Problemas y Soluciones

Sección a cargo de

Óscar Ciaurri y Emilio Fernández Moral

Las soluciones para esta sección deben enviarse, preferentemente, a la dirección de correo electrónico `oscar.ciaurri@unirioja.es` *en archivos con formato TEX. Alternativamente, pueden enviarse a Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja, Dpto. de Matemáticas y Computación, C/ Madre de Dios 53, 26006, Logroño. Para los problemas de este número se tendrán en cuenta las soluciones recibidas hasta el 30 de junio de 2023.*

Asimismo, solicitamos de los lectores propuestas originales o problemas poco conocidos adecuadamente documentados. Las propuestas de problemas que se envíen sin solución serán tenidas en cuenta si su interés está justificado de un modo apropiado. Un asterisco (⋆) junto al enunciado de un problema indica que en estos momentos no se dispone de una solución.

Problemas

Problema 442 (Corrección). *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Probar que existe una colección infinita de conjuntos de cuatro triángulos rectángulos distintos, las longitudes de cuyos lados son números naturales y que tienen la misma área, que no contiene conjuntos asociados. (Llamamos aquí *asociados* a dos conjuntos C y D de triángulos cuando existe un entero positivo k tal que cada triángulo de D es semejante con razón de semejanza k a un triángulo de C.)

Problema 449. *Propuesto por Víktor Buniakovski, París, Francia.*

Sea p un número primo cualquiera de la forma $4n+1$. Probar que

$$\sum_{m=1}^{\frac{p-5}{4}} [\sqrt{mp}] = \frac{(p-1)(p-5)}{12}.$$

Problema 450. *Propuesto por Toyesh Prakash Sharma (estudiante), St. C. F. Andrews School, Agra, India.*

Sean $\lambda \in [0,1]$ y $0 < b < a$. Probar que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\lambda} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\lambda} \leq \sqrt{\lambda}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right).$$

Problema 451. *Propuesto por George Stoica, Saint John, New Brunswick, Canadá.*

Sean r y M números reales positivos, z_0 un número complejo y $P(z)$ un polinomio homogéneo con coeficientes complejos tal que $|P(z)| \leq M$ en el disco $|z - z_0| \leq r$. Probar que $|P(z)| \leq M$ cuando $|z| \leq r$.

Problema 452. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Determinar todas las ternas de enteros positivos (a, b, c) que verifican la relación

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = c.$$

Problema 453. *Propuesto por Seán M. Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Arabia Saudita.*

Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{\mathcal{H}_n}{2^{3n}} = \sqrt{2}\log\left((6 - 4\sqrt{2})(2 + \sqrt{3})\right),$$

donde $\mathcal{H}_n$ es el n-ésimo número armónico alternado, definido por

$$\mathcal{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Problema 454. *Propuesto por Miguel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.*

El triángulo ABC es isósceles y $\angle BAC > \pi/2$. Sean D un punto del segmento BC y E un punto del segmento DC tales que $\angle DAE + \angle CAB = \pi$. Sea F el punto de la semirrecta AD tal que $|AF| = |DC|$ (se denota por $|XY|$ la longitud del segmento XY) y sea G el punto de la semirrecta AE tal que $|AG| = |BE|$. Probar:

a) Las rectas DE y FG son paralelas.

b) Se cumple que $|AD| + |AE| = |FG|$.

Problema 455. *Propuesto por Juan José Isach Mayo y Miguel Ángel Pérez García-Ortega.*

Se considera un triángulo ABC, de incentro I e inradio r. Sea ω una circunferencia tangente a los lados AB y AC en los puntos V y W, respectivamente, y además tangente interiormente a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC (la circunferencia ω se denomina *circunferencia inscrita mixtilineal* del triángulo ABC correspondiente al vértice A). Sean J y ρ el centro y el radio de ω, y sea Q el punto medio del segmento VW. Probar:

a) Se tiene $\rho > r$ y $\rho/r = IJ/IQ$.

b) $\rho/r \leq 2$ si y solo si $\angle BAC \leq \pi/2$, y la primera es una igualdad si y solo si el triángulo es rectángulo en A.

c) Denotando con a, b, c las longitudes de los lados BC, CA, AB, se cumple la desigualdad
$$\frac{\rho}{r} \leq 1 + \frac{a^2}{(b+c)^2 - a^2},$$
con igualdad si y solo si $b = c$.

d) Si $\rho/r = (1+\sqrt{5})/2$, entonces $\cos(\angle BAC) = \sqrt{5} - 2$.

Problema 456. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Encontrar $x, y, z \in (0, \pi/2)$ que verifican el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2\operatorname{sen}^2 x = \tan y, \\ 3\operatorname{sen}^3 y \cos y = \tan z(\operatorname{sen}^4 y + \cos^2 y), \\ 4\operatorname{sen}^4 z + \cos^2 z = \tan x(\operatorname{sen}^4 z + \cos^4 z). \end{cases}$$

Soluciones

Nota. Por un descuido involuntario, entre las soluciones correctas recibidas al Problema 421 olvidamos citar la enviada por Pablo Fernández. Pedimos disculpas por ello.

Problema 425. *Propuesto por Seán M. Stewart, Bomaderry, NSW, Australia.*

Para cada $x \geq 0$, sea $y = g(x)$ la única raíz positiva de la ecuación $ye^y = x$. Probar que
$$\int_0^\infty \frac{g^2(xe^{-x})}{x}\, dx = \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{6}.$$

Solución enviada por Brian Bradie, Christopher Newport University, Newport, VA, EE.UU.

