una distancia d_h de modo que (\mathcal{T}_h, d_h) es un espacio compacto de \mathbb{R} . El lector puede ignorar esta descripción críptica y quedarse con la idea de que el CRT de Aldous es un objeto que recuerda al árbol planar, pero mucho más complejo, como sugiere (2) y se ilustra en la figura 6.

En las dos convergencias anteriores no hemos supuesto que los elementos de la sucesión de árboles planos $(\tau_n)_n$ estaban etiquetados. La última fase de esta etapa consiste en considerar una sucesión de árboles planos etiquetados $(\tau_n, (l_v^n)_{v \in \tau_n})_n$. Se efectúa primero una interpolación y escalado de la sucesión de etiquetas por el factor $n^{-1/4}$ y se demuestra que el límite en distribución de la nueva sucesión existe. A continuación se identifica el límite, que resulta también relacionado con el movimiento browniano: es la *serpiente browniana* $Z := (Z_t)_{0 \leq t \leq 1}$ (véase [13]), que puede interpretarse como un movimiento browniano indexado por el árbol \mathcal{T}_e . Este proceso estocástico juega el rol del «etiquetado» de \mathcal{T}_e . El par (\mathcal{T}_e, Z) se denomina *árbol aleatorio continuo*. Obsérvese que la aleatoriedad aparece en dos niveles, el del árbol real \mathcal{T}_e y el de su etiquetado Z .

Tenemos ya los ingredientes para la definición de la *esfera browniana*. De forma coloquial podemos describir la *esfera browniana* como un objeto aleatorio geométrico que se obtiene identificando ciertos pares de puntos de \mathcal{T}_e . Este procedimiento se inspira en la recuperación de un árbol plano a partir de su función de contorno

(véase la figura 3), pero es inmensamente más complejo. Damos a continuación una descripción muy sucinta de ello. En primer lugar se define una pseudodistancia D en \mathcal{T}_e a partir del proceso Z , inspirada en la expresión de la distancia d_{gr}^Q en términos de las etiquetas del árbol planar obtenida en la biyección CVS. Se define la relación de equivalencia en \mathcal{T}_e , $a \approx b$ si y solo si $D(a, b) = 0$. Finalmente, se define el espacio cociente

$$\mathbf{m}_\infty := \mathcal{T}_e / \approx,$$

y se le asigna la distancia inducida por D , que notamos D_∞ . Con ello finalizamos la descripción de la construcción del espacio métrico aleatorio $(\mathbf{m}_\infty, D_\infty)$, la esfera browniana, que es el límite de la convergencia (1).

COMENTARIOS

1. Utilizando ideas ligeramente diferentes a las expuestas anteriormente, Addario-Berry y Albenque han extendido en [1] la validez del teorema 3.1 a valores impares $p \geq 5$.
2. Se han estudiado también otras geometrías aleatorias. Entre ellas destacan:
 - a) El *plano browniano*, un modelo aleatorio de volumen infinito obtenido como límite de retículos infinitos aleatorios convenientemente escalados (véase [11]).
 - b) El *disco browniano*, construido como límite escalado de cartas en el plano con frontera (véase [4], [5]). El disco browniano es isomorfo al disco unidad.
3. El estudio de las geodésicas de la esfera browniana es un tema natural y relevante que no abordamos en este artículo. El lector interesado puede encontrar información detallada sobre esta cuestión en [16].
4. Uno de los desarrollos recientes más celebrados relacionados con la esfera browniana se encuentra en [24]. En este trabajo Miller y Sheffield utilizan el proceso estocástico *campo libre gaussiano*, una generalización del movimiento browniano, y la *evolución cuántica de Löwner* para obtener una construcción de la esfera browniana dotada de una estructura conforme. Esta es una aportación más al conocimiento de las conexiones profundas entre la gravedad cuántica y las geometrías aleatorias.

4. EPÍLOGO

La obra científica de Le Gall se ha construido de manera progresiva, sin rupturas o golpes de timón en lo que refiere al campo de conocimiento. La culminación han sido sus descubrimientos en geometría aleatoria, empezando por la construcción de un objeto aleatorio canónico, que es el límite de familias de cartas planares aleatorias y, por tanto, un objeto universal en el sentido de la física. Sus trabajos han tenido y están teniendo mucha influencia e impacto en campos donde la teoría de la probabilidad interviene de manera fundamental, por ejemplo en la gravedad cuántica (de Liouville), o en los procesos físicos de crecimiento y fragmentación.

