Luis Caffarelli, premio Abel 2023: matemáticas y experiencias con sus colaboradores españoles

por

María Soria-Carro*

Resumen. En este artículo, escrito con ocasión de la concesión a Luis Caffarelli del Premio Abel 2023, se muestra la influencia de Luis en la matemática española. En particular, los distintos matemáticos españoles que han trabajado con él describen estas colaboraciones desde un punto de vista personal.

Luis Caffarelli (© The University of Texas at Austin).

1. Introducción

Las ecuaciones en derivadas parciales constituyen un campo fundamental en las matemáticas, con una amplia gama de aplicaciones que abarcan diversas áreas científicas. Desde la descripción de fenómenos físicos y biológicos hasta la modelización de procesos en ingeniería, las EDP proporcionan un marco matemático esencial para

*Este artículo no hubiera sido posible sin las contribuciones de Xavier Cabré, Fernando Charro, Antonio Córdoba, Mar González, Rafael de la Llave, Xavier Ros-Oton, Fernando Soria y Juan Luis Vázquez. Quiero agradecer a todos ellos su gran cooperación.

entender el comportamiento de sistemas complejos como, por ejemplo, los incendios o tsunamis, la evolución de una pandemia o el crecimiento de un tumor.

Un aspecto crucial de esta teoría es el estudio de la regularidad de las soluciones, que consiste en comprender la suavidad o las singularidades de las funciones que satisfacen estas ecuaciones. La regularidad de las soluciones está estrechamente relacionada con otras cuestiones como la existencia, unicidad y estabilidad de las mismas y, desde mediados del siglo XX, es uno de los temas centrales de investigación en EDP. Durante más de cuatro décadas, Luis Caffarelli ha destacado como el matemático de referencia en este ámbito, contribuyendo con resultados sumamente significativos e influyentes en diversos contextos.

1.1. Biografía

Luis Ángel Caffarelli es un brillante matemático argentino reconocido mundialmente por sus contribuciones científicas en el campo de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) no lineales. Nacido en 1948 en el barrio de la Boca, en Buenos Aires, estudió Matemáticas en la Universidad de Buenos Aires. Obtuvo el doctorado en 1972, con una tesis titulada *Sobre conjugación y sumabilidad de series de Jacobi*, dirigida por Calixto Calderón.

En enero de 1973, Luis inició su trayectoria en Estados Unidos con un contrato postdoctoral en la Universidad de Minnesota. Fue allí donde se interesó por las ecuaciones no lineales y los problemas de frontera libre, inspirado por unas clases de Hans Lewy (premio Wolf 1986). Desde 1979 hasta 1983 ejerció de profesor en Minnesota y también en el Courant Institute de Nueva York (1980–1982). Durante esta estancia en el Courant colaboró con Louis Nirenberg (premio Abel 2015) en las ecuaciones de Navier-Stokes. Entre 1983 y 1986 fue profesor en la Universidad de Chicago y, posteriormente, en el Institute for Advanced Study de Princeton, donde trabajó durante una década. En este exitoso período, dedicó gran parte de su investigación al estudio de la ecuación de Monge-Ampère. En 1994 regresó al Courant Institute, donde permaneció hasta 1997. En la actualidad, Luis Caffarelli es profesor emérito de Matemáticas en la Universidad de Texas en Austin, donde ocupó la prestigiosa plaza de *Sid W. Richardson Foundation Regents Chair in Mathematics* durante 26 años (1997–2023).

A lo largo de su carrera, Luis ha recibido numerosas distinciones, incluyendo la medalla Stampacchia en 1982, el premio Bôcher en 1984, el premio Rolf Schock en 2005, el premio Steele en 2009, el premio Wolf en 2012, la medalla Solomon Lefschetz en 2013 y el premio Shaw en 2018. Finalmente, en mayo de 2023, la Academia Noruega de Ciencias y Letras le concedió el prestigioso Premio Abel, convirtiéndose en el primer latinoamericano en conseguirlo.

Con más de 320 artículos, 20 000 citas, 135 colaboradores y 30 estudiantes, Luis Caffarelli se ha consolidado como uno de los matemáticos más influyentes de nuestra época, dejando una huella perdurable en la comunidad matemática.

Para saber más sobre la vida y obra de Luis, véase [48].

1.2. La influencia de Luis Caffarelli en España

La relación de Luis Caffarelli con España empezó en la década de 1980, y su influencia en el desarrollo de las EDP ha sido primordial. En 1992 fue nombrado Doctor Honoris Causa por la Universidad Autónoma de Madrid y desde 2015 es académico extranjero de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de España. Además, Luis pertenece al Comité Editorial de la *Revista Matemática Iberoamericana*, editada por la Real Sociedad Matemática Española (RSME), y al Comité Externo de Asesoramiento Científico del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT). También recibió el premio Rey Pastor, en el marco del primer congreso conjunto UMA-RSME en 2017.

El compromiso de Luis Caffarelli con nuestro país se ha manifestado especialmente a través de su participación activa en diversas actividades como congresos y escuelas. Destaca, entre ellas, la Escuela de Verano de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo (UIMP) en el Palacio de la Magdalena en Santander, cuyas primeras ediciones coorganizó Luis y en la que impartió cursos en reiteradas ocasiones.

El vínculo con España no solo se refleja en las importantes distinciones, sino también en las colaboraciones y experiencias con matemáticos españoles:

> «Hace treinta años que estoy vinculado a la matemática española, varios de nosotros hemos pasado largas temporadas colaborando, viendo nacer y crecer a nuestros hijos, compartiendo dificultades y éxitos, y quizás esto es lo mejor del ser matemático.»[1]

1.3. Organización del artículo

Este artículo expone las diversas colaboraciones de Luis con matemáticos españoles. En cada uno de los correspondientes apartados, ellos mismos han compartido sus experiencias y resultados desde un punto de vista personal. Para facilitar la comprensión del lector, hemos clasificado las distintas colaboraciones en los siguientes temas:

1. Ecuaciones no lineales en forma de divergencia: Juan Luis Vázquez (sección 2.1), Ireneo Peral (sección 2.2) y Fernando Soria (sección 2.3).
2. Transiciones de fase y superficies mínimas: Antonio Córdoba (sección 3.1).
3. Ecuaciones completamente no lineales: Xavier Cabré (sección 4.1).
4. Homogeneización de superficies mínimas en medios periódicos: Rafael de la Llave (sección 5.1).
5. Problemas de fronteras libres: el problema del obstáculo: Xavier Ros-Oton y Joaquim Serra (sección 6.1).
6. La ecuación de Monge-Ampère y el transporte óptimo: Mar González (sección 7.1), Fernando Charro (sección 7.2) y María Soria-Carro (sección 7.3).

[1] Palabras de Luis Caffarelli en la entrevista hecha por Juan Luis Vázquez en La Gaceta [53].