La función $y = g(x)$, definida para cada $x \geq 0$ por la ecuación $ye^y = x$, es la denominada función W_0 de Lambert y es conocido que

$$W_0^2(x) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{n-3}}{(n-2)!} x^n.$$

Este resultado puede obtenerse mediante la denominada fórmula de inversión de Lagrange. Por el criterio del cociente, el radio de convergencia de la serie es $1/e$ y, por el criterio de Leibniz para series alternadas, la serie también converge para $x = 1/e$. Como $0 < xe^{-x} \leq 1/e$ para $x > 0$, se tiene que la serie

$$W_0^2(xe^{-x}) = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{n-3}}{(n-2)!} x^n e^{-nx}$$

converge uniformemente para $x > 0$. De este modo, intercambiando la serie y la integral y usando la identidad

$$\int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-ax}\, dx = \frac{\Gamma(t)}{a^t}, \qquad a, t > 0,$$

tenemos

$$\int_0^{\infty} \frac{W_0^2(xe^{-x})}{x}\, dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{n-3}}{(n-2)!} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-nx}\, dx = 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-1)}{n^3}.$$

Así, aplicando que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = 1 - \frac{1}{2}\zeta(2)$$

y

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = 1 - \frac{3}{4}\zeta(3),$$

concluimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{W_0^2(xe^{-x})}{x}\, dx = \frac{3}{2}\zeta(3) - \zeta(2) = \frac{3}{2}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{6}.$$

También resuelto por P. Perfetti, A. Stadler y el proponente.

NOTA. Las soluciones de Perfetti y del proponente son muy similares a la presentada. Sin embargo, Stadler en su solución prueba la interesante identidad

$$g^2(xe^{-x}) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^2(z+1)e^z}{ze^z - xe^{-x}}\, dz,$$

donde C es la circunferencia $|z-1| = 2$ recorrida en sentido positivo, y basa en ella su solución.

Problema 426. *Propuesto por Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Sean a, b y c números reales positivos tales que $a \geq b \geq c$ y $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Probar que

$$a+b+c+\frac{b(a^2-c^2)}{2ac} \geq 3.$$

Solución enviada por Manuel Gómez Lara (jubilado), Córdoba.

Sea

$$f(a,b,c) = a+b+c+\frac{b(a^2-c^2)}{2ac}.$$

Puesto que en la variable b se trata de una función lineal y no decreciente, por ser $a \geq c$, alcanzará su mínimo valor cuando b tome su valor menor; es decir, en $b = c$. Por tanto, $f(a,b,c) \geq f(a,c,c)$. Además, cuando $b = c$ la relación $a^2+b^2+c^2+abc = 4$ se transforma en

$$0 = a^2 + 2c^2 + ac^2 - 4 = (a+2)(a-2+c^2),$$

y esto implica $c^2 = 2-a$. Además, es claro que $1 \leq a \leq 2$. Por tanto,

$$f(a,b,c) \geq f(a,\sqrt{2-a},\sqrt{2-a}) = 2\sqrt{2-a} + \frac{3a^2+a-2}{2a} =: g(a), \quad 1 \leq a \leq 2.$$

Veamos ahora que $g(a) \geq 3$ si $1 \leq a \leq 2$. Resulta sencillo comprobar que $g(1) = g(2) = 3$. Además, como

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2-a}} + \frac{3a^2+2}{2a^2} \qquad \text{y} \qquad g''(x) = \frac{-1}{2(2-a)^{3/2}} - \frac{2}{a^2},$$

por el teorema de Rolle, la función g tiene un único punto crítico $x_0 \in (1,2)$ que resulta ser el máximo absoluto en $[1,2]$, es creciente en $[1,x_0)$ y decreciente en $(x_0,2]$. De todo lo anterior se concluye que $g(a) \geq 3$ si $1 \leq a \leq 2$ y, por tanto, que $f(a,b,c) \geq 3$ sujeta a las restricciones $a \geq b \geq c$ y $a^2+b^2+c^2+abc = 4$, como queríamos probar.

También resuelto por Kee-Wai Lau, P. Perfetti, C. Sacristán, A. Stadler y el proponente.

Problema 427. *Propuesto por Marian Cucoanes, Rumanía, y Juan José Isach Mayo, España.*

Se considera un triángulo ABC tal que $3\angle BAC + \angle ACB = 2\pi$. Sean I y r el incentro y el inradio del triángulo ABC. Sean J y r_1 el incentro y el inradio del triángulo AIC. Sea D el punto de intersección de las rectas IJ y AC. Finalmente, sean K y r_2 el incentro y el inradio del triángulo AID. Probar que

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}.$$

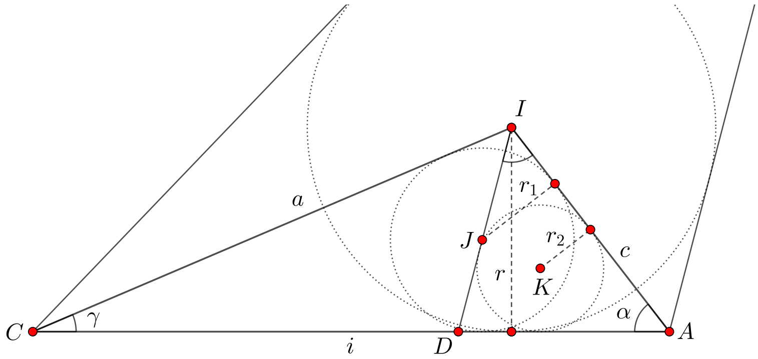

Figura 1: Esquema para la primera solución del Problema 427.

