MIRANDO HACIA EL FUTURO

Sección a cargo de

Antonio Viruel

La Teoría de Localización

por

Elena Fernández

1. INTRODUCCIÓN

La Teoría de Localización estudia problemas de optimización para determinar (*localizar*) puntos que satisfagan ciertas condiciones respecto a un conjunto dado de puntos. Sus orígenes datan del siglo XVII, con los trabajos de Fermat, Cavalieri y Torricelli, entre otros, y tienen una fuerte componente geométrica. Hay también precedentes desde el siglo XVIII de problemas de localización en el contexto de la Economía. Sin embargo, el principal impulso de la disciplina en su concepción actual se dio en el siglo XX y surgió de la combinación de varios factores. Por un lado, la aparición de una serie de problemas matemáticos relacionados con sistemas económico/industriales para los que no se conocían sus soluciones. Por otro lado, el desarrollo de los ordenadores a mediados del siglo pasado permitió implementar métodos numéricos y obtener soluciones para instancias de dimensiones acordes con las de los sistemas en los que se planteaban. A pesar de algunos trabajos previos, hoy en día se considera que las bases de la Teoría de Localización actual se establecieron a principio del siglo XX, y suelen atribuirse al economista alemán Alfred Weber [54]. Sin embargo, fue en realidad el matemático Georg Pick (1859–1942) quien escribió el apéndice del libro de Weber donde el problema se estudia matemáticamente. Los orígenes y evolución histórica de la Teoría de Localización han sido ampliamente estudiados (ver, por ejemplo, [56, 37]).

La Teoría de la Localización actual forma parte de las *matemáticas de las aplicaciones*, ya que estudia nuevos problemas matemáticos, que surgen en la práctica, cuyas soluciones no son conocidas. Los problemas de los que se nutre la Teoría de la Localización surgen en ámbitos tan diversos como la Economía, la Estadística (problemas de clasificación), la Geografía, las Telecomunicaciones, o el Transporte y

la Logística, entre otros. Habitualmente, su espectro metodológico es el propio de la Investigación Operativa, e incluye la construcción de modelos de optimización adecuados, el estudio de sus propiedades teóricas, y el desarrollo de métodos numéricos de solución. Dado que se busca dar solución a problemas *reales*, la caracterización de soluciones resulta insuficiente, siendo necesario el desarrollo de métodos de solución con buenas propiedades (de convergencia, etc.) que produzcan dichas soluciones y su *traducción* algorítmica para poder implementarlos. La aplicación de esta metodología requiere de una fuerte interacción con las Ciencias de la Computación y muy especialmente con la Algorítmica.

En general, se considera que, en un espacio dado, se conoce la ubicación de unos *usuarios* (normalmente un conjunto de puntos), junto con sus respectivos pesos (*demandas*). Para satisfacer la demanda de los usuarios, se desea encontrar la localización óptima de unos *centros de servicio* (también llamados *puntos solución* o *plantas*), que pueden ser puntos pero también otro tipo de estructuras. A pesar de este enfoque unificado, diversos elementos condicionan la naturaleza matemática de los distintos tipos de problemas de localización cuyo estudio puede requerir metodologías radicalmente distintas. Algunas de las características más relevantes son el dominio en el que se define el problema, el criterio de optimización que se considera, o la posible incertidumbre en los datos. Cuando el problema se defina en un espacio real hablaremos de *localización continua* y los problemas de optimización resultantes pueden abordarse con técnicas analíticas clásicas. La *localización en redes* y la *localización discreta* estudian aquellos problemas de localización que se plantean en grafos (o redes) o en dominios discretos, respectivamente, que requieren de otro tipo de técnicas, tanto para su modelado como para su resolución.

En cada caso, el criterio de optimización (*función objetivo*) adecuado dependerá en gran medida de la aplicación potencial subyacente. Mientras que a menudo lo deseable será localizar los centros de servicio *próximos* a los puntos de demanda, en ocasiones (aeropuertos, hospitales, vertederos, etc.) una cercanía *excesiva* a un centro de servicio puede conllevar inconvenientes severos (ruidos, olores, etc.). Adicionalmente, aunque en muchos casos lo apropiado puede ser utilizar una métrica agregada para todos los usuarios, en otros casos (por ejemplo, en el caso de servicios de emergencia como ambulancias, bomberos, etc.) la medida idónea de la calidad de una solución puede ser la correspondiente al usuario *peor atendido*. Aunque en una primera aproximación pueda parecer lo contrario, el criterio con el que se valoren las soluciones puede afectar de manera sustancial a la naturaleza del problema de optimización resultante y, por tanto, a sus propiedades y las técnicas adecuadas para su estudio. En cualquier caso, la posible incertidumbre en los datos planteará nuevas preguntas, e invalidará en muchas ocasiones los tratamientos clásicos.

A continuación se describen las principales familias de problemas de localización, destacando los resultados más relevantes y algunos retos actuales. Dada la extensión del área, resulta imposible abordar en este artículo todos los aspectos de interés, incluso de manera superficial. En gran medida, la selección de problemas y temas tratados responde a mi propia experiencia en localización discreta y diseño de redes. Hay múltiples referencias bibliográficas en las que el lector interesado puede

encontrar desarrollos extensos sobre distintos temas en Teoría de la Localización. El reciente libro [37], cuyos capítulos referenciaré frecuentemente, contiene panorámicas actuales de la mayoría de estos temas.

2. LOCALIZACIÓN CONTINUA

Habitualmente se utiliza el término *localización continua* para referirse a problemas del área en los que el espacio de referencia es $\mathbb{R}^D$. Este ámbito incluye los problemas de localización más clásicos para los que es fácil establecer conexiones geométricas. La versión más sencilla de estos problemas es la siguiente: Dados

- un conjunto de n puntos $\{v_j\}_{j \in J} \subseteq \mathbb{R}^D$, $|J| = n$, asociados a unos pesos positivos $w_j > 0$, $j \in J$,
- una distancia $d \in \mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$,

se desea identificar un *punto solución* $x^* = (x_i^*)_{i=1}^D \in \mathbb{R}^D$ que minimice la suma ponderada (también llamada *mediana*) de sus distancias a los puntos dados. Es decir,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^D} F(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^D} \sum_{j \in J} w_j d(x, v_j).$$

El caso particular en el plano ($D = 2$) con $d(\cdot, \cdot)$ la distancia euclídea es bien conocido bajo múltiples denominaciones. Algunas de las más frecuentes son: problema de la mediana euclídea (ME); problema de Fermat; problema de Fermat-Torricelli; problema de Weber; o problema de Steiner.

Los orígenes de ME para el caso de tres puntos ($n = 3$) *sin pesos* (i.e., todos los pesos con el mismo valor), se atribuyen habitualmente a Pierre Fermat (1601–1665) y su resolución a Evangelista Torricelli (1608–1647). Sin embargo, hay quien afirma [42] que el problema se habría propuesto y resuelto anteriormente por Battista Cavalieri (1598–1647). ME puede también resolverse con construcciones geométricas básicas para $n = 4$, aunque otro tipo de técnicas es ya necesario para $n \geq 5$. El matemático francés Pierre Varignon (1654–1722) ideó un procedimiento de solución basado en principios de la mecánica para el caso de n puntos con pesos generales. Una descripción detallada de los procedimientos anteriores puede encontrarse, por ejemplo, en [20, 56].