2. Ecuaciones no lineales en forma de divergencia

Las ecuaciones en forma de divergencia aparecen naturalmente en el Cálculo de Variaciones. Un ejemplo clásico consiste en minimizar el funcional de energía

$$\mathcal{E}(u) = \int_\Omega F(\nabla u)\,dx,$$

dada una cierta función suave $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Calculando la primera variación de $\mathcal{E}(u)$, obtenemos que los minimizantes satisfacen la ecuación de Euler-Lagrange,

$$\operatorname{div}\big(DF(\nabla u)\big) = 0, \tag{1}$$

donde DF es el gradiente de $p \mapsto F(p)$. En particular, si $F(p) = |p|^2$, entonces (1) es sencillamente la ecuación de Laplace, $\Delta u = 0$, cuyas soluciones son C^∞. Uno de los problemas más importantes en EDP, planteado por Hilbert a principios del siglo XX, consistía en demostrar que las soluciones débiles de (1) son C^∞ cuando F es uniformemente convexa. Este problema se conoce como el *19 problema de Hilbert* y fue resuelto por De Giorgi en 1957 (y también por Nash de forma independiente), desarrollando un método geométrico muy poderoso, que actualmente se utiliza con éxito en otros problemas, incluyendo ecuaciones parabólicas, no locales, etc.

Por otro lado, las ecuaciones en forma de divergencia son una herramienta muy útil para describir procesos de difusión, como la propagación del calor o de un gas. Estos modelos se rigen por una ecuación de la forma

$$u_t + \operatorname{div}\mathbf{q} = 0, \tag{2}$$

donde u representa una temperatura, densidad o concentración y $\mathbf{q}$ es el flujo. Por ejemplo, en los procesos de difusión del calor el flujo se mueve de concentraciones más altas a más bajas, y viene dado por $\mathbf{q} = -k\nabla u$. Sustituyendo esta expresión en (2), obtenemos la ecuación del calor: $u_t = k\Delta u$. Otro ejemplo de gran interés es la «ecuación de los medios porosos», $u_t = k\Delta u^m$, $m > 1$, que describe cómo fluye un fluido a través de un medio poroso. La ecuación se deduce de la ley de la conservación de masa, (2) con $\mathbf{q} = u\mathbf{v}$, donde u es la densidad del fluido y $\mathbf{v}$ es la velocidad. Además, la ley de Darcy nos dice que $\mathbf{v} = -k\nabla p$, donde p es la presión. Finalmente, asumimos una condición termodinámica, que en el caso más simple es $p = u^m$. Esta versión no lineal de la ecuación del calor ha recibido notable atención por sus peculiares características, como la aparición de una frontera libre.

Luis, junto con sus colaboradores, ha contribuido con grandes avances en la teoría de regularidad para este tipo de ecuaciones. En las secciones 2.1–2.3, Juan Luis Vázquez, Ireneo Peral[2] y Fernando Soria describen los resultados obtenidos en sus colaboraciones con Caffarelli.

[2]Desgraciadamente, Ireneo Peral falleció en 2021. La correspondiente sección 2.2 la ha redactado la firmante de este artículo a partir de los testimonios recogidos en [2].

2.1. Colaboración con Juan Luis Vázquez

Mi trabajo con Luis Caffarelli comenzó cuando lo conocí en Italia, en la Conferencia Internacional de Fronteras Libres, celebrada en Montecatini, cerca de Florencia, en 1981. Después de explicar a Don Aronson y Luis Caffarelli algunos avances míos en el estudio de su trabajo sobre fronteras libres para flujos en medios porosos, recibí una invitación para visitarlos en la Universidad de Minnesota. Viajé allí en septiembre de 1982 y pasé un año como *Fulbright Scholar.* Me impresionó desde el primer momento el alto nivel de excelencia académica y la mentalidad abierta que reinaban en Minnesota y otras universidades estadounidenses involucradas en la investigación sobre Ecuaciones en Derivadas Parciales no lineales, un tema que en aquel entonces estaba en pleno desarrollo y lleno de nuevos problemas.

Esa estancia marcó el comienzo de una amistad con Don y Luis que perduró desde entonces, y también del trabajo en fronteras libres, el tema en el que Luis se estaba convirtiendo en la estrella en ascenso en el estudio geométrico de las EDP. Para ser precisos, comenzamos a trabajar en la entonces bastante popular ecuación de medios porosos, $u_t = \Delta u^m$, $m > 1$, en siglas PME, uno de los modelos más eficaces para el estudio del comportamiento de las soluciones de procesos de difusión no lineal y de sus fronteras libres. Hemos continuado esos estudios desde entonces. Recuerdo que los otros modelos favoritos de Luis son el problema de obstáculo (véase la sección 6) y el problema de Stefan. En aquel momento, la regularidad óptima de la frontera libre de la PME no se conocía ni siquiera en una dimensión espacial. En la primavera de 1983 resolvimos juntos el problema abierto en nuestro primer artículo, [3], publicado en 1995. El artículo muestra que en los flujos en medios porosos cuya frontera libre tiene un tiempo de espera, dichas fronteras libres no son siempre de clase C^1; la continuidad Lipschitz es el mejor resultado general que puede obtenerse.

Después de regresar a España, viajé a EE. UU. cuanto pude para trabajar con Luis, primero en Minneapolis, luego en Chicago, más tarde en Princeton y el Courant Institute de Nueva York. En colaboración con la matemática argentina Noemí Wolanski, hicimos una importante contribución a la regularidad de las soluciones y las fronteras libres en varias dimensiones espaciales. El artículo, [37], apareció en 1987.

En un artículo posterior, Caffarelli y Wolanski mejoraron la continuidad de Lipschitz a regularidad $C^{1,\alpha}$ (1987). Se necesitaron más de diez años para encontrar la mejora de la regularidad de $C^{1,\alpha}$ a C^∞, resultado debido a Herbert Koch (profesor en Bonn) bajo una serie de hipótesis sobre los datos iniciales (1999). Se necesitaron casi veinte años para eliminar tales condiciones y obtener una prueba completa de la regularidad C^∞ en condiciones iniciales naturales, esta vez trabajo de Kienzler, Koch y Vázquez (2017). Esto es una muestra de la dificultad de los temas sugeridos por Luis Caffarelli y la escala de tiempo necesaria para resolverlos.