Le Gall ha recibido numerosos premios y reconocimientos nacionales e internacionales. Entre ellos, cabe destacar el Premio Wolf de matemáticas 2019, y el que estamos celebrando con este artículo de *La Gaceta*: el Premio Fronteras del Conocimiento en Ciencias Básicas. Como su insigne maestro Marc Yor, Le Gall ha desarrollado una extensa y exitosa actividad de formación de investigadores, muchos de los cuales son en la actualidad probabilistas prestigiosos. Entre ellos está Wendelin Werner, el primer probabilista galardonado con la Medalla Fields, en el ICM 2006 en Madrid.

REFERENCIAS

- [1] L. ADDARIO-BERRY Y M. ALBENQUE, Convergence of odd-angulations via symmetrization of labeled trees, *Annales Henri Lebesgue* **4** (2021), 653–683.
- [2] D. ALDOUS, The continuum random tree, *Ann. Probab.* **19** (1991), 1–28.
- [3] J. AMBJØRN, B. DURHUUS Y T. JONSSON, *A statistical field theory approach*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [4] J. BETTINELLI, Scaling limit of random planar quadrangulations with a boundary, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **51** (2015), 432–477.
- [5] J. BETTINELLI Y G. MIERMONT, Compact Brownian surfaces I. Brownian disks, *Probab. Theory Related Fields* **167** (2017), 555–614.
- [6] P. BILLINGSLEY, *Convergence of probability measures*, 2.^a ed., Wiley, 1999.
- [7] J. BOUTTIER, P. DI FRANCESCO Y E. GUITTER, Planar maps as labeled mobiles, *Electron. J. Combin.* **11** (2004), #R69.
- [8] R. BROWN, A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies, *Phil. Mag.* **4** (1828), 161–173.
- [9] P. CHASSAING Y G. SCHAEFFER, Random planar lattices and integrated super Brownian excursion, *Probab. Theory Related Fields* **128** (2004), 161–212.
- [10] R. CORI Y B. VAUQUELIN, Planar maps are well labeled trees, *Canad. J. Math.* **33** (1981), 1023–1042.
- [11] N. CURIEN Y J.-F. LE GALL, The Brownian plane, *J. Theoretical Probab.* **27** (2014), 1249–1291.
- [12] A. EINSTEIN, Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, *Ann. Phys.* **17** (1905), 549–560.
- [13] J.-F. LE GALL, *Spatial branching processes, random snakes and partial differential equations*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1999.
- [14] J.-F. LE GALL, Random trees and applications, *Probab. Surveys* **2** (2005), 245–311.
- [15] J.-F. LE GALL, The topological structure of scaling limits of large planar maps, *Invent. Math.* **169** (2007), 621–670.

- [16] J.-F. LE GALL, Geodesics in large planar maps and in the Brownian map, *Acta Math.* **205** (2010), 287–360.
- [17] J.-F. LE GALL, Uniqueness and universality of the Brownian map, *Ann. Probab.* **41** (2013), 2880–2960.
- [18] J.-F. LE GALL, Brownian geometry, *Japan. J. Math.* **14** (2019), 135–174.
- [19] J.-F. LE GALL, Mini-course on Brownian geometry, *2022 PIMS-CRM Summer School in Probability*, <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jflgall/talks-bis.html>
- [20] J.-F. LE GALL Y G. MIERMONT, Scaling limits of random trees and planar maps, *Probability and Statistical Physics in Two and More Dimensions*, 155–211, Clay Math. Proc., 15, Amer. Math. Soc., 2012.
- [21] J.-F. LE GALL Y F. PAULIN, Scaling limits of random trees and planar maps, *Geom. Funct. Anal.* **18** (2008), 893–918.
- [22] J.-F. MARCKERT Y A. MOKKADEM, Limit of normalized quadrangulations: the Brownian map, *Ann. Probab.* **34** (2006), 2144–2202.
- [23] G. MIERMONT, The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations, *Acta Math.* **210** (2013), 319–401.
- [24] J. MILLER Y S. SHEFFIELD, Liouville quantum gravity and the Brownian map I: The QLE(8/3, 0) metric, *Invent. Math.* **219** (2020), 75–152.
- [25] G. SCHAEFFER, Conjugaison d’arbres et cartes combinatoires aléatoires, *PhD thesis*, Université de Bordeaux I, 1998.
- [26] O. SCHRAMM, Conformally invariant scaling limits: an overview and a collection of problems, *International Congress of Mathematicians* (Madrid, 2006), Vol. I, 513–543, Eur. Math. Soc., Zurich, 2007.
- [27] R. P. STANLEY, *Enumerative Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [28] W. T. TUTTE, A census of planar maps, *Canad. J. Math.* **15** (1963), 249–271.
- [29] N. WIENER, The homogeneous chaos, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 879–936.

MARTA SANZ-SOLÉ, DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES I INFORMÀTICA, UNIVERSITAT DE BARCELONA
Correo electrónico: marta.sanz@ub.edu
Pàgina web: <https://www.ub.edu/probabilitats-seminaribcn/Sanz-Sole/>