Dado que $F(x)$ es convexa, el caso general de ME podría resolverse a través de las condiciones de primer orden

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_i} = \sum_{j \in J} \frac{w_j (x_i - a_{ij})}{d(x, v_j)} = 0, \quad i = 1 \dots, D,$$

donde $v_j = (a_{ij})_{i=1}^D$.

Sin embargo, el sistema anterior presenta dos dificultades obvias. Por un lado, las derivadas parciales no existen en los puntos dados $\{v_j\}_{j \in J}$. Por otro lado, para $n > 3$ el sistema no puede resolverse explícitamente y es necesario recurrir a métodos numéricos. No fue hasta 1936 cuando el matemático húngaro Endre Vaszonyi

Weiszfeld propuso un método práctico de resolución para el caso general [55]. Se trata de un método iterativo que permaneció latente hasta que fue redescubierto a finales de los años 50 del pasado siglo, cuando se pusieron de manifiesto algunas de sus limitaciones, se propusieron algunas mejoras para evitarlas, y se estudió su convergencia (ver, por ejemplo, [9, 12]). El método ha sido revisitado en profundidad [47] y hoy en día sigue siendo el método de referencia a pesar de sus dificultades en algunos casos.

Una extensión natural de ME es el llamado problema de la p -mediana (p -M) [16], que consiste en identificar (*localizar*) un número dado $p > 1$ de puntos solución, es decir, un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^D$ con $|X| = p$. Ahora, la evaluación de una solución $X \subset \mathbb{R}^D$ formada por p puntos requiere *asignar* cada punto de demanda $v_j \in J$ al punto solución *más próximo*, con lo que el valor de la asignación óptima será $d(X, v_j) = \min_{x \in X} d(x, v_j)$. Por tanto,

$$(p\text{-M}) \quad \min_{\substack{X \subset \mathbb{R}^D \\ |X|=p}} F(X) = \min_{\substack{X \subset \mathbb{R}^D \\ |X|=p}} \sum_{j \in J} w_j \min_{x \in X} d(x, v_j).$$

Huelga decir que los problemas anteriores pueden definirse para cualquier distancia $d(\cdot, \cdot)$, no necesariamente la distancia euclídea. Algunas de las más estudiadas son las distancias rectangulares (distancias de Manhattan), o distancias asociadas a normas [20].

Una familia importante de problemas de localización continua es aquella en la que los centros de servicio que se desea localizar no son puntos sino estructuras dimensionales como, por ejemplo, rectas o segmentos (unidimensionales), bolas o *strips* (bidimensionales), o, en general, hiperplanos, hiperesferas u otro tipo de estructuras. Aplicaciones recientes que motivan el estudio de este tipo de problemas surgen principalmente en Estadística (regresión, clasificación, análisis de datos), *support vector machines* y en numerosos ámbitos de la ingeniería. En todos los casos dan lugar a problemas de optimización con conexiones notables con la Geometría Computacional. Estudios recientes sobre estos problemas pueden encontrarse en [8, 50].

3. SOBRE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Antes de considerar otras clases de problemas de localización, discutiremos brevemente algunas de las funciones objetivo más usuales en el área, tomando como referencia los problemas de localización continua presentados en la sección anterior. En términos generales, el análisis se aplica asimismo a los problemas que se discutirán en secciones posteriores.

Independientemente de la distancia que se considere, dado $X \in \mathbb{R}^D$, la función objetivo mediana $F(X) = \sum_{j \in J} w_j \min_{x \in X} d(x, v_j)$ es una métrica agregada para todos los puntos de demanda. Como se ha comentado en la introducción, esta métrica puede no ser adecuada para modelar situaciones en las que la calidad de una solución deba evaluarse respecto al punto *peor asignado*, o en las que, por ejemplo, se busque un equilibrio entre la calidad media de las asignaciones y la peor asignación. La

amplia casuística que se presenta en los distintos modelos ha potenciado el estudio de distintas funciones objetivo, algunas de las cuales se describen brevemente a continuación.

3.1. FUNCIÓN OBJETIVO «CENTRO»

En la función objetivo llamada *centro* el valor de una solución se cuantifica a través del punto *peor asignado*; es decir, mediante la máxima distancia ponderada de la solución a los puntos dados. El problema resultante en el caso de considerar la distancia euclídea y localizar un único punto en el plano es

$$\min_{x \in \mathbb{R}^D} W(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^D} \max_{j \in J} w_j d(x, P_j),$$

que también es un problema *con tradición*. En 1857 James Joseph Sylvester [52] planteó el problema de encontrar el *menor* círculo que contiene un conjunto de puntos dados, que fue resuelto por él mismo en 1860 y posteriormente por George Chrystal en 1885 [13]. En Teoría de Localización, hoy en día ese problema se conoce como 1-centro en el plano. Este problema también ha sido ampliamente estudiado para distintas distancias y en espacios más generales (ver, por ejemplo, [19] y referencias incluidas). Megiddo [39, 40] demostró que, para espacios euclídeos de dimensión finita, puede resolverse en tiempo lineal en el número de puntos dados (tanto sin pesos como con pesos), aunque la complejidad se incrementa exponencialmente con la dimensión (su tamaño es $\mathcal{O}(3^{(D+2)^2} n)$).

El llamado problema de *p-centro* es la extensión del 1-centro al caso de *p* puntos:

$$(p\text{-}C) \quad \min_{\substack{X \subset \mathbb{R}^D \\ |X|=p}} W(X) = \min_{\substack{X \subset \mathbb{R}^D \\ |X|=p}} \max_{j \in J} \min_{x \in X} w_j d(x, v_j).$$

3.2. FUNCIÓN OBJETIVO «MEDIANA ORDENADA»

Especial interés presenta la función objetivo de la *mediana ordenada* [46, 48], f_λ , que generaliza tanto la función objetivo de la mediana como la de centro y se define como sigue: Para $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, sea $z_{\text{ord}} = (z_{(1)}, z_{(2)}, \dots, z_{(n)})$, $z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq \dots \leq z_{(n)}$, el vector de sus componentes ordenadas. Dado $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $f_\lambda(z) = \langle \lambda, z_{\text{ord}} \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$.

La generalidad de la función mediana ordenada puede apreciarse observando que distintos criterios de optimización pueden obtenerse con elecciones adecuadas para el vector λ . Así, para z de componentes $z_j = w_j d(x, v_j)$, $j \in J$, con $x \in \mathbb{R}^D$ dado, se tiene que, para $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$, $f_\lambda(z) = F(x) = \sum_{j \in J} w_j d(x, v_j)$ es precisamente el valor de la función objetivo mediana en el punto x . Así mismo, para $\lambda = (0, \dots, 0, 1)$, $f_\lambda(z) = W(x) = \max_{j \in J} \{w_j d(x, v_j)\}$ es el valor de la función objetivo 1-centro en el punto x . Otras funciones objetivo consideradas en distintos problemas de localización

también se obtienen a través de la mediana ordenada con distintos vectores λ . Así, los vectores

$$\lambda = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha, 1), \quad \lambda = (0, \dots, 0, \overbrace{1, \dots, 1}^k) \quad \text{y} \quad \lambda = (\alpha, 0, \dots, 0, 1 - \alpha)$$

producen las funciones α -centdian, $\alpha \in [0, 1]$, k -centrum, que suma los valores de las k peores asignaciones, y el llamado criterio de Hurwicz, respectivamente.