Tras el cambio de siglo, Luis centró su atención en el estudio de los operadores integro-diferenciales como generadores de evoluciones disipativas y de sus estados estacionarios. Estos operadores representan probabilísticamente difusiones no locales con saltos. El operador más típico de este tipo es el laplaciano fraccionario. Me uní a este esfuerzo en 2007 en la Universidad de Texas, donde Luis se había radicado. La ecuación habitual del medio poroso cedió el lugar a la llamada «difusión del medio poroso con presión no local»,

$$u_t + \operatorname{div}(u\nabla p) = 0, \quad p = (-\Delta)^{-s}u.$$

Investigamos este novedoso modelo, de interés en mecánica de medios continuos, en dos artículos, que tardaron algunos años en completarse. El primero, [34], trata sobre la existencia de soluciones de masa finita. El segundo, [35], introdujo las soluciones fundamentales del modelo, las fronteras libres y el comportamiento asintótico. El último resultado se deriva del delicado análisis de la disipación de entropía. A estos dos les siguió un artículo difícil, [27], en el que aplicamos los métodos de regularidad de De Giorgi para conseguir regularidad Hölder de las soluciones. Este trabajo contó con la colaboración de Fernando Soria (véase la sección 2.3). El caso crítico restante, el de exponente $s = 1/2$, exigió un método original y se resolvió en [36].

Luis es una persona con muchos intereses. En la década 1990–2000 estudiamos dos temas diferentes. Uno de ellos era la propagación del calor con condiciones de combustión [32]. El otro trata de adaptar la teoría de las soluciones de viscosidad (véase la sección 4), entonces muy utilizada, a la teoría estándar de las soluciones débiles, trabajando el caso de la ecuación de medios porosos. Ambos enfoques demostraron ser equivalentes en [33]. Una descripción detallada de los variados temas de difusión no lineal que he estudiado bajo la influencia de Luis se encuentra en el *survey* [52].

2.2. Colaboración con Ireneo Peral

Ireneo y Luis se conocieron en el Encuentro Internacional de EDP, organizado por Ireneo, Antonio Córdoba y Juan Luis Vázquez en la Universidad Menéndez Pelayo de Santander en el año 1987. Posteriormente, en otoño de 1992, Luis invitó a Ireneo a visitar el Institute for Advanced Study en Princeton.

Durante esta fructífera estancia, Ireneo y Luis iniciaron su colaboración sobre la regularidad de soluciones de ecuaciones elípticas semilineales,

$$\operatorname{div} a(x, \nabla u) = 0, \tag{3}$$

que abarcan una amplia gama de operadores, incluyendo, por ejemplo, los del tipo p-laplaciano. En su extraordinario trabajo [23], publicado en 1998 en *Communications on Pure and Applied Mathematics*, presentaron un método de aproximación innovador para obtener estimaciones $W^{1,p}$ para las soluciones de (3), empleando argumentos de comparación y una descomposición de tipo Calderón-Zygmund. Su investigación se ha convertido en una referencia distinguida, con más de 350 citas en *MathSciNet*, consolidándose como una contribución muy significativa en este campo.

Destacamos unas bonitas palabras de Luis en [2]: «Para mí fue una enorme satisfacción que Ireneo, con el que ya había empezado a trabar una gran amistad, visitara el Instituto de Estudios Avanzados. De esta forma tuvimos la oportunidad de desarrollar ideas y nuevos métodos, algunos de los mejores que he encontrado en mi trabajo. Puedo decir que estoy muy orgulloso de esa colaboración que pude mantener con él.»

2.3. Colaboración con Fernando Soria

Sobre Luis se destacan muchas virtudes como persona y como profesional de las matemáticas. Quizás una de las más repetidas sobre lo segundo es la increíble capacidad de intuición que posee. En alguna ocasión alguien dijo que parecía ser un físico, sin ser físico. Sin embargo, creo que esta capacidad le viene más de su percepción geométrica de las cosas. Recordemos que en sus inicios, como estudiante de doctorado de Calixto Calderón, su área de investigación estuvo relacionada con el análisis armónico. De ahí sacó sin duda el gusto por argumentos geométricos y lemas de cubrimiento. Mi primer trabajo relacionado con la obra de Luis, [49], representa una extensión del artículo que Ireneo Peral y el propio Luis habían escrito unos años antes (véase la sección anterior). El trabajo toma la misma perspectiva argumental, pero para el caso parabólico,

$$u_t - \operatorname{div} a(x, t, \nabla u) = 0.$$

Al igual que en el primer caso, la regularidad de las soluciones se obtiene a través de estimaciones sobre las curvas de nivel de su gradiente espacial gracias, fundamentalmente, a la descomposición de Calderón-Zygmund y las propiedades de cierto operador maximal asociado.

Quizás la constatación más evidente de su intuición geométrica viene dada por el profundo conocimiento y admiración que siente por la obra de Ennio De Giorgi, fundamentada en nociones de teoría geométrica de la medida. En este sentido resultan esclarecedores sus trabajos con Alexis Vasseur sobre la regularidad de las soluciones de ecuaciones elípticas en [30] y, muy especialmente, su impresionante obra en el caso de la ecuación geostrófica, [31].

Motivado por este segundo trabajo y la difusión no local que encierra, Luis nos propuso a Juan Luis Vázquez y a mí desarrollar una teoría con potencial fraccionario en el caso de los medios porosos (véase [27]). En concreto, se trataba de demostrar la regularidad C^α de las soluciones débiles a la ecuación

$$u_t - \operatorname{div}(u\nabla(-\Delta)^{-s}u) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},$$

con dato inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ no negativo. Aquí, $(-\Delta)^{-s}$ denota la inversa del laplaciano fraccionario de orden $s \in (0, 1)$, es decir, el operador asociado al multiplicador de la transformada de Fourier $|\xi|^{-2s}$.

Como ha mencionado Juan Luis en la sección 2.1, Luis y él habían probado anteriormente la existencia y el comportamiento asintótico en este mismo caso (véanse [34] y [35]). La primera parte de nuestro trabajo consistió en demostrar la acotación L^∞ de la solución. Para ello, utilizando estimaciones de energía y lo que Luis definió como *the De Giorgi approach*, pasaríamos por distintos pasos intermedios definidos respectivamente como de L^1 a $L \log L$, de $L \log L$ a L^2, y finalmente de L^2 a L^∞. La parte más complicada estaba aún por llegar y es aquí donde la magia de los argumentos geométricos de De Giorgi se hizo más palpable, con el uso de funciones barrera y la obtención de lemas para el control de la oscilación de las soluciones. Cada una de las secciones que aparecen a partir de este momento son, para este autor, como la mirada a un mundo lleno de ideas nuevas a la vez que hermosas.

Y es que trabajar con Luis es una experiencia gratificante, por lo mucho que se aprende de él, por el calor y la cercanía que desprende, por la certeza de estar sin duda al lado de uno de los grandes de nuestro tiempo.

3. Transiciones de fase y superficies mínimas

Los problemas de transición de fase modelan cambios abruptos en el comportamiento de sistemas físicos, químicos o biológicos. Estos cambios surgen cuando hay una transición de un estado a otro, como la fusión de un sólido a líquido. La energía asociada a este tipo de fenómenos se puede describir mediante el funcional

$$J_\varepsilon(u) = \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon^2}{2} |\nabla u|^2 + W(u) \right) dx, \tag{4}$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño y $W \geq 0$ es un «potencial de doble pozo», cuyos mínimos, u_1 y u_2, son las dos fases (estables) del sistema considerado. Un ejemplo clásico es $W(u) = \frac{1}{4}(1-u^2)^2$, donde $u_1 \equiv -1$ y $u_2 \equiv 1$. Como $W(u_1) = W(u_2) = 0$, es evidente que los estados u_1 y u_2 minimizan el funcional de energía.