Primera solución, enviada por Miguel Ángel Pérez García-Ortega.

Sean, además, a, i y c, respectivamente, las longitudes de los lados IC, CA y AI del triángulo AIC, $\Delta = [AIC]$ su área, $\alpha = \angle IAC$ y $\gamma = \angle ICA$ (ver la figura 1). Según la condición de suma de ángulos enunciada,

$$3\alpha + \gamma = \frac{1}{2}(3\angle BAC + \angle ACB) = \pi.$$

Entonces, $\gamma = \pi - 3\alpha$ y

$$\angle AID = \frac{1}{2}\angle AIC = \alpha,$$

con lo que el triángulo AID es isósceles y se tiene $ID = AD$.

Por otra parte, a partir de las igualdades $2\Delta = ir = (a+i+c)r_1$ se obtiene

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{a+2i+c}{2\Delta}, \tag{1}$$

el teorema de la bisectriz en el triángulo AIC da la relación

$$AD = \frac{ic}{a+c} \tag{2}$$

y, considerando que los triángulos AIC y AID tienen la misma altura respecto del vértice común I, resulta, usando (2),

$$[AID] = \Delta \cdot \frac{AD}{AC} = \frac{\Delta c}{a+c}. \tag{3}$$

Pero, aplicando nuevamente (2), se tiene también

$$[AID] = \frac{AI + 2AD}{2} r_2 = \frac{r_2}{2}\left(\frac{2ic}{a+c} + c\right) = \frac{r_2}{2} \cdot \frac{c(a+2i+c)}{a+c}. \tag{4}$$

Comparando las expresiones (3) y (4) resulta $2\Delta = (a + 2i + c)r_2$. Finalmente, de (1) se deduce que

$$\frac{1}{r_2} = \frac{a + 2i + c}{2\Delta} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}.$$

Segunda solución, enviada por Kee-Wai Lau, Hong Kong, China.

Sea $\alpha = (\angle BAC)/2$. Pongamos $\operatorname{sen}\alpha = t$. Como $3\angle BAC + \angle ACB = 2\pi$, se tiene $\alpha < \pi/3$ y por tanto $0 < t < \sqrt{3}/2$. Es claro que $AI = r/t$ y, como $\angle ACB = 2(\pi - 3\alpha)$,

$$CI = \frac{r}{\operatorname{sen}(\pi - 3\alpha)} = \frac{r}{t(3 - 4t^2)}.$$

Por otra parte, aplicando el teorema del seno al triángulo AIC, obtenemos

$$AC = \frac{CI \operatorname{sen}(\angle AIC)}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{CI \operatorname{sen}(2\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha} = 2CI\cos\alpha = \frac{2r\sqrt{1 - t^2}}{t(3 - 4t^2)}.$$

Con algún cálculo, entonces, resulta

$$r_1 = \frac{AI \cdot AC \operatorname{sen}\alpha}{AI + IC + AC} = \frac{r}{1 + 2\sqrt{1 - t^2}}.$$

Además IJ biseca el ángulo AIC, luego $\angle AID = \alpha$. Entonces,

$$AD = ID = \frac{1}{2}\, AI \sec\alpha = \frac{r}{2t\sqrt{1 - t^2}}$$

y, nuevamente con un pequeño cálculo, llegamos a que

$$r_2 = \frac{AI \cdot AD \operatorname{sen}\alpha}{AI + ID + AD} = \frac{r}{2(1 + \sqrt{1 - t^2})}.$$

Así, la relación requerida se sigue inmediatamente.

También resuelto por F. D. Aranda, M. Gómez, J. Nadal, B. Salgueiro, A. Stadler y los proponentes.

Nota. La solución enviada por los proponentes es similar a la primera de las publicadas, y la enviada por Stadler es similar a la segunda. En su solución, Aranda prueba además la semejanza de los triángulos AIC e IDC y, llamando $k = ID/AI$ $(1/2 < k^2 < 1)$ a la razón de semejanza entre estos triángulos (nótese la relación $k = 1/\sqrt{1 - t^2}$ entre este parámetro y el parámetro t de la segunda solución publicada), expresa las longitudes de los tres radios r, r_1 y r_2 en función de k y de la longitud $i = AC$. Las otras soluciones recibidas hacen un uso más amplio y variado de recursos trigonométricos.

PROBLEMA 428. *Propuesto por Daniel Sitaru, Drobeta Turnu Severin, Rumanía.*

Si $0 < a \leq b$, probar que

$$\left(\int_a^b \sqrt{\log^2 x + 2\log x + 2}\, dx\right)^2 \geq (b-a)^2 + \log^2\left(\frac{b^b}{a^a}\right).$$

Solución enviada por Henry Ricardo, Westchester Area Math Circle, Purchase, NY, EE.UU.