El problema de la p -mediana ordenada para λ dado es

$$(p\text{-MO}) \quad \min_{\substack{X \subset \mathbb{R}^D \\ |X|=p}} f_\lambda(X) = \langle \lambda, z_{\text{ord}} \rangle,$$

donde para X dado las componentes de $z = (z_j)_{j \in J}$ son $z_j = w_j \min_{x \in X} d(x, v_j)$.

Megiddo y Supowit [41] demostraron que, a diferencia de los problemas con $p = 1$ que, como hemos comentado anteriormente, pueden resolverse en tiempo polinómico, tanto (p -M) como (p -C) (y, por tanto, también (p -MO)) pertenecen a la clase de problemas NP.

4. LOCALIZACIÓN EN REDES: LOS RESULTADOS DE HAKIMI

Una parte notable de la Teoría de Localización se centra en problemas definidos sobre redes (grafos). Su estudio está motivado por diversas aplicaciones en las que circunstancias de accesibilidad o similares impiden ubicar en cualquier punto del plano los centros de servicio que se desea localizar. Esto condiciona las asignaciones de puntos de demanda a dichos centros de servicio a unas conexiones preexistentes. Este tipo de problemas se plantean en ámbitos tan diversos como la Logística y el Transporte, las Telecomunicaciones o la Geografía, entre otros, y todos ellos pueden modelarse como problemas de localización definidos sobre una red dada. En esta sección se presenta un breve resumen de los problemas más básicos y los resultados seminales en este ámbito, que han dado lugar a una extensísima literatura. Posiblemente, lo más reseñable de esta familia de problemas es que hay bastantes casos particulares en los que puede reducirse la búsqueda de puntos solución a un conjunto finito de puntos. A pesar de lo anterior, la gran mayoría de estos problemas siguen perteneciendo a la clase de problemas NP-duros. Perspectivas extensas y rigurosas de estos problemas pueden encontrarse, por ejemplo, en [36, 10].

Sea $G = (V, E)$ un grafo con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y conjunto de aristas E , donde denotamos por $ij \in E$ la arista que conecta los vértices, $v_i, v_j \in V$. Supondremos ahora que los puntos de demanda son precisamente los vértices del grafo, e impondremos que los centros de servicio se localicen únicamente en puntos de las aristas de G , los cuales, de forma genérica, se denotan por $x \in G$. Este requerimiento implícitamente refleja la hipótesis de que los puntos de demanda solo pueden conectarse con puntos en las aristas, es decir, que la topología que gobierna el sistema es la inducida por G . Supondremos también conocidas las longitudes de las aristas, $\ell_{ij} > 0$, $ij \in E$. Estas longitudes determinan no solo las distancias entre

los extremos de las aristas, $d(v_i, v_j) = l_{ij}$, sino también $d(x, v_j)$, con $x \in G$ y $v_j \in V$, que se define como la longitud del camino mínimo que conecta x y v_j en G . En el resto de esta sección trabajaremos con la métrica $d(\cdot, \cdot)$ que, de manera natural, se extiende a la distancia de un conjunto $X = \{x_1, \dots, x_p\} \subset G$ a un vértice $v_j \in V$, como $d(X, v_j) = \min_{i=1, \dots, p} d(x_i, v_j)$. Un tratamiento riguroso de las propiedades de $d(\cdot, \cdot)$ puede encontrarse, por ejemplo, en [36].

Hakimi [31, 32] extendió los problemas de mediana y centro en un grafo que se habían estudiado con anterioridad permitiendo que los puntos solución se ubiquen no solo en vértices de G , sino también en puntos intermedios de las aristas de la red. Para ello generalizó los conceptos existentes de vértice-mediana y vértice-centro en un grafo.

- Un punto $x \in G$ es una *mediana absoluta* de G si y solo si cumple

$$F(x) = \sum_{j \in J} w_j d(x, v_j) < F(x') = \sum_{j \in J} w_j d(x', v_j), \quad \forall x' \in G.$$

El problema de la p -mediana absoluta en un grafo G es encontrar un conjunto de p puntos $X \subset G$, $|X| = p$, que minimiza $F(X) = \sum_{j \in J} w_j d(X, v_j) = \sum_{j \in J} w_j \min_{x \in X} d(x, v_j)$:

$$(p-M_G) \quad \min_{\substack{S \subset G \\ |S|=p}} \sum_{j \in J} w_j d(S, v_j).$$

Para el caso en que G sea un grafo acíclico (un árbol), A. J. Goldstein demostró (aunque no lo publicó) que existe una solución óptima de $(1-M_G)$ que es un vértice de G . Hakimi generalizó ese resultado para $(p-M_G)$, $p > 1$, en un grafo cualquiera G . Los resultados más relevantes en relación con $(p-M_G)$, $p \geq 1$ son los siguientes:

- Hakimi [31, 32]: Existe una solución óptima X^* para $(p - M_G)$ tal que $X^* \subseteq V$.
- Kariv y Hakimi [35]: $(p-M_G)$ es NP-duro.

Estos resultados ilustran la naturaleza combinatoria de $(p-M_G)$ y su dificultad a pesar de que, en la búsqueda de soluciones óptimas, el conjunto de ubicaciones potenciales para las medianas puede restringirse a subconjuntos de vértices de cardinalidad p .

- Un punto $x \in G$ es un *centro absoluto* de G respecto a los pesos $(w_j)_{j \in J}$ si y solo si cumple

$$W(x) = \max_{j \in J} w_j d(x, v_j) < W(x') = \max_{j \in J} w_j d(x', v_j), \quad \forall x' \in G.$$

El problema del 1-centro absoluto en G es encontrar un punto $x \in G$ que minimice $\max_{j \in J} w_j d(x, v_j)$:

$$(1-C_G) \quad \min_{x \in G} W(x) = \min_{x \in G} \max_{j \in J} w_j d(x, v_j).$$

Es fácil construir ejemplos que ilustran que, a diferencia de $(1-M_G)$, puede no existir una solución óptima de $(1-C_G)$ en la que el centro absoluto sea un vértice. Esto llevó a numerosos investigadores a intentar identificar los puntos de las aristas que pueden ser centros absolutos de $(1-C_G)$.

Minieka [43] demostró que, para un grafo sin pesos, la función $W(x)$ restringida a una arista dada $km \in E$ es lineal a trozos, e identificó el conjunto Q de los posibles mínimos locales de dicha función, llamados *puntos de intersección*. Hakimi [31] caracterizó el conjunto Q_w de puntos de intersección para el caso de un grafo con pesos generales.

En un trabajo posterior, Hakimi [32] propuso el problema del p -centro absoluto en G , que consiste en encontrar un subconjunto de p puntos $X \in G$, $|X| = p$, que minimice $\max_{j \in J} w_j d(X, v_j) = \max_{j \in J} w_j \min_{x \in X} d(x, v_j)$:

$$(p-C_G) \quad r_p^* = \min_{\substack{X \subset G \\ |X|=p}} \max_{j \in J} w_j d(X, v_j).$$

Demostó que los conjuntos de puntos de intersección Q y Q_w también determinan los puntos de las aristas candidatos a formar parte de los p -centros.