El primer término en (4) corresponde a la energía cinética del sistema, que tiene en cuenta las interacciones a pequeña escala, como la fricción. Nótese que el gradiente al cuadrado juega un papel muy importante, pues impide que los minimizantes u_ε de J_ε salten instantáneamente de un estado al otro. De hecho, la región de transición entre las dos fases tiene una anchura comparable a ε.

Un problema interesante en este contexto es estudiar el comportamiento asintótico de u_ε y, en particular, de la región de transición, cuando $\varepsilon \to 0$. Modica y Mórtola fueron los pioneros en abordar este problema a finales de los años 70. Demostraron que la región de transición converge, en un sentido débil, a una superficie mínima en Ω, es decir, una superficie con la menor área posible. Este resultado fascinante estableció una conexión entre la teoría de cambios de fase y la teoría de superficies mínimas, que aparentemente no estaban relacionadas. Además, condujo a la famosa conjetura de De Giorgi (1978), un problema complejo y parcialmente resuelto, que cuenta con una extensa bibliografía. Véase [50] para más detalles sobre este tema.

A continuación, Antonio Córdoba expone sus reflexiones y resultados con Luis Caffarelli en esta línea de investigación.

3.1. Colaboración con Antonio Córdoba

Conocí personalmente a Luis en una reunión de la AMS celebrada en Saint Louis, Missouri, en el invierno de 1977. Ambos llevábamos algunos años en EE. UU., donde éramos *Junior Faculty* en Minnesota y Princeton, respectivamente. Después coincidimos en la Universidad de Chicago en 1983, a la que él se había incorporado como flamante *Full Professor*, y donde yo disfrutaba de un sabático como *Visiting Profesor*. Iniciamos entonces una amistad y colaboración que se extendió, y compartimos, con nuestras respectivas familias. Colaboración que se continuó con sus visitas a la UAM y mis estancias en el Institute for Advanced Study. Él en Princeton y yo en Madrid, codirigimos un proyecto financiado por el Comité Conjunto

Hispano-Norteamericano, que propició estrechar conexiones científicas financiando viajes de, entre otros, Juan Luis Vázquez y Alberto Ruiz, y que culminamos con la organización de un «Encuentro Internacional de EDP» en la Universidad Menéndez Pelayo en el año 1987, con la participación, entre otros, de L. Nirenberg, P. L. Lions y P. Schoen.

Al cesar como ministro de Sanidad, Ernest Lluch visitó el IAS coincidiendo con otro de mis sabáticos *princetonianos*, y allí hicimos planes con Caffarelli para organizar una escuela de Matemáticas, que Luis y yo codirigimos en la Menéndez Pelayo, universidad de la que Lluch había sido nombrado rector. Esta escuela, que fue todo un éxito que se prolongó durante varios años, se estrenó en 1992 con dos cursos: uno sobre *Mathematical Analysis and the problems of Continuum Mechanics* y el otro sobre *Number Theory.*

Mi colaboración con Luis Caffarelli dio lugar a tres publicaciones, [17, 18, 19]. El artículo [17] contiene una nueva demostración de la regularidad de las superficies minimales en el contexto de la teoría de los conjuntos de Cacciopoli-De Giorgi. Tanto [17] como [18] y [19], fueron motivadas por el análisis de la regularidad uniforme de los conjuntos de nivel, y la convergencia a la interfase, de los minimizantes de los problemas en las teorías de transición de fase introducidas por Van der Waals, Ginzburg-Landau y Cahn-Hilliard.

Más precisamente, dados los funcionales $J_\varepsilon(u)$ en (4), sabemos que los límites de minimizantes u_ε de J_ε, cuando $\varepsilon \to 0$, son dos estados u_1 y u_2, separados por una interfase, que es una superficie minimal. El resultado principal de [18] demuestra la convergencia uniforme de los conjuntos de nivel $\{u_\varepsilon = \lambda\}$, con $u_1 < \lambda < u_2$, a la superficie minimal en una franja de transición de anchura comparable a ε.

En [19] se demuestra que, si uno de los conjuntos de nivel es una superficie lipschitziana, entonces todos son superficies C^∞. En particular, eso implica que si u es un minimizante global $(\Omega = \mathbb{R}^n)$ de $J(u) = \int \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u)\right) dx$, tal que la superficie $\{u = 0\}$ es lipschitziana, entonces u es unidimensional, es decir, existe un vector $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $u(x) = \varphi(\nu \cdot x)$, donde φ es una función lisa determinada.

4. Ecuaciones completamente no lineales

En los últimos cuarenta años ha habido grandes avances en la teoría de regularidad de las ecuaciones de segundo orden completamente no lineales. En general, estas ecuaciones se expresan como

$$F(D^2u, \nabla u, u, x) = 0, \tag{5}$$

y tienen aplicaciones en distintas áreas, como en Probabilidad (las ecuaciones de Bellman o de Isaacs) y en Geometría (la ecuación de las superficies mínimas o las ecuaciones del hessiano).

Las soluciones de (5) se entienden en un sentido generalizado. Es decir, una función continua u es una solución de «viscosidad» de (5) si para toda función φ de clase C^2 tal que $u - \varphi$ tiene un máximo (resp., mínimo) local en x_0 se satisface que $F(D^2\varphi(x_0), \nabla\varphi(x_0), \varphi(x_0), x_0) \geq 0$ (resp., ≤ 0). Esta noción, introducida por

Crandall y Lions para las ecuaciones de primer orden, permite dar sentido a las derivadas de la ecuación cuando u es solo continua. Además, resulta ser muy útil ya que se pueden obtener resultados de existencia y unicidad bajo condiciones muy generales en F, así como principios de comparación.

Para la ecuación más sencilla, $F(D^2u) = 0$, Krylov y Safonov (1979) demostraron que si F es uniformemente elíptico, entonces u es localmente $C^{1,\alpha}$. Posteriormente, Evans y Krylov (1982) mejoraron (en trabajos independientes) la regularidad interior a $C^{2,\alpha}$ suponiendo que además F es convexo (o cóncavo). En dimensión 2 este resultado es válido sin la hipótesis de convexidad, y fue probado muchos años antes por Nirenberg (1953). Sin embargo, en dimensiones mayores o iguales que 5, y suponiendo que F es solo uniformemente elíptico, Nadirashvili y Vladuts (2014) encontraron soluciones de viscosidad que no son C^2. Entender los casos en dimensión 3 y 4 es actualmente un problema abierto.