Para $p \in (0,1)$, la desigualdad de Minkowski inversa establece que

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Así, tomando $p = 1/2$, $f(x) = (\log x + 1)^2$ y $g(x) = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b \sqrt{\log^2 x + 2\log x + 2}\, dx\right)^2 &= \left(\int_a^b \sqrt{(\log x + 1)^2 + 1}\, dx\right)^2 \\
&\geq \left(\int_a^b |\log x + 1|\, dx\right)^2 + \left(\int_a^b 1\, dx\right)^2 \\
&\geq \left(\int_a^b (\log x + 1)\, dx\right)^2 + (b-a)^2 \\
&= \left(\int_a^b (x\log x)'\, dx\right)^2 + (b-a)^2 \\
&= (b\log b - a\log a)^2 + (b-a)^2 = \log^2\left(\frac{b^b}{a^a}\right) + (b-a)^2,
\end{aligned}$$

que es la desigualdad propuesta.

También resuelto por B. Bradie, M. Gómez, A. Stadler, S. M. Stewart y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.

PROBLEMA 429. *Propuesto por Emilio Fernández Moral, Logroño, y Mercedes Sánchez Benito, Madrid.*

En un triángulo rectángulo ABC de hipotenusa BC, sean K, L y M, respectivamente, los puntos medios de los lados AB, BC y AC, sea Γ la semicircunferencia de diámetro BC que contiene el punto A, y sean r_1 y r_2, respectivamente, las mediatrices de los segmentos AB y AC. Sean $D = r_1 \cap \Gamma$ y $E = r_2 \cap \Gamma$.

Por un lado, sean γ_1 la circunferencia inscrita en el triángulo CML y γ_1^* la circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente exteriormente a γ_1. Sea

K' el punto de intersección entre γ_1^* y r_1 para el que se cumple que D es interior al segmento KK'. Sea R' el punto medio de $K'D$ y sea R el simétrico de R' respecto de D. Sea Ψ_1 la elipse de focos R y R' que pasa por K'.

Por otro lado, sean γ_2 la circunferencia tangente a la recta AB en el punto K y tangente también a la recta BC, y γ_2^* la circunferencia que pasa por los puntos A y C y es tangente exteriormente a γ_2. Sean H y H' los puntos de intersección entre γ_2^* y r_2, denominando H a aquel para el que se cumple que E es interior al segmento MH. Sea P el punto medio de EH y sea P' el simétrico de P respecto del punto medio J del segmento HH'. Sea Ψ_2 la elipse de focos P y P' que pasa por H.

Calcular el cociente entre las áreas interiores a Ψ_1 y Ψ_2 en función de los lados de ABC.

Solución elaborada por los editores a partir de la enviada por los proponentes y de la solución parcial enviada por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.

Tomaremos, en un sistema de coordenadas cartesianas, $A = (0,0)$, $B = (c,0)$ y $C = (0,b)$. Supondremos $b \leq c$. Denotaremos $BC = a$ y $s = (a+b+c)/2$.

En primer lugar, si G es el centro de γ_1, el radio de γ_1 es igual a $(s-a)/2$, y es inmediato ver que $G = \big((s-a)/2, (s-a+b)/2\big)$. Sea $I = (c/2, \eta)$ el centro de γ_1^*. El radio de γ_1^* es igual a $IA = \sqrt{c^2/4 + \eta^2}$ (véase la figura 2).

La distancia GI es igual a la suma de los radios de γ_1 y γ_1^*, lo que da la ecuación en η

$$\sqrt{\left(\frac{c}{2} - \frac{s-a}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{s-a+b}{2}\right)^2} = \frac{s-a}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \eta^2} \tag{1}$$

que, elevando al cuadrado los dos miembros, se transforma en

$$-\eta(s-a+b) + \frac{(s-a+b)^2}{4} - \frac{c(s-a)}{2} = (s-a)\sqrt{\frac{c^2}{4} + \eta^2}.$$

Volviendo a elevar al cuadrado aquí y dividiendo después por $(s-a+b)$ se llega a la ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned}\frac{b(2s-2a+b)}{(s-a+b)}\eta^2 - 2\left(\frac{(s-a+b)^2}{4} - \frac{c(s-a)}{2}\right)\eta \\ + \frac{s-a+b}{4}\left(\frac{(s-a+b)^2}{4} - c(s-a)\right) = 0.\end{aligned} \tag{2}$$

Aplicando la relación $a^2 = b^2 + c^2$ resulta

$$\begin{aligned}(a-b+2c-s)^2 + 4bc &= \frac{a^2 + 6a(c-b) + 9b^2 - 2bc + 9c^2}{4} \\ &= \frac{9a^2 + 6a(c-b) + (c-b)^2}{4} = \frac{(3a+c-b)^2}{4}\end{aligned}$$

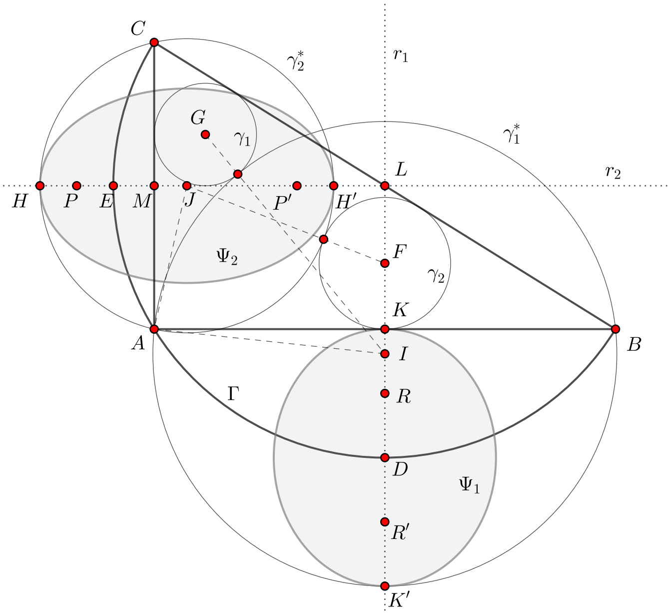

Figura 2: Esquema para la solución del Problema 429. Para la construcción de la figura ver, por ejemplo, [1, pág. 196]. Las dos elipses mostradas aquí están muy cerca de tener la misma área.