Los resultados más relevantes en relación con $(p-C_G)$, $p \geq 1$, son los siguientes:

- Minieka [43]: Para $(1-C_G)$ sin pesos, cualquier centro pertenece a $V \cup Q$.
- Hakimi [31, 32]: Para $(p-C_G)$, $p \geq 1$ con pesos generales, cualquier centro pertenece a $V \cup Q_w$.
- Kariv y Hakimi [34]: $(p-C_G)$ es NP-duro incluso en un grafo planar con grado máximo 3 y $w_j = 1$, $j \in J$. (Este resultado también se cumple para la versión de $(p-C_G)$ restringida a vértices.)
- $(p-C_G)$ con G árbol, $p \geq 1$ y pesos generales puede resolverse en tiempo polinómico [34, 39].

Un problema *inverso* a $(p-C_G)$ es el problema de *localización/recubrimiento*: Dado un grafo $G = (V, E)$ y un entero positivo r (*radio de cobertura*), encontrar el menor entero positivo p tal que el p -radio absoluto de G sea menor o igual que r . Este problema, inicialmente propuesto por Berge en un contexto de Teoría de Grafos [5], fue posteriormente enunciado por Hakimi [32] en el ámbito de localización. Otro problema que también utiliza el concepto de *radio de cobertura* es el llamado *problema de localización de máxima cobertura* [53] y consiste en, fijados p y r , determinar un conjunto $X \subset G$, $|X| \leq p$, que maximice el número de vértices que se encuentran en un radio de cobertura r de los puntos seleccionados. Es decir,

$$\max_{\substack{X \subset G \\ |X| \leq p}} |C(X)|,$$

donde $C(X) = \{v \in V \mid \min_{x \in X} d(v, x) \leq r\}$.

5. LOCALIZACIÓN DISCRETA: LA RELEVANCIA DE LAS FORMULACIONES

Como hemos visto en la sección anterior, los problemas de p -mediana y p -centro en redes son problemas NP-duros incluso para los casos en que las ubicaciones potenciales para los puntos solución puedan restringirse a un conjunto finito. Esta circunstancia ha promovido la utilización de formulaciones de programación lineal entera (PLE) que permiten abordar la resolución de los problemas mediante técnicas propias de la optimización matemática. En esta sección presentamos algunas de las formulaciones clásicas para tratar este tipo de problemas y algunas de sus propiedades, que son el punto de partida para los retos actuales que se plantean en este ámbito. Panorámicas extensas sobre estos problemas pueden encontrarse en [38] para el problema de la p -mediana y en [10] para el del p -centro.

Plantearemos los problemas de localización de forma algo más general que en la sección anterior, lo cual permite un tratamiento unificado como problemas de optimización combinatoria. En particular, consideraremos problemas en los que los posibles centros de servicio pueden restringirse a un conjunto finito conocido *a priori*, y están indexados en un conjunto $I = \{1, \dots, m\}$. Por ejemplo, para el caso (p -M $_G$), $I = \{1, \dots, n\}$, mientras que, para (p -M $_C$), I es una indexación de los elementos de $V \cup Q_w$. Como hasta ahora, denotaremos por $J = \{1, \dots, n\}$ a un conjunto dado de índices para los puntos de demanda, asociados a unos pesos (o demandas) conocidos, $(w_j)_{j \in J}$. Asimismo, suponemos conocida una matriz $(d_{ij})_{i \in I, j \in J}$, donde d_{ij} representa la distancia del punto de demanda $j \in J$ al centro de servicio $i \in I$. En el caso de problemas definidos en grafos $d_{ij} = d(x_i, v_j)$, con $x_i \in V \cup Q_w$, en general, d_{ij} representa el *coste* de asignar el punto de demanda j al centro de servicio i .

Expresados como problemas de optimización combinatoria con conjuntos de índices I y J , los problemas de la p -mediana y del p -centro pueden expresarse respectivamente como

$$\begin{aligned}
 (p\text{-M}_{IJ}) \quad & \min_{\substack{I^* \subset I \\ |I^*|=p}} \sum_{j \in J} w_j \min\{d_{ij} : i \in I^*\}, \\
 (p\text{-C}_{IJ}) \quad & \min_{\substack{I^* \subset I \\ |I^*|=p}} \max_{j \in J} \{w_j \min\{d_{ij} : i \in I^*\}\}.
 \end{aligned}$$

A continuación presentamos una formulación de PLE para (p -M $_{IJ}$) y (p -C $_{IJ}$), que posteriormente adaptaremos a otros problemas.

El siguiente conjunto de *variables de decisión* permite identificar los conjuntos de puntos solución. En particular, sean:

- $y_i \in \{0, 1\}$ tal que $y_i = 1$ si y solo si se activa un centro de servicio en la ubicación $i \in I$.

Dado que las variables $y_i, i \in I$, son binarias, $\sum_{i \in I} y_i$ indica el número de puntos seleccionados, por lo que cualquier conjunto X , con $|X| = p$, estará unívocamente determinado por un vector $(y_i)_{i \in I}$ tal que $\sum_{i \in I} y_i = p$. Además, el valor de la

función objetivo mediana $F(X)$ puede expresarse en términos de las variables y como $F(y) = \sum_{j \in J} w_j \min_{\{i \in I: y_i=1\}} d_{ij}$. Dado que esa expresión no es lineal, para poder utilizarla en una formulación de PLE se define un nuevo conjunto de variables de decisión que se denominan *variables de asignación*. Estas variables permitirán identificar para cada punto de demanda $j \in J$, el centro de servicio activado más próximo a él, que vendrá determinado por $\arg \min_{\{i \in I: y_i=1\}} d_{ij}$. En particular:

- $x_{ij} \in \{0, 1\}$ tal que $x_{ij} = 1$ si y solo si el punto de demanda $j \in J$ se asigna al centro de servicio $i \in I$.

Utilizando las variables x_{ij} podemos expresar la función objetivo como $F(y) = \sum_{j \in J} w_j \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij}$, aunque, como vemos a continuación, es necesario imponer algunas condiciones (ver restricciones (1)–(2)) para garantizar una correcta relación entre x e y . La formulación resultante es

$$(p\text{-}M_{IJ}) \quad \min \sum_{j \in J} w_j \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij},$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \quad (1)$$

$$x_{ij} \leq y_i, \quad i \in I, j \in J, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in I} y_i = p, \quad (3)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, i \in I, \quad x_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J. \quad (4)$$

Las restricciones (1) imponen que cada punto de demanda se asigne a un (único) centro de servicio, mientras que (2) garantiza que las asignaciones se hagan a centros de servicio activados. Por tanto, el dominio definido por (1)–(3) determina el conjunto de soluciones posibles para $(p\text{-}M_{IJ})$. Teniendo en cuenta la expresión de la función objetivo, es inmediato observar que en cualquier solución óptima cada punto de demanda $j \in J$ se asignará a un centro de servicio $i(j) \in I$ tal que $d_{i(j),j} = \min_{\{i \in I: y_i=1\}} d_{ij}$.