Para ecuaciones que dependen de x, $F(D^2u, x) = f(x)$, Luis demostró estimaciones $C^{1,\alpha}$, $C^{2,\alpha}$ y $W^{2,p}$ para soluciones de viscosidad, desarrollando novedosos argumentos de perturbación. Estos resultados de gran relevancia fueron publicados en *Annals of Mathematics* [8]. En la próxima sección, Xavier Cabré destaca sus contribuciones en este campo con Luis.

4.1. Colaboración con Xavier Cabré

Mi colaboración con Luis Caffarelli empezó en 1993, cuando era estudiante de doctorado de Louis Nirenberg en el Courant Institute. En aquel entonces, Louis y Luis eran colaboradores cercanos y mi supervisor me puso en contacto con Luis para explicarle los resultados de mi tesis doctoral. En ese momento, Luis era profesor en el IAS de Princeton. En la primavera de 1993, un año antes de convertirse en profesor en el Courant Institute, Luis fue invitado a impartir un curso de posgrado en el Courant sobre «Ecuaciones Elípticas Completamente No Lineales». Louis Nirenberg me pidió que tomara notas del curso, así como que lo ayudara a frenar a Luis si iba demasiado rápido durante las clases.

Las clases fueron muy claras y extremadamente bien organizadas. A partir de ellas, escribimos conjuntamente el libro *Fully Nonlinear Elliptic Equations* [13], completado durante 1994–95 mientras yo era investigador postdoctoral en el IAS. El libro ha resultado ser una fuente muy útil para muchos jóvenes investigadores (especialmente estudiantes de doctorado) y también para expertos senior. Es autosuficiente, consta de aproximadamente 100 páginas y tiene más de 1000 citas en *MathSciNet*.

Luis se convirtió así en un mentor muy importante en mi carrera, con el que he continuado mantenido una bonita amistad y contacto cercano. Además del libro, tengo dos artículos conjuntos con él. El primero, [14], fue un subproducto de la escritura del libro. En el artículo simplificamos y demostramos de forma directa la regularidad de las soluciones de viscosidad. Las pruebas son directas en el sentido de que no requieren una aproximación o método de continuidad: la regularidad se demuestra partiendo desde cero para las soluciones de viscosidad. En el artículo aparecen nuevas ideas al demostrar su regularidad $C^{1,1}$ para luego aplicar la teoría de Evans-Krylov.

El segundo artículo conjunto, [15], es más innovador. En él demostramos la regularidad interior $C^{2,\alpha}$ de las soluciones para algunas ecuaciones elípticas no convexas, $F(D^2u, x) = f(x)$. Nuestra hipótesis es que, para cada x, $F(\cdot, x)$ es el mínimo de un operador cóncavo y un operador convexo de D^2u. Esto extendió la teoría de Evans-Krylov para ecuaciones convexas a algunos operadores no convexos del tipo Isaacs.

5. Homogeneización de superficies mínimas en medios periódicos

Hace exactamente un siglo, M. Morse publicó un artículo que inició el cálculo de variaciones global. Completado por G. Hedlund unos años más tarde, desarrollaba una teoría global de las geodésicas minimizantes en métricas arbitrarias en superficies de dimensión 2. En el caso del toro (métricas periódicas por traslaciones enteras en el plano) demostraron que hay una constante C, que depende solo de la métrica, tal que para toda línea recta (geodésica minimizante de la métrica plana) existe una geodésica minimizante que no se separa de la línea recta más de C.

Este resultado es sorprendente porque muestra que cambiando la métrica no se puede bloquear completamente ninguna dirección de rayos. Es imposible poner bultos de manera que las desviaciones se acumulen para todas las trayectorias. Nótese que un principio variacional local lleva a conclusiones globales de los minimizantes. Además, demostraron que esto no es cierto en dimensión 3 o más. Estos resultados se aplican también a sistemas mecánicos (principio de Maupertuis) con un potencial periódico.

A finales de los años 70 hubo otras cuestiones que aparecieron independientemente: S. Aubry, continuando los trabajos de R. Peierls y otros, estaba estudiando modelos de ondas de espín y de dislocaciones en cristales; J. Mather, problemas variacionales en aplicaciones twist (influenciado por físicos como I. Percival). A la vez, muchos matemáticos estaban estudiando los problemas de ecuaciones elípticas escalares con coeficientes periódicos (el problema de homogeneización).

Un artículo muy incisivo e influyente de J. Moser en 1986 hizo explícito que había relaciones profundas entre todos estos problemas, y usó esas conexiones para obtener nuevos resultados. Este artículo mencionaba dos problemas de interés. Uno era desarrollar una teoría semejante a la teoría de Morse/Hedlund para superficies mínimas de codimensión 1 en cualquier dimensión. Otro era desarrollar una teoría de homogeneización cuando las simetrías del problema son más complicadas que las simetrías de traslaciones enteras. El primer problema es, claramente, análisis y regularidad; el segundo es un problema de geometría. Poco después aparecieron resultados de homogeneización en la teoría de ecuaciones de primer orden como Hamilton-Jacobi y se encontró relación con la teoría de Aubry-Mather *(weak KAM theory)*.

Rafael de la Llave nos habla en la siguiente sección sobre su colaboración con Luis en estos temas.

5.1. Colaboración con Rafael de la Llave

Cuando Luis y yo empezamos a estudiar estas cosas (recuerdo que todo empezó después de una charla que di y que él sabía cómo mejorar antes de que yo acabara) traíamos perspectivas muy diferentes, pero, a medida que los resultados se hacían más poderosos, los argumentos se hacían más sencillos. Al final, en [21] pudimos resolver los dos problemas de J. Moser:

1. El problema analítico se podía generalizar de superficies mínimas a curvatura prescrita (con algunas condiciones) e integrales elípticas.
2. El problema geométrico solo requería que las variedades tuvieran un grupo fundamental residualmente finito. Un corolario es que hay variedades hiperbólicas tridimensionales con superficies mínimas densas en la esfera en el infinito, que era otro problema que interesaba.

Por otro lado, en Mecánica Estadística, los modelos de Ising con coeficientes periódicos siempre tienen interfaces minimizantes que fluctúan mucho, pero pudimos probar en [22] que para cada línea recta hay una interfaz minimizante que no se separa mucho de ella.

Después de eso, gentes brillantes desarrollaron argumentos innovadores que obtienen resultados para jets, dominios con agujeros, superficies mínimas no locales, operadores fraccionarios, ondas viajeras moduladas, etc. También se sabe que si se cambia «periódico» por «cuasiperiódico» varios de los resultados no se mantienen (los correctores pueden ser no acotados). Luis hizo una muy bella exposición de muchos resultados en [12].