y, por tanto, el discriminante de la ecuación (2) admite la factorización

$$\left(\frac{(s-a+b)^2}{4}-\frac{c(s-a)}{2}\right)^2-\frac{b(2s-2a+b)}{4}\left(\frac{(s-a+b)^2}{4}-c(s-a)\right)$$
$$=\frac{(s-a)^2((a-b+2c-s)^2+4bc)}{16}=\frac{(s-a)^2(3a+c-b)^2}{64}.$$

Las soluciones de (2) se pueden escribir, entonces, como

$$\eta=\frac{s-a+b}{b(2s-2a+b)}\left(\frac{(s-a+b)^2}{4}-\frac{c(s-a)}{2}\pm\frac{(s-a)(3a+c-b)}{8}\right),$$

y la única solución de la ecuación (1) es la que resulta del signo menos (la otra solución de (2), más grande, daría la ordenada del centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y B y es tangente interiormente a γ_1). La expresión de esta solución en función de las longitudes de los lados del triángulo se puede simplificar (usando de manera apropiada $a^2=b^2+c^2$) para obtener

$$\eta=\frac{(3b+c-a)(2a^2-5ab+5b^2+bc-2c^2)}{16b(2b+c-a)}=\frac{(3b+c-a)b(7b+c-5a)}{16b(2b+c-a)}$$

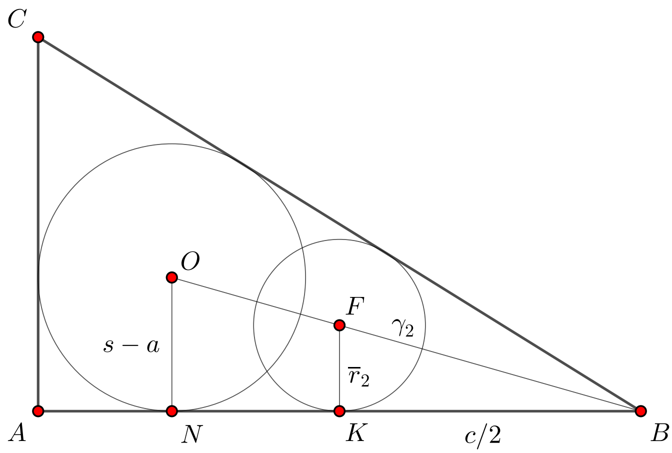

Figura 3: Esquema para la segunda parte de la solución del Problema 429.

$$= \frac{3a^2 - 11ab - 3ac + 10b^2 + 5bc}{8(2b + c - a)} = \frac{5b - 3a}{8}.$$

Con esto se tiene $IA = \sqrt{c^2/4 + \eta^2} = (5a - 3b)/8$. Entonces, la ordenada del punto K' es

$$y_{K'} = \eta - IA = \frac{5b - 3a}{8} - \frac{5a - 3b}{8} = -(a - b),$$

y el semieje mayor de la elipse Ψ_1 es $a_{\Psi_1} = -y_{K'}/2 = (a - b)/2$. Así, el punto $D = r_1 \cap \Gamma$ tiene coordenadas $(c/2, -(a - b)/2)$ y las de R', punto medio entre D y K', son $(c/2, -3(a - b)/4)$. A partir de aquí, la semidistancia focal de Ψ_1 es $c_{\Psi_1} = R'D = (a - b)/4$, y el semieje menor $b_{\Psi_1} = \sqrt{3}(a - b)/4$. Con lo cual, el área de la elipse Ψ_1 es

$$\text{área}(\Psi_1) = \pi a_{\Psi_1} b_{\Psi_1} = \frac{\pi\sqrt{3}(a - b)^2}{8}. \tag{3}$$

Para la segunda parte del problema, sea $F = (c/2, \overline{r}_2)$ el centro de γ_2. Si O es el incentro de ABC y N el punto de tangencia de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC con el lado AB (véase la figura 3), se tiene que $FK/ON = BK/BN$, es decir,

$$\frac{\overline{r}_2}{s - a} = \frac{c/2}{s - b},$$

de donde resulta

$$\overline{r}_2 = \frac{c(s - a)}{2(s - b)} = \frac{c(s - c)}{2s},$$

usando que en nuestro triángulo también se cumple la relación $s(s-a) = (s-b)(s-c)$.