Obviamente, las variables y , x anteriores junto con las restricciones (1)–(4) pueden utilizarse también en una formulación para el problema de p -centro con conjuntos de índices I y J , $(p\text{-}C_{IJ})$, ya que la única diferencia entre ambos problemas afecta a la función objetivo. Expresada en términos de las variables y , la función objetivo de $(p\text{-}M_{IJ})$ es $C(y) = \max_{j \in J} w_j \min_{\{i \in I: y_i=1\}} d_{ij} = \max_{j \in J} w_j \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij}$ que, a diferencia de la función objetivo de $(p\text{-}M_{IJ})$, no es lineal. Un truco que se aplica frecuentemente para linealizar funciones objetivo mín/máx es definir una variable auxiliar $z \geq 0$ que se relaciona con los valores de las asignaciones de los puntos de demanda mediante $w_j \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \leq z$, $j \in J$, dando lugar a una formulación en la que todas las expresiones son lineales.

Existen múltiples extensiones de $(p\text{-}M_{IJ})$ y $(p\text{-}C_{IJ})$ a problemas con costes fijos de activación de los centros de servicio (*fixed-charge*) y, eventualmente, *con capacidades*. Se supone ahora que cada posible punto solución $i \in I$ tiene un coste fijo de activación, f_i , así como una capacidad de servicio máxima, b_i , ambos conocidos. Las

restricciones (2) impuestas anteriormente deben ahora sustituirse por las condiciones $\sum_{j \in J} w_j x_{ij} \leq b_i y_i$, $i \in I$, que garantizan que la demanda total que se sirve desde cada centro de servicio activado no excede su capacidad b_i . Adicionalmente, deben actualizarse las funciones objetivo de los problemas para tener en cuenta los costes fijos de activación de los centros de servicio. Así, $F(y) = \sum_{i \in I} f_i y_i + \sum_{j \in J} w_j d_{ij} x_{ij}$ y $C(y) = \sum_{i \in I} f_i y_i + z$, con $w_j \sum_{i \in I} d_{ij} x_{ij} \leq z$, $j \in J$.

Nótese que, a pesar de que las restricciones de las distintas formulaciones sean lineales, el dominio que estas determinan está formado por un conjunto discreto de puntos en $\{0, 1\}^{|I|+|I| \times |J|}$. Por tanto, dicho conjunto es no convexo y las funciones objetivo consideradas no son continuas. Lo anterior implica que las formulaciones presentadas no pueden tratarse con técnicas clásicas de optimización, en particular, de programación lineal. Una discusión rigurosa sobre esta cuestión excede el ámbito de este artículo, y únicamente puede abordarse desde la perspectiva de la programación entera y, en particular, desde el estudio de los poliedros asociados a las envolventes convexas de los dominios determinados por las posibles formulaciones [11, 44]. Con algunas excepciones, en el caso general las facetas de dichos poliedros no pueden identificarse en tiempo polinómico [30], lo cual ha fomentado la aplicación de métodos que exploran los poliedros determinados por las *relajaciones lineales* de formulaciones de PLE, que son las formulaciones resultantes de eliminar las condiciones de integridad sobre las variables enteras. Naturalmente, las formulaciones *ideales* serán aquellas en las que su relajación lineal coincida con la envolvente convexa de su conjunto de soluciones posibles aunque, en general, no se dispone de tales formulaciones.

En este contexto, la búsqueda de formulaciones con buenas propiedades que proporcionen cotas válidas de los valores óptimos de los problemas lo más ajustadas posible se convierte, en cierta medida, en un *arte* que se ha minusvalorado frecuentemente, a pesar de su relevancia para poder resolver las instancias en la práctica. Es indudable que el estudio de formulaciones para problemas discretos de localización y de sus propiedades ha supuesto un avance importante en el desarrollo de la localización discreta, dado que, en la práctica, no es infrecuente que las instancias tengan cientos de centros de servicio potenciales y miles de usuarios.

Entre las formulaciones actuales más eficientes pueden mencionarse las que utilizan variables de decisión asociadas a los posibles radios de cobertura, que permiten obtener expresiones de la función objetivo como sumas telescópicas [23, 28], así como las basadas en proyecciones de las variables de asignación [26] que permiten reducir la dimensión del dominio para las variables de decisión. Estos tipos de formulaciones permiten abordar nuevas extensiones de los problemas como, por ejemplo, problemas combinados de localización y diseño de rutas, muy populares hoy en día para abordar aplicaciones en logística y transporte.

Análisis en profundidad sobre posibles formulaciones, sus propiedades y métodos de solución para los problemas mencionados y otros relacionados pueden encontrarse en [10, 25, 29, 3].

6. MODELOS MÁS GENERALES: DE LA LOCALIZACIÓN DISCRETA AL DISEÑO DE REDES

En los modelos comentados en las secciones previas, la relación entre puntos de demanda y centros de servicio implícitamente asume que los usuarios reciben servicio desde las plantas a las que están asignados (ya sea desplazándose hasta ellas, ya sea mediante servidores que se desplazan en rutas de ida-y-vuelta desde las plantas hasta los puntos de demanda). En los modelos *diseño de redes* la demanda de servicio relaciona «pares de usuarios» (es decir, pares de puntos de demanda) y las plantas se activan para habilitar la comunicación entre dichos pares. Ejemplos de situaciones que responden a este tipo de demanda se dan en telecomunicaciones (la demanda son pares origen/destino en una red que requieren comunicarse entre ellos a través de servidores); transporte (un aeropuerto *hub* permite servir la demanda de transporte entre dos aeropuertos más pequeños); o logística (en paquetería los centros de consolidación ordenan y redistribuyen la demanda entre distintos pares origen/destino). Todos los ejemplos anteriores dan lugar a problemas en los que hay que identificar la localización de los centros de servicio junto con un conjunto de caminos conectando los pares origen/destino, que necesariamente deben atravesar, como mínimo, un centro de servicio. A su vez, estos caminos podrán utilizar únicamente un subconjunto de aristas del grafo original que también deberán identificarse ya que, al igual que con los centros de servicio, su activación implicará un coste fijo. Es decir, en un problema de diseño de redes, dado un grafo, hay que seleccionar tanto un subconjunto de vértices (para localizar los centros de servicio) como un subconjunto de aristas, que son las que se podrán utilizar en los caminos que conecten los pares origen/destino, que habitualmente se denominan por su nombre en inglés (*commodities*). Adicionalmente, en el grafo inducido por los centros de servicio y las aristas seleccionadas, habrá que identificar un camino mínimo para cada commodity. Una clase importante de problemas de diseño de redes son los llamados problemas de localización de hubs. En estos problemas, las aristas activadas que conectan un par de centros de servicio juegan un papel esencial, ya que su coste de utilización está sujeto a un factor de descuento (reflejando un modo de transporte prioritario). Algunas referencias para este tipo de problemas son, por ejemplo, [14, 15].