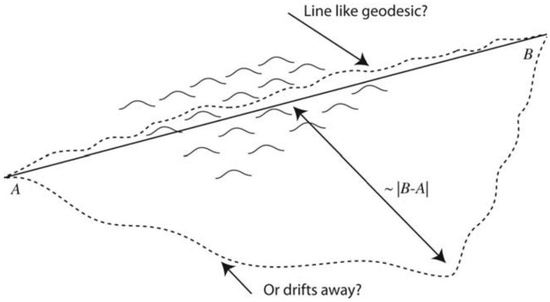

Figura 1: Dibujo de Luis en su artículo [12].

Para mí, un aspecto muy satisfactorio de esta colaboración fue la *Arkansas Spring Lecture* de 2001. Pudo atraer participantes de varias áreas y en distintas etapas de su carrera que discutieron intensamente con placer y provecho, pero con estándares de rigor muy altos que clarificaron el estatus de varios problemas. Como todas las personas que han tenido la suerte de colaborar con Luis, puedo decir que es notable la humildad y generosidad que contagia por su ejemplo.

6. Problemas de frontera libre: problema del obstáculo

Los problemas de frontera libre modelan una amplia gama de fenómenos naturales que surgen en diversas disciplinas como la Física, Biología y Matemática Financiera. La característica distintiva de estos problemas es que el dominio donde se resuelve la EDP depende de la solución. Por lo tanto, su frontera es desconocida o «libre», y es también una incógnita del problema.

Uno de los problemas más clásicos de frontera libre es el problema del obstáculo, cuyo análisis se remonta a los años 70. Matemáticamente, consiste en encontrar una función u que minimiza la energía de Dirichlet,

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2\, dx,$$

tal que $u \geq \varphi$ en D, donde $\varphi \in C^\infty$ es una función dada y D es un domino acotado en $\mathbb{R}^n$. Además, se impone que $u = g$ en la frontera ∂D del dominio. La solución u puede interpretarse como la posición de equilibrio de una membrana elástica cuya frontera se mantiene fija y está forzada a situarse por encima de un obstáculo dado φ.

Nótese que el dominio D se divide en dos regiones: en la región en la que la membrana está por encima del obstáculo, $\Omega = \{u > \varphi\}$, la solución u es una función armónica, mientras que en la otra región, $\Lambda = \{u = \varphi\}$, la membrana coincide con el obstáculo. También sabemos que u es superarmónica en D. La superficie que separa estos dos conjuntos es la frontera libre (véase la figura 2).

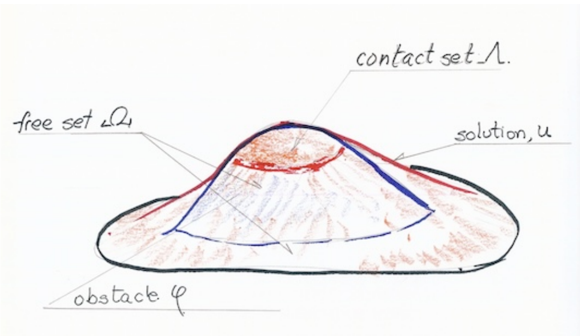

Figura 2: Dibujo de Luis Caffarelli sobre el problema del obstáculo.

Otro problema relacionado consiste en minimizar la energía $\mathcal{E}(u)$ cuando el dominio $D \subseteq B_1 \cap \{x_n = 0\}$ y la condición $u \geq \varphi$ solo se pide en $D \cap \{x_n = 0\}$. Este modelo se conoce como el problema del obstáculo «fino», propuesto por Signorini (1959) en conexión a la elasticidad lineal, y surge en varios contextos como en el estudio de membranas semipermeables o de transferencia del calor.

La existencia y unicidad de soluciones de ambos problemas se deduce fácilmente usando herramientas del Cálculo de Variaciones, pues el funcional $\mathcal{E}(u)$ es estrictamente convexo y el conjunto de funciones admisibles,

$$\{u \in H^1(D) : u \geq \varphi,\ u|_{\partial D} = g\},$$

es convexo y cerrado en el espacio de Hilbert, $H^1(D)$. También se puede probar que la solución es $C^{1,1}$, es decir, las segundas derivadas están acotadas, pero no son necesariamente continuas. Ésta es la regularidad óptima, ya que el laplaciano de la solución salta de 0 a $\Delta\varphi$ cuando atraviesa la superficie de separación. Para el lector interesado en aprender más sobre este tema, destacamos la monografía [40].

Una vez establecidas la existencia, unicidad y regularidad óptima de la solución, la siguiente pregunta natural es investigar las propiedades analíticas y geométricas del conjunto de contacto, en particular, ¿es un conjunto suave o tiene singularidades? Luis es el gran pionero en desarrollar esta teoría, introduciendo ideas fascinantes y métodos innovadores para abordar este problema. Por ejemplo, destacamos el uso de argumentos de *blow-up* para analizar el comportamiento local de la soluciones en la frontera libre y entender mejor su estructura.

A continuación, Xavier Ros-Oton, describe su colaboración con Luis y Joaquim Serra relacionada con el problema del obstáculo.

6.1. Colaboración con Xavier Ros-Oton y Joaquim Serra

Mi colaboración con Luis fue durante mi etapa postdoctoral en UT Austin, de 2014 a 2017. Fue en ese período cuando empecé a interesarme y trabajar en problemas de frontera libre, especialmente en problemas del obstáculo. Luis ha sido la figura mundial de referencia en este tipo de problemas desde 1977, cuando demostró por primera vez que las fronteras libres en el problema del obstáculo son C^∞ fuera de un cierto conjunto de puntos singulares. Este trabajo, [6], publicado en *Acta Mathematica*, fue su primera gran contribución en el campo de las EDP, y abrió un nuevo campo de investigación que él mismo impulsó a lo largo de los años, y que continúa muy activo.

Motivados por problemas de probabilidad y matemática financiera [39], así como por modelos de sistemas de interacción de partículas en física y biología [38], durante el siglo XXI se han dedicado esfuerzos considerables a entender mejor el problema del obstáculo para operadores no locales elípticos L. En el caso particular $L = \sqrt{-\Delta}$, dicho problema es equivalente al problema del obstáculo fino (de codimensión 1), para el cual Luis Caffarelli había hecho varias contribuciones importantes [7, 4].

El siguiente paso en esta dirección fue entender el caso del laplaciano fraccionario $L = (-\Delta)^s$ para todo $s \in (0, 1)$, estudiado por Caffarelli, Salsa y Silvestre en [25]. En dicho trabajo, demostraron la regularidad óptima de las soluciones, así como la regularidad de las fronteras libres fuera de un conjunto de puntos singulares. Pese a estos avances, el caso de operadores no locales generales siguió abierto, ya que las técnicas de [25] eran específicas del caso $(-\Delta)^s$, en el que hay fórmulas de monotonicidad de tipo Almgren que son cruciales en la demostración. En colaboración con Luis y Joaquim Serra resolvimos finalmente este caso en el trabajo [24], donde extendimos los resultados de [25] a un contexto más general y con técnicas distintas, no basadas en fórmulas de monotonicidad.