El centro de γ_2^* es $J = (\xi, b/2)$ y su radio es $JA = \sqrt{\xi^2 + b^2/4}$ (véase de nuevo la figura 2). Igualando la distancia JF a la suma de los radios de γ_2 y γ_2^*, se obtiene la ecuación en ξ

$$\sqrt{\left(\xi - \frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - \frac{c(s-c)}{2s}\right)^2} = \frac{c(s-c)}{2s} + \sqrt{\xi^2 + \frac{b^2}{4}} \tag{4}$$

que, con el tratamiento usual y el uso de la relación $b(s-c) = s(a-c)$, lleva a

$$\left(-\xi + \frac{c}{4} - \frac{a-c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \left(\xi^2 + \frac{b^2}{4}\right),$$

o bien, simplificando,

$$\frac{2c}{a+c}\xi^2 + \frac{2a-3c}{2}\xi - \frac{c(4a-5c)}{16} = 0. \tag{5}$$

El discriminante de esta ecuación admite la factorización

$$\frac{(2a-3c)^2}{4} + \frac{c^2(4a-5c)}{2(a+c)} = \frac{(2a-c)^2}{4}\frac{a-c}{a+c} = \frac{(2a-c)^2}{4}\frac{(a-c)^2}{b^2},$$

lo que facilita la expresión de las soluciones. De ellas, la (única) solución de (4) es la menor, ya que el otro valor correspondería a la abscisa del centro de la circunferencia que pasa por los puntos A y C y es tangente interiormente a γ_2. Una primera expresión de esa solución queda, entonces,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a+c}{4c}\left(\frac{3c-2a}{2} - \frac{(2a-c)(a-c)}{2b}\right) \\ &= \frac{-2a^2 + ac - 2ab + bc + 3c^2}{8c} = \frac{(a+b)(a+c-3b)}{8c}. \end{aligned}$$

O también, usando la comprobable relación $(a+c-3b)(a+b-c) = 2b(2c-a-b)$,

$$\xi = \frac{b(a+b)(2c-a-b)}{8c(s-c)} = \frac{b(c^2 - 4(s-c)^2)}{8c(s-c)}. \tag{6}$$

Con esto, para el semieje mayor de la elipse Ψ_2 deducimos la expresión

$$a_{\Psi_2} = HJ = JA = \sqrt{\xi^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(\frac{b(c^2 - 4(s-c)^2)}{8c(s-c)}\right)^2} = \frac{b(c^2 + 4(s-c)^2)}{8c(s-c)}. \tag{7}$$

Siguen ahora unas comprobaciones analíticas sencillas. Para el punto $H = (x_H, b/2)$ de la construcción, se tiene

$$x_H = \xi - JH = \frac{b(c^2 - 4(s-c)^2)}{8c(s-c)} - \frac{b(c^2 + 4(s-c)^2)}{8c(s-c)} = -\frac{b(s-c)}{c} = -\frac{s(a-c)}{b}.$$

De los dos puntos de intersección de la circunferencia Γ, de centro $(c/2, b/2)$ y radio $a/2$, con la recta r_2 de ecuación $y = b/2$, el punto E es el de abscisa $x_E = (c-a)/2$. Entonces, la abscisa de P, punto medio del segmento EH, es

$$x_P = \frac{1}{2}\left(\frac{c-a}{2} + \frac{s(c-a)}{2}\right) = -\frac{(a-c)(a+b+2c)}{4c}.$$

Así, la semidistancia focal de Ψ_2 es

$$c_{\Psi_2} = PJ = \xi - x_P = \frac{(a+b)(a+c-3b)}{8c} + \frac{(a-c)(a+b+2c)}{4c} = \frac{3a-b-c}{8}. \quad (8)$$

Finalmente calcularemos el semieje menor de Ψ_2. Usando la identidad $bc = 2(s-b)(s-c)$, tenemos

$$\begin{aligned} a_{\Psi_2} - c_{\Psi_2} &= \frac{b(c^2+4(s-c)^2)}{8c(s-c)} - \frac{3a-b-c}{8} = \frac{2(s-b)}{8} - \frac{3a-b-c}{8} + \frac{b(s-c)}{2c} \\ &= -\frac{a-c}{4} + \frac{b(a-c)+b^2}{4c} = \frac{(a-c)(a+b)}{4c} \end{aligned} \quad (9)$$

y, de la misma manera,

$$\begin{aligned} a_{\Psi_2} + c_{\Psi_2} &= \frac{b(c^2+4(s-c)^2)}{8c(s-c)} + \frac{3a-b-c}{8} = \frac{2a-b}{4} + \frac{b(a+b-c)}{4c} \\ &= \frac{ab+2ac-2bc+b^2}{4c}. \end{aligned} \quad (10)$$

De (9) y (10),

$$\begin{aligned} b_{\Psi_2}^2 = a_{\Psi_2}^2 - c_{\Psi_2}^2 &= \frac{(a-c)(a+b)(ab+2ac-2bc+b^2)}{16c^2} \\ &= \frac{(a-c)(ab+2ac-2bc+b^2)}{16(a-b)}. \end{aligned}$$

Llegamos así a la fórmula

$$\text{área}(\Psi_2) = \pi \frac{b(c^2+4(s-c)^2)}{32c(s-c)} \sqrt{\frac{(a-c)(ab+2ac-2bc+b^2)}{a-b}}$$

y, usando (3), podemos simplificar el cociente entre áreas requerido hasta la expresión

$$\tau = \frac{\text{área}(\Psi_1)}{\text{área}(\Psi_2)} = \frac{2\sqrt{3}(a+b-c)(a-b)^3}{(c^2+(a+b-c)^2)(a-c)} \sqrt{\frac{a+b}{(a+c)(ab+2ac-2bc+b^2)}}.$$

Por ejemplo, para $(b,c) = (3,4)$ es $\tau = 2/\sqrt{15} \approx 0.52$. Para $(b,c) = (8,15)$, $\tau = 729\sqrt{705}/12220 \approx 1.58$. Para $(b,c) = (18,29)$, $\tau \approx 0.99994$.