Las formulaciones para los problemas de diseño de redes utilizan normalmente tres conjuntos de variables de decisión: uno para los vértices seleccionados (y_i , $i \in V$), otro para las aristas seleccionadas (X_{ij} , $ij \in E$), y un tercer conjunto para los arcos de los caminos (x_{ijkm}), donde x_{ijkm} indica si el arco (i, j) se utiliza en el camino que conecta el commodity con origen en k y destino en m . Estas formulaciones deben incluir restricciones que garanticen que las variables x_{ijkm} efectivamente determinan caminos entre k y m , así como otras restricciones que garanticen que los caminos utilizan únicamente aristas seleccionadas ($x_{ijkm} + x_{jimk} \leq X_{ij}$, $\forall i, j, k, m$). La dificultad esencial de estos problemas radica en su dimensión; nótese que el número de variables x es $\mathcal{O}(n^4)$ y que el número de restricciones será también $\mathcal{O}(n^4)$. De nuevo, el reto que se plantea es poder resolver instancias de tamaños reales que fácilmente tendrán varios centenares de vértices.

Las funciones objetivo que se consideran en los problemas de diseño de redes habitualmente combinan costes de activación de los vértices y de las aristas seleccionadas, con costes de «utilización» de los caminos, que dependerán tanto de su longitud como de los flujos que circulen por ellos. Como en los casos anteriores, dependiendo del modelo, el criterio para la valoración de un conjunto de caminos puede ser de tipo mediana (cuando el foco sea el coste global de todos los caminos), de tipo centro (cuando haya un compromiso de tiempo máximo de servicio y el foco sea el camino más largo), o criterios más sofisticados que, como se ha comentado anteriormente, pueden modelarse mediante la mediana ordenada [46].

7. LOCALIZACIÓN CON INCERTIDUMBRE EN LOS DATOS

Hasta el momento hemos supuesto que todos los datos de los problemas planteados son conocidos. Sin embargo, típicamente las decisiones de localización son decisiones *estratégicas* que permanecerán estables en un amplio periodo de tiempo, por lo que es muy posible que a la hora de tomar las decisiones haya incertidumbre en los datos.

En ocasiones, algunos de los parámetros (por ejemplo, las demandas y/o los tiempos de servicio) se rigen por procesos estocásticos dependientes del tiempo, dando lugar a los llamados *modelos estocásticos de localización con congestión*, cuyo estudio está fuertemente interrelacionado con la Teoría de Colas (ver [6] para una panorámica reciente de estos modelos). En otras ocasiones, en el momento de tomar las decisiones se utilizan estimaciones más o menos precisas de los valores que tomarán los parámetros a la hora de implementar las soluciones obtenidas. Parámetros que pueden estar sujetos a incertidumbre son la demanda de los usuarios, y los costes de las distintas decisiones (activación de los centros y transporte asociado al servicio de la demanda), o incluso la topología del espacio en el que se define el problema (disponibilidad de ciertas ubicaciones potenciales, o posibilidad de establecer algunas conexiones).

Incorporar incertidumbre a problemas de optimización es siempre un reto, especialmente si se tiene en cuenta que los problemas subyacentes ya suelen ser NP-duros en sus versiones deterministas. Sin embargo, es importante resaltar que no es recomendable *resumir* la incertidumbre de los datos en un único valor (por ejemplo, su valor medio) ya que este enfoque suele proporcionar soluciones muy ineficientes, o incluso no factibles, en muchos escenarios. Lo apropiado, por el contrario, es incorporar la incertidumbre al propio modelo de optimización ya sea mediante restricciones probabilísticas imponiendo que la probabilidad de que la solución cumpla cierta propiedad sea mayor que un umbral predeterminado (*Chance-Constraints*, ver, por ejemplo, [45]), o bien recurriendo a la optimización estocástica (OS) [7, 51] o la optimización robusta (OR) [51]. La principal dificultad de los enfoques con restricciones probabilísticas es encontrar una expresión adecuada (convexa o cuasi-convexa) de las mismas. En términos muy generales, la diferencia esencial entre OS y OR se resume en el objetivo que se considera. Mientras que los modelos de OS se centran en el *valor esperado* sobre el conjunto de todos los posibles escenarios, los de OR

consideran el valor del *peor escenario*. En OS se supone, además, que se dispone de información probabilística sobre los parámetros inciertos, con lo que la incertidumbre puede expresarse mediante una variable aleatoria. El reciente capítulo [17] ofrece una panorámica actualizada de modelos y métodos para problemas de localización discreta con incertidumbre.

La tendencia creciente en el ámbito de la localización estocástica discreta es considerar modelos multi-etapa (*multi-stage*), casi siempre de dos etapas, en los que en la primera se obtiene una solución *a priori*, que determina las localizaciones de los centros de servicio, y se aplicará bajo todos los posibles escenarios, y en las etapas posteriores se obtiene la solución *a posteriori*, que establece las decisiones complementarias (asignación u otras) dictadas por la solución *a priori* para cada uno de los posibles escenarios. Por ejemplo, si Ω denota el conjunto de posibles escenarios y π^ω , $\omega \in \Omega$, sus respectivas probabilidades, una versión muy simplificada de una formulación genérica para un problema discreto de localización estocástico es

$$(L_{OS}) \quad \min \sum_{i \in I} f_i y_i + Q(y),$$

donde $Q(y) = \mathbb{E}[Q(y, \omega)] = \sum_{\omega \in \Omega} \pi^\omega Q(y, \omega)$, y $Q(y, \omega)$ denota el valor óptimo

$$Q(y, \omega) = \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}^\omega x_{ij}^\omega, \\ x_{ij}^\omega \in \Gamma(y, \omega),$$

siendo $\Gamma(y, \omega)$ el dominio de las variables x inducido por la solución *a priori* y bajo el escenario ω .

Una versión de optimización robusta del problema anterior sería

$$(L_{OR}) \quad \min \sum_{i \in I} f_i y_i + \max_{\omega \in \Omega} Q(y, \omega), \\ y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I.$$

La función $Q(y, \omega)$ es la denominada *función de recurso*, e indica «la mejor compleción» de la solución *a priori* y , bajo el escenario $\omega \in \Omega$. Por ejemplo, en un problema en el que cada centro de servicio tiene una capacidad máxima b_i , $i \in I$, puede ocurrir que, dada una solución *a priori* $\bar{y} \in \{0, 1\}^{|I|}$, $\sum_{i \in I} b_i \bar{y}_i < \sum_{j \in J} d_j^\omega$, para cierto escenario $\omega \in \Omega$. Esto indicaría que la capacidad total de la solución parcial $\bar{y}$ es insuficiente para satisfacer la demanda total bajo el escenario ω . En ese caso, la función de recurso normalmente incorporará ya sea una *penalización* por la demanda no servida (asociada a un criterio para determinar los usuarios cuya demanda se satisface), ya sea unos costes adicionales de activación de nuevos centros de servicio para poder satisfacer toda la demanda. Algunas referencias a trabajos recientes en los que se consideran distintas formas para la función de recurso son [1, 2, 4].