7. La ecuación de Monge-Ampère y el transporte óptimo

La ecuación de Monge-Ampère, propuesta inicialmente por los matemáticos franceses Gaspard Monge en 1784 y André-Marie Ampère en 1820, ha captado considerable atención en las últimas décadas. Este interés está motivado por sus diversas aplicaciones en campos como el Análisis y la Geometría, destacándose, por ejemplo, el problema de construir superficies con curvatura gaussiana prescrita y el problema de transporte óptimo (véase la sección 7.1).

Su formulación clásica consiste en encontrar una función convexa u tal que

$$\det(D^2u) = f, \tag{6}$$

donde f es una función positiva dada. Observamos que (6) prescribe el producto de los valores propios de la matriz hessiana de u, a diferencia de la ecuación elíptica por excelencia, $\Delta u = f$, que prescribe su suma. En particular, la ecuación de Monge-Ampère es completamente no lineal (véase la sección 4) y degenerada, debido a que los valores propios de D^2u podrían ser arbitrariamente pequeños. Estas propiedades hacen que su análisis sea más complejo.

En 1990, Luis desarrolló la teoría de regularidad de las soluciones de esta ecuación en dos artículos de gran relevancia científica [9, 10], donde demostró que los ejemplos explícitamente conocidos de soluciones singulares son los únicos. Posteriormente, Luis trabajó junto con sus colaboradores en el problema de transporte óptimo, como expone Mar González en la próxima sección. Seguidamente, en las secciones 7.2 y 7.3, Fernando Charro y María Soria-Carro describen sus respectivas colaboraciones con Luis sobre versiones no locales del operador de Monge-Ampère y relacionados.

7.1. Colaboración con Mar González

Coincidí con Luis durante mi postdoc en UT Austin, durante los años 2005–2007. Esos años de postdoc con Luis marcaron para siempre mi carrera y mi forma de pensar. De hecho, su intuición matemática siempre nos impresionaba a los que estábamos alrededor: la demostración de una estimación extremadamente delicada muchas veces se reducía a comprender la geometría intrínseca de la ecuación haciendo unos dibujos en la pizarra (las famosas «parábolas de Caffarelli»).

Con Luis aprendí el problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich, tema que ha tenido un gran desarrollo durante las últimas décadas. Para el lector interesado en profundizar en este problema desde un punto de vista más analítico destacamos las monografías de C. Villani [54], L. Ambrosio [1] y A. Figalli [42]. Adicionalmente, el transporte óptimo proporciona excelentes herramientas para tratar múltiples cuestiones aplicadas, como procesado de imágenes o aprendizaje automático (citamos, por ejemplo, el *survey* clásico [46]).

Originalmente propuesto por G. Monge en 1781, el problema concreto es el siguiente: se intenta transportar la masa de un dominio a otro, de una manera óptima, por ejemplo, minimizando un coste (la distancia u otra métrica), véase la figura 3. Más precisamente, sean Ω_0 y Ω_1 dos dominios acotados de $\mathbb{R}^n$, y sean μ_0 y μ_1 dos distribuciones (positivas) en Ω_0 y Ω_1, respectivamente, con la misma masa. Dada una función de coste $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el objetivo es encontrar un funcional de transporte admisible $T : \Omega_0 \to \Omega_1$ que minimiza el coste total dado por

$$\int_{\Omega_0} c(x - T(x))\, d\mu_0.$$

Se dice que un transporte es admisible si preserva medida, es decir, $T_{\#}\mu_0 = \mu_1$.

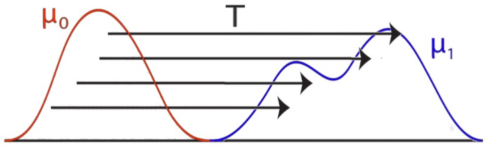

Figura 3: Representación esquemática del transporte óptimo (© Nicolas Papadakis).

Las dos ramificaciones clásicas de este problema se deben a Kantorovich en 1942 (traducido en [45]), de la que no hablaremos aquí, y Brenier en 1987 (desarrollado posteriormente en [5]). En el artículo [11] Luis retomó el trabajo de Brenier y lo situó en un contexto de EDP. Contemporáneamente, Gangbo y McCann [43] publicaban resultados con este mismo espíritu y, por ello, estos dos artículos se consideran la base de la formulación del problema del transporte óptimo en EDP. En particular, dadas dos medidas $\mu_0 = f(x)\, dx$ y $\mu_1 = g(y)\, dy$, la solución del problema de transporte existe en casi todo punto para un coste c convexo, y viene dada en términos de un potencial $u \in C(\Omega)$ que satisface una ecuación de tipo Monge-Ampère

$$g(x - \nabla c^*(-\nabla u)) \det\big(I + D^2 c^*(-\nabla u) D^2 u\big) = f(x),$$

donde c^* es esencialmente la transformada de Legendre de c. Notamos aquí que ésta es una ecuación completamente no lineal (ya que contiene el determinante del hessiano de u, entre otros términos), y que necesita ideas nuevas para su análisis. Es aquí precisamente donde vuelve a destacar la genialidad de Luis: uno de sus trabajos más profundos [9] demuestra regularidad para las segundas derivadas de la solución u, en particular, estimaciones a priori $W^{2,p}$ y $C^{2,\alpha}$, cuando el coste es cuadrático $c_2(z) = \frac{1}{2}|z|^2$. La idea de la demostración es fuertemente geométrica y no puede entenderse sin «las parábolas de Caffarelli».

La siguiente pregunta natural es si se pueden generalizar dichas estimaciones para costes c convexos más generales. En el artículo [47], Ma, Trudinger y Wang dan una condición (denominada (A3)) necesaria y suficiente sobre c para la existencia de estimaciones globales. Sin embargo, la teoría de regularidad para costes que no satisfacen la condición (A3) se encuentra lejos de ser exhaustiva y, por ejemplo, el coste $c_p(z) = \frac{1}{p}|z|^p$ queda fuera de esta condición. En mi trabajo [20], conjunto con Luis y T. Nguyen, demostramos estimaciones a priori $C^{1,\alpha}$ para costes c_p en los casos en que el problema se puede entender como una perturbación del caso cuadrático, por ejemplo si $p \to 2$ o si los dominios Ω_0 y Ω_1 están suficientemente lejos. La geometría del problema perturbado es tan fuerte que todavía se puede demostrar regularidad lejos del borde del dominio.

7.2. Colaboración con Fernando Charro

Trabajé con Luis Caffarelli durante mi postdoctorado en la Universidad de Texas en Austin, del 2010 al 2014. Llegué a Austin con una beca postdoctoral *Fulbright*, que entonces se concedía en colaboración con el Ministerio de Educación tras un largo proceso de selección. Aprender de Luis fue una oportunidad única a nivel matemático y personal. Luis e Irene siempre se preocuparon de que todos los visitantes internacionales nos sintiéramos acogidos. Por ejemplo, recuerdo con afecto cenar en su casa en Acción de Gracias con el resto de colegas y estudiantes de su grupo.