REFERENCIAS

[1] P. Puig Adam, *Curso de Geometría métrica. Tomo I: Fundamentos*, 14.ª edición, Gómez Puig Ediciones, Madrid, 1979.

No se han recibido más soluciones.

NOTA. Los proponentes indican que el enunciado de este problema está inspirado en una propuesta que de un modo impreciso, o incompleto, apareció el año 2021 en un repositorio auxiliar de la Olimpiada Iberoamericana y que recogía solamente el caso $(a, b, c) = (5, 3, 4)$.

En su solución parcial, Nadal, a partir solo de varios ejemplos particulares, proporciona con notable intuición numérica unas expresiones generales correctas para las áreas de las dos elipses en cuestión. Alguna de sus fórmulas en el caso de la segunda elipse, como las últimas de (6), (7) y (9), han servido para aligerar las expresiones que aportaban los proponentes, que eran mucho más aparatosas que las que finalmente han quedado expuestas.

PROBLEMA 430. *Propuesto por D. M. Bătineţu-Giurgiu, "Matei Basarab" National College, Bucarest, Rumanía, y Neculai Stanciu, "George Emil Palade" School, Buzău, Rumanía.*

Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de los números de Fibonacci, definidos por la relación de recurrencia $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Probar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{8}}\, dx \geq \frac{\alpha}{4e},$$

donde $a_n = \sqrt[n]{n!\, F_n}$ y $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$.

Solución compuesta por los editores a partir de las enviadas, independientemente, por Brain Bradie, Christopher Newport University, Newport News, VA, EE.UU.; Paolo Perfetti, Università degli studi Tor Vergata, Roma, Italia; Henry Ricardo, Westchester Area Math Circle, Purchase, NY, EE.UU.; y Seán M. Stewart, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal, Arabia Saudita.

Usando la desigualdad entre las medias aritmética y cuadrática, tenemos

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{8}} \geq \sqrt{\frac{(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2}{16}} = \frac{1}{4}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}{8}}\, dx \geq \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n).$$

El resultado solicitado es ahora consecuencia del siguiente lema, cuya demostración posponemos al final de la solución.

Lema. *Si* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{nb_n} = b,$$

con $b > 0$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}} - \sqrt[n]{b_n} \right) = \frac{b}{e}.$$

En efecto, tomando en el lema anterior la sucesión $b_n = n!\,F_n$ y como, por la fórmula de Binet para los números de Fibonacci, $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \alpha$, se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{nb_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha$$

y

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}} - \sqrt[n]{b_n} \right) = \frac{\alpha}{e},$$

lo que implica el resultado solicitado.

Demostración del Lema. Tomando la sucesión auxiliar $c_n = b_n/n^n$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{nb_n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n+1} = \frac{b}{e},$$

donde en el último paso hemos aplicado la hipótesis sobre la sucesión b_n. Además, como para una sucesión de términos positivos $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim_{n\to\infty} d_{n+1}/d_n = \ell$ entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_n} = \ell$, deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n} = \frac{b}{e}.$$

También se pueden obtener fácilmente los límites

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{c_{n+1}}}{\sqrt[n]{c_n}} \frac{n+1}{n} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} \right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{p_{n+1}}{np_n} \frac{1}{\sqrt[n+1]{c_{n+1}}} \frac{n}{n+1} = e.$$

De este modo, aplicando la equivalencia $d_n - 1 \sim \log d_n$, válida cuando d_n es una sucesión que tiende a uno, concluimos el resultado. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{b_{n+1}} - \sqrt[n]{b_n} \right) &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} \left(\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{b_n}}{n} \log \left(\frac{\sqrt[n+1]{b_{n+1}}}{\sqrt[n]{b_n}} \right)^n = \frac{b}{e}. \qquad \square \end{aligned}$$

También resuelto por A. Stadler y los proponentes.

NOTA. Salvo la solución de Ricardo, las restantes consideradas para componer la presentada centran sus esfuerzos en probar el caso particular del lema correspondiente a la sucesión $b_n = n!F_n$. Sin embargo, Ricardo directamente apela al lema y lo atribuye a Gh. Toader [1].

REFERENCIAS

[1] Gh. Toader, Lalescu sequences, *Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat.* **9** (1998), 25–28.

PROBLEMA 431. *Propuesto por Mihály Bencze, Braşov, Rumanía.*

Sean $a_1, \dots, a_n$ números reales no negativos y λ un número real tal que $\lambda \geq \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. Probar que

$$\frac{1}{\lambda+1}\sum_{k=1}^{n} e^{a_k} \geq \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda+e^{a_k}}.$$

Solución enviada por Albert Stadler, Herrliberg, Suiza.

La desigualdad es cierta con la suposición más débil $\lambda \geq 0$. De hecho, probando que

$$\frac{e^x}{\lambda+1} - \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}x - \frac{1}{\lambda+e^x} \geq 0, \qquad x, \lambda \geq 0, \tag{1}$$

para obtener el resultado basta sustituir x por cada a_k, con $k = 1, \dots, n$, y sumar las desigualdades.

Para probar (1) basta usar que $e^x \geq 1 + x + x^2/2$ cuando $x \geq 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{\lambda+1} - \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}x - \frac{1}{\lambda+e^x} &\geq \frac{1}{\lambda+1}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right) - \frac{\lambda+2}{(\lambda+1)^2}x - \frac{1}{\lambda+1+x+\frac{x^2}{2}}\\ &= \frac{x^2(6\lambda+2\lambda^2+2\lambda x+(\lambda+1)x^2)}{2(\lambda+1)^2(2+2\lambda+2x+x^2)} \geq 0\end{aligned}$$

y hemos concluido.