Está comúnmente aceptado que los modelos basados en la minimización de $Q(y)$ son preferibles cuando el decisor es «neutro al riesgo» (*risk-neutral*), mientras que los

que utilizan $\max_{\omega \in \Omega} Q(y, \omega)$ son preferibles cuando el decisor es «adverso al riesgo» (*risk-averse*). Un compromiso entre los dos criterios, cada vez más estudiado, es el llamado *conditional-value-at-risk* (CVaR) [49] que, para un nivel de riesgo α y para una solución *a priori* y , se define como

$$\text{CVaR}_\alpha(y) = \mathbb{E}[Q(y, \omega) \mid Q(y, \omega) \geq \beta_\alpha(y)],$$

donde $\beta_\alpha(y)$ es el llamado *value-at-risk* de la solución *a priori* y al nivel α , y viene dado por

$$\beta_\alpha(y) = \min\{\gamma \mid \text{Prob}(Q(y, \omega) \leq \gamma) \geq 1 - \alpha\}.$$

En términos coloquiales, $\text{CVaR}_\alpha(y)$ indica el valor esperado de la variable aleatoria $Q(y, \omega)$ cuando esta se restringe a los $(1 - \alpha)\%$ peores escenarios para la solución y . Un trabajo reciente de un problema estocástico de localización discreta donde se considera este objetivo, en el que se pone de manifiesto la dificultad para encontrar representaciones de estos problemas que puedan resolverse eficientemente mediante técnicas de Programación Lineal Entera, es [24].

8. LOCALIZACIÓN COMPETITIVA: EN BÚSQUEDA DE UN EQUILIBRIO

En esta última sección describimos someramente algunos aspectos diferenciadores de la llamada *localización competitiva*. Los modelos planteados en las secciones previas consideran un único decisor, que opera de acuerdo con sus circunstancias y objetivos. Sin embargo, en un mercado económico ocurre frecuentemente que varias compañías compiten por captar la demanda de los usuarios (clientes). En ese contexto cualquier decisión óptima de una firma respecto a la localización de sus centros de servicio (y precios establecidos para los usuarios) deberá necesariamente incorporar información sobre las decisiones de localización del resto de las firmas, surgiendo así la localización competitiva.

Supongamos una situación sencilla de un nuevo mercado del que se conoce su distribución de demanda, al que dos firmas que ofrecen el mismo producto intentan acceder para maximizar sus beneficios. En términos generales, en localización competitiva se plantean dos preguntas fundamentales. La primera es si existe una situación en la que, una vez que ambas firmas han decidido sobre su localización y precios, ninguna de ellas tiene incentivo para modificar unilateralmente ni su localización ni sus precios. Es decir, si existe lo que se conoce como un *equilibrio*. La segunda pregunta, que únicamente se plantea en caso que dicho equilibrio exista, es ¿cuál es, para cada una de las firmas, la decisión óptima simultánea de localización y precios para los clientes?

En 1929, Hotelling [33] respondió las dos preguntas anteriores para dos firmas compitiendo en un mercado en el que la demanda se distribuye uniformemente a lo largo de un segmento lineal y los costes de transporte son lineales respecto a la distancia al centro de servicio más próximo. Cada firma decide un único centro de producción y establece los mismos precios para todos los clientes. No fue hasta 50 años después cuando D'Aspremont et al. (1979) [18] cuestionaron los resultados de

Hotelling y demostraron que, cuando la función de costes de transporte es lineal, no existe equilibrio para el modelo considerado en [33], aunque sí lo hay cuando se considera una función de costes de transporte cuadrática. Como posteriormente se demostró en [27], el motivo fundamental es la falta de cuasiconcavidad en la función de beneficio inducida por costes de transporte lineales.

Indudablemente, el ejemplo anterior es excesivamente simplista, a no ser que las *firmas* sean vendedores de helados en un paseo marítimo, aunque sirve para ilustrar el contexto. Hoy en día la localización competitiva estudia modelos mucho más sofisticados que el anterior, en los que intervienen múltiples elementos. Estos modelos se abordan habitualmente desde la metodología propia de la Teoría de Juegos. Numerosos *surveys* y capítulos de libros han analizado las características y propiedades de los diversos modelos de localización competitiva. Algunos de ellos son [21, 22].

9. CONCLUSIONES

La Teoría de Localización es la disciplina que estudia problemas que buscan identificar subconjuntos (puntos, conjuntos de puntos, o estructuras más generales) de un espacio dado que optimicen una cierta métrica en relación a unos puntos dados. Desde mediados del siglo XX la disciplina ha disfrutado de un impulso notable, principalmente para dar respuesta a nuevos problemas matemáticos que surgen en aplicaciones en Economía, Telecomunicaciones, o Transporte y Logística, entre otros.

La naturaleza matemática de los distintos problemas en Teoría de Localización es muy diversa, lo cual no sorprende teniendo en cuenta la variedad de contextos que motivan estos problemas.

En este artículo se han revisado algunas de las principales familias de modelos de localización y comentado sus principales características y dificultades. En todos los casos, subyace la dificultad de poder *traducir* métodos de solución para problemas NP-duros en algoritmos que puedan resolver instancias de grandes dimensiones de manera computacionalmente eficiente. Otros retos que se plantean en la actualidad incluyen el tratamiento de la incertidumbre en los datos, la localización de estructuras progresivamente más complejas, o el estudio de problemas *híbridos* que reflejen de manera más realista las circunstancias que se dan en la práctica, combinando decisiones de localización con otro tipo de decisiones (por ejemplo, rutas o similares).

Avances en optimización estocástica, optimización binivel, u optimización no lineal con variables binarias pueden ser herramientas fundamentales para alcanzar estos retos.

REFERENCIAS

- [1] M. ALBAREDA-SAMBOLA, E. FERNÁNDEZ Y F. SALDANHA DA GAMA, The facility location problem with Bernoulli demands, *Omega* **39** (2011), 335–345.

- [2] M. ALBAREDA-SAMBOLA, E. FERNÁNDEZ Y F. SALDANHA DA GAMA, Heuristic solutions to the facility location problem with general Bernoulli demands, *INFORMS J. Comput.* **29** (2017), 737–753.
- [3] M. ALBAREDA-SAMBOLA Y J. RODRÍGUEZ-PEREIRA, Location-routing and location-arc routing, *Location Science* (2.^a ed.), 431–452, Springer, Cham, 2019.
- [4] E. ÁLVAREZ-MIRANDA, E. FERNÁNDEZ Y I. LJUBIĆ, The recoverable robust facility location problem, *Transport Res. B-Meth.* **79** (2015), 93–120.
- [5] C. BERGE, Two theorems in graph theory, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 842–844.
- [6] O. BERMAN Y D. KRASS, Stochastic location models with congestion, *Location Science* (2.^a ed.), 477–535, Springer, Cham, 2019.
- [7] J. R. BIRGE Y F. V. LOUVEAUX, *Introduction to stochastic programming* (2.^a ed.), Springer, New York, 2011.
- [8] R. BLANQUERO, E. CARRIZOSA Y P. HANSEN, Locating objects in the plane using global optimization techniques, *Math. Oper. Res.* **34** (2009), 837–858.
- [9] J. BRIMBERG, *Properties of distance functions and Minisum location models*, Ph. D. Thesis, McMaster University, 1989.
- [10] H. ÇALIK, M. LABBÉ Y H. YAMAN, p -Center Problems, *Location Science* (2.^a ed.), 51–65. Springer, Cham, 2019.
- [11] C. CARATHÉODORY, Über den Variabilitätsbereich der Fourier’schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **32** (1911), 193–217.
- [12] R. CHANDRASEKARAN Y A. TAMIR, Open questions concerning Weiszfeld’s algorithm for the Fermat-Weber location problem, *Math. Program.* **44** (1989), 293–295.
- [13] G. CHRYSAL, On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in the plane, *Proc. Edinb. Math. Soc.* **3** (1885), 30–33.
- [14] I. CONTRERAS Y E. FERNÁNDEZ, General network design: A unified view of combined location and network design problems, *European J. Oper. Res.* **219** (2012), 680–697.
- [15] I. CONTRERAS Y M. O’KELLY, Hub Location Problems, *Location Science* (2.^a ed.), 327–363, Springer, Cham, 2019.
- [16] L. COOPER, Location-allocation problems, *Operations Res.* **11** (1963), 331–343.
- [17] I. CORREIA Y F. SALDANHA DA GAMA, Facility location under uncertainty, *Location Science* (2.^a ed.), 185–213, Springer, Cham, 2019.
- [18] C. D’ASPREMONT, J. J. GABSZEWICZ Y J.-F. THISSE, On Hotelling’s “stability in competition”, *Econometrica* **47** (1979), 1145–1150.
- [19] Z. DREZNER, Continuous center problems, *Foundations of Location Analysis*, 63–78, Springer, New York, 2011.
- [20] Z. DREZNER, K. KLAMROTH, A. SCHÖBEL Y G. O. VESOLOWSKY, The Weber Problem, *Facility Location: applications and theory*, 1–36, Springer, Berlin/Heidelberg, 2002.