Dadas las muchas aplicaciones del operador de Monge-Ampère, $\det(D^2u)$, en geometría y análisis (por ejemplo, en la curvatura gaussiana, la geometría afín y el transporte óptimo, véase [41, 44]), la falta de una contrapartida no local era una cuestión importante en el campo de las EDP no locales que Luis y yo contribuimos a responder con nuestro artículo [16], publicado en *Annals of PDE*.

Nuestra definición de operador de Monge-Ampère no local está motivada por el hecho de que, para una función convexa u,

$$n \det(D^2u)^{1/n} = \inf_{\det A=1} \operatorname{traza}(A^t D^2 u\, A),$$

lo cual puede verse como una versión matricial de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Por lo tanto, resulta natural definir un operador Monge-Ampère no local como una envolvente cóncava de operadores lineales fraccionarios «en forma de traza», es decir,

$$\mathcal{D}_s u(x) := (1-s) \inf_{\det A=1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x+y)+u(x-y)-2u(x)}{|A^{-1}y|^{n+2s}}\, dy,$$

donde $0 < s < 1$ es el orden de la ecuación. Nótese que el operador así definido es degenerado porque la condición $\det(A) = 1$ permite que la matriz A tenga valores propios arbitrariamente pequeños; esto es evidente en dimensión 2, donde los dos valores propios de la matriz deben ser necesariamente recíprocos para mantener el determinante igual a 1.

En nuestra estimación clave, mostramos condiciones bajo las cuales el operador $\mathcal{D}_s u$ es uniformemente elíptico, lo que nos permite aplicar resultados de regularidad para operadores uniformemente elípticos no locales, como las estimaciones de Evans-Krylov probadas por Caffarelli-Silvestre. Además, el operador de Monge-Ampère no local converge al Monge-Ampère clásico a medida que $s \to 1$, es decir, a medida que el orden de la ecuación no local se aproxima al caso local.

7.3. Colaboración con María Soria-Carro

Tuve el gran honor de que Luis fuera mi director de tesis en UT Austin de 2016 a 2022. Me gustaría destacar su dedicación y paciencia durante mis años de doctorado, siendo una persona increíblemente positiva, incluso ante un razonamiento erróneo por mi parte. Siempre recordaré cómo al día siguiente de darme un problema complicado, se acercaba a mi despacho, que estaba frente al suyo, y me decía bromeando:

«¿María, ya está todo resuelto?». Realmente, su apoyo constante ha hecho de la experiencia de trabajar bajo su dirección un verdadero privilegio.

Gran parte de mi investigación se enfocó en el estudio de los problemas de transmisión, propuestos inicialmente por Picone (1954) en el estudio de materiales elásticos y generalizados por Schechter (1960). Estos modelos describen fenómenos en los cuales una magnitud física cambia completamente su comportamiento al atravesar una superficie o «interfaz» que separa dos medios. Por ejemplo, esto sucede cuando la luz cambia de dirección, al viajar del aire al agua. El objetivo principal es describir el comportamiento de las soluciones cerca de la interfaz, donde se producen saltos de discontinuidad, debido a las interacciones en esta frontera común.

Durante mis primeros años en Austin, Luis me propuso estudiar problemas de transmisión con interfaces «poco regulares». En mi primer trabajo, [29], en colaboración con Luis y Pablo Stinga, codirector de mi tesis, consideramos un problema de transmisión elíptico, que se reducía a estudiar la ecuación distribucional

$$\Delta u = g\, dH^{n-1}|_{\Gamma},$$

donde g es una función dada, Γ es la superficie de transmisión y H^{n-1} es la medida de Hausdorff. Nuestra contribución principal consistió en demostrar la regularidad óptima de las soluciones hasta la interfaz, suponiendo que Γ es $C^{1,\alpha}$. Esta hipótesis de regularidad mínima planteaba algunas dificultades. Por ejemplo, no permitía aplanar la frontera y usar técnicas de reflexión, como en la teoría clásica de Schauder. Para abordar este problema, aprendí el extraordinario método de perturbación *caffarelliano*, fundamentado en argumentos geométricos. Este método consistía en aproximar la solución u por soluciones a problemas «buenos» y transferir la regularidad de las soluciones buenas a u, mediante un argumento de tipo *blow-up*. Inspirados por este trabajo, Pablo y yo estudiamos problemas similares de transmisión para ecuaciones completamente no lineales [51].

Mi segundo trabajo con Luis, [28], empezó durante la pandemia. Unos semestres antes, él había impartido un curso de procesos de difusión no locales, en el que introdujo el laplaciano fraccionario y otros operadores integro-diferenciales, y me resultó muy interesante. Junto con Luis Silvestre, exalumno y gran colaborador suyo, tiene varias publicaciones sobre regularidad y propiedades de este tipo de operadores. Destaco el «problema de la extensión» para el laplaciano fraccionario [26], su artículo más citado con ¡más de 1700 citas! Nuestro problema está motivado por un trabajo con Silvestre en el que propusieron otra versión no local del operador de Monge-Ampère. Tenía como objetivo definir y analizar una nueva familia de operadores, que interpolaran el laplaciano fraccionario con el operador de Monge-Ampère no local. La idea de la construcción es similar a la que ha presentado Fernando Charro en la sección anterior, donde, en vez de considerar transformaciones afines del núcleo del laplaciano fraccionario, $|y|^{-n-2s}$, consideramos transformaciones más generales, motivadas por ciertas consideraciones geométricas.

8. Comentarios finales

Espero que este artículo demuestre una vez más la enorme importancia que ha tenido la figura de Luis Caffarelli en el avance de la matemática española, así como la generosidad y humildad que lo caracterizan. Me siento tremendamente afortunada de formar parte de este gran equipo humano y de poder rendir este homenaje conjunto a una grandísima persona.

¡Enhorabuena y mil gracias, Luis!

Luis Caffarelli recibe el Premio Abel de manos del Rey Harald V de Noruega (© Alf Simensen-NTB/The Abel Prize).

Referencias

[1] L. Ambrosio, E. Brué y D. Semola, *Lectures on optimal transport*, Unitext **130**, La Mat. per il 3+2, Springer, Cham, 2021.

[2] D. Arcoya, J. García Azorero, A. Primo y F. Soria, Estelas en el mar: recordando a Ireneo Peral, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **24** (2021), no. 3, 459–483.

[3] D. G. Aronson, L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, Interfaces with a corner point in one-dimensional porous medium flow, *Comm. Pure Appl. Math.* **38** (1985), no. 4, 375–404.

[4] I. Athanasopoulos, L. A. Caffarelli y S. Salsa, The structure of the free boundary for lower dimensional obstacle problems, *Amer. J. Math.* **130** (2008), 485–