También resuelto por M. Fernández, P. Perfetti y el proponente.

PROBLEMA 432. *Propuesto por Joaquim Nadal Vidal, Llagostera, Girona.*

Determinar los $a, b, c \in \mathbb{N}$ que son solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-c}}}} = c, \\ \sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+\sqrt{b+c}}}} = c, \\ \sqrt{a+\sqrt{b-\sqrt{a-\sqrt{b+c}}}} = \dfrac{b}{2}. \end{cases}$$

Solución elaborada por los editores a partir de las enviadas por Hyunbin Yoo, Corea del Sur, y Florentino Damián Aranda, Córdoba, España.

Vamos a considerar en primer lugar la segunda ecuación. Para $b > 0$ fijo, sea $f(x) = \sqrt{b+x}$. Como

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{b+x}} > 0 \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4(b+x)^{3/2}} < 0,$$

la función $f(x)$ es estrictamente creciente y cóncava (gráfica convexa vista desde arriba) en $(-b,\infty)$, lo que implica que la ecuación $f(x) = x$ tiene una única solución x_1 (en particular, x_1 será positiva ya que $f(0) = \sqrt{b} > 0$).

Usaremos ahora la notación $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$, para $n \geq 2$, y $f^{(1)} = f$, para la composición sucesiva. En $(-b,\infty)$, para las dos primeras derivadas de $f^{(4)}(x)$, se tiene

$$(f^{(4)}(x))' = f'(f^{(3)}(x)) \cdot f'(f^{(2)}(x)) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x) > 0$$

y

$$\begin{aligned}(f^{(4)}(x))'' = f''(f^{(3)}(x)) \cdot \Big(f'(f^{(2)}(x)) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)\Big)^2 \\ + f'(f^{(3)}(x)) \cdot f''(f^{(2)}(x)) \cdot \Big(f'(f(x)) \cdot f'(x)\Big)^2 \\ + f'(f^{(3)}(x)) \cdot f'(f^{(2)}(x)) \cdot f''(f(x)) \cdot \Big(f'(x)\Big)^2 \\ + f'(f^{(3)}(x)) \cdot f'(f^{(2)}(x)) \cdot f'(f(x)) \cdot f''(x) < 0.\end{aligned}$$

Esto implica que también la ecuación $f^{(4)}(x) = x$ tiene una única solución $x_2 > 0$. Ahora bien, $f(x_1) = x_1$ implica $f^{(4)}(x_1) = x_1$, luego debe ser $x_2 = x_1$.

Así, para un $b > 0$ fijo, la segunda ecuación del sistema toma la forma $f^{(4)}(c) = c$, declarando que c es el punto fijo de $f^{(4)}(x)$. Pero, entonces, c deberá ser también el punto fijo de $f(x)$, es decir, deberá cumplir que $f(c) = c$. De modo que la segunda ecuación implica la relación

$$b = c^2 - c. \tag{1}$$

Pasemos ahora a la primera ecuación. Para $a > 0$ fijo, sea $g(x) = \sqrt{a + \sqrt{a-x}}$. Como

$$g'(x) = -\frac{1}{4\sqrt{a+\sqrt{a-x}}\sqrt{a-x}} < 0,$$

la función $g(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty, a)$. Además, $g(0) = \sqrt{a+\sqrt{a}} > 0$ y $g(a) = \sqrt{a} < a$. Se deduce así que la ecuación $g(x) = x$ tiene una única solución $\xi_1 > 0$. Por otro lado, como

$$(g^{(2)}(x))' = g'(g(x)) \cdot g'(x) > 0$$

en $(-\infty, a)$, se cumple que la composición $g^{(2)}(x)$ es estrictamente creciente. Luego, como $g^{(2)}(0) > 0$ y $g^{(2)}(a) < a$, la ecuación $g^{(2)}(x) = x$ tiene una única solución $\xi_2 > 0$. Ahora bien, $g(\xi_1) = \xi_1$ implica $g^{(2)}(\xi_1) = \xi_1$ y, por tanto, debe ser $\xi_2 = \xi_1$.

De este modo, para un $a > 0$ fijo, la primera ecuación del sistema tiene la forma $g^{(2)}(c) = c$. De acuerdo con lo anterior, deberá ser también $g(c) = c$, o bien,

$$\sqrt{a - c} = c^2 - a. \tag{2}$$

Usando (1) y (2), el primer miembro de la tercera ecuación se transforma en

$$\begin{aligned}\sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{a - \sqrt{b + c}}}} &= \sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{a - c}}} \\ &= \sqrt{a + \sqrt{b - (c^2 - a)}} = \sqrt{a + \sqrt{a - c}} = c,\end{aligned}$$

y dicha ecuación queda, simplemente, $c = b/2$. Sustituyendo b por $2c$ en (1) resulta $c^2 - 3c = 0$, luego $c = 3$ y $b = 6$. La ecuación (2) con $c = 3$ tiene solo la solución $a = 7$. Resulta así que $(a, b, c) = (7, 6, 3)$ es la única solución del sistema propuesto.

También resuelto por C. Beade, I. Larrosa, C. Sacristán, A. Stadler y el proponente. Se ha recibido una solución incorrecta.