- [21] H. A. EISELT, Equilibria in Competitive Location Models, *Foundations of Location Analysis*, 139–162, Springer, New York, 2011.
- [22] H. A. EISELT, V. MARIANOV Y T. DREZNER, Competitive Location Models, *Location Science* (2.^a ed.), 391–429, Springer, Cham, 2019.
- [23] S. ELLOUMI, M. LABBÉ Y Y. POCHE, A new formulation and resolution method for the p -center problem, *INFORMS J. Comput.* **16** (2004), 84–94.
- [24] E. FERNÁNDEZ, Y. HINOJOSA, J. PUERTO Y F. SALDANHA DA GAMA, New algorithmic framework for conditional value at risk: Application to stochastic fixed-charge transportation, *European J. Oper. Res.* **277** (2019), 215–226.
- [25] E. FERNÁNDEZ Y M. LANDETE, Fixed-Charge Facility Location Problems, *Location Science* (2.^a ed.), 67–98, Springer, Cham, 2019.
- [26] M. FISCHETTI, I. LJUBIĆ Y M. SINNL, Redesigning Benders decomposition for large-scale facility location, *Management Sci.* **63** (2017), 2146–2162.
- [27] J. J. GABSZEWICZ Y J.-F. THISSE, Spatial competition and the location of firms, *Location Theory*, 1–71, Harwood Academic Publishers, Chur, 1986.
- [28] S. GARCÍA, M. LABBÉ Y A. MARÍN, Solving large p -median problems with a radius formulation, *INFORMS J. Comput.* **23** (2011), 546–556.
- [29] S. GARCÍA Y A. MARÍN, Covering location problems, *Location Science* (2.^a ed.), 99–119, Springer, Cham, 2019.
- [30] M. GRÖTSCHEL, L. LOVASZ Y A. SCHRIJVER, *Geometric algorithms and combinatorial optimization*, Algorithms and Combinatorics: Study and Research Texts **2**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [31] S. L. HAKIMI, Optimum locations of switching centers and the absolute centers and medians of a graph, *Oper. Res.* **12** (1964), 450–459.
- [32] S. L. HAKIMI, Optimal distribution of switching centers in a communications network and some related graph-theoretic problems, *Oper. Res.* **13** (1965), 462–475.
- [33] H. HOTELLING, Stability in competition, *The Economic Journal* **39** (1929), 41–57.
- [34] O. KARIV Y S. L. HAKIMI, An algorithmic approach to network location problems. I: the p -centers, *SIAM J. Appl. Math.* **37** (1979), 513–538.
- [35] O. KARIV Y S. L. HAKIMI, An algorithmic approach to network location problems, II: The p -medians, *SIAM J. Appl. Math.* **37** (1979), 539–560.
- [36] M. LABBÉ, D. PEETERS Y J.-F. THISSE, Location on Networks, *Network routing*, 551–624, Handbooks Oper. Res. Management Sci. **8**, North-Holland, Amsterdam, 1995.
- [37] G. LAPORTE, S. NICKEL Y F. SALDANHA DA GAMA (EDS.), *Location Science* (2.^a ed.), Springer, Cham, 2019.
- [38] A. MARÍN Y M. PELEGRÍN, p -Median problems, *Location Science* (2.^a ed.), 25–50, Springer, Cham, 2019.
- [39] N. MEGIDDO, Linear-time algorithms for linear programming in R^3 and related problems, *SIAM J. Comput.* **12** (1983), 759–776.

- [40] N. MEGIDDO, The weighted Euclidean 1-center problem, *Math. Oper. Res.* **8** (1983), 498–504.
- [41] N. MEGIDDO Y K. J. SUPOWIT, On the complexity of some common geometric location problems, *SIAM J. Comput.* **13** (1984), 182–196.
- [42] Z. A. MELZAK, *Invitation to Geometry*, Wiley, New York, 1983.
- [43] E. MINIEKA, The m -center problem, *SIAM Rev.* **12** (1970), 138–139.
- [44] H. MINKOWSKI, Theorie der Konvexen Körper, *Gesammelte Abhandlungen* **2** (1911), 131–229.
- [45] A. NEMIROVSKI Y A. SHAPIRO, Convex approximations of chance constrained programs, *SIAM J. Optim.* **17** (2006), 969–996.
- [46] S. NICKEL Y J. PUERTO, *Location theory: A unified approach*, Springer, Berlin, 2005.
- [47] F. PLASTRIA, The Weiszfeld algorithm: proof, amendments, and extensions, *Foundations of Location Analysis*, 357–389, Springer, New York, 2011.
- [48] J. PUERTO Y A. M. RODRIGUEZ CHÍA, Ordered median location problems, *Location Science* (2.^a ed.), 261–302, Springer, Cham, 2019.
- [49] R. T. ROCKAFELLAR Y S. URYASEV, Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk* **2** (2000), 21–41.
- [50] A. SCHÖBEL, Locating dimensional facilities in a continuous space, *Location Science* (2.^a ed.), 143–184, Springer, Cham, 2019.
- [51] A. SHAPIRO, D. DENTCHEVA Y A. RUSZCZYŃSKI, *Lectures on stochastic programming*, Modeling and theory, MPS-SIAM Series on Optimization **9**, Philadelphia, 2009.
- [52] J. J. SYLVESTER, A question in the geometry of situation, *Quarterly Journal of Mathematics* **1** (1857), 79.
- [53] C. TOREGAS, A. SWAIN, C. REVELLE Y L. BERGMAN, The location of emergency service facilities, *Oper. Res.* **19** (1971) 1363–1373.
- [54] A. WEBER, Über den Standort der Industrie, Tübingen, 1909. Traducción al inglés (por C. J. Friedrich): *Theory of the Location of Industries*, University of Chicago Press, 1929.
- [55] E. V. WEISZFELD, Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum, *Tohoku Math. J.* **43** (1937), 335–386.
- [56] G. O. WESOŁOWSKY, The Weber problem: history and perspectives, *Location Sci.* **1** (1993), 5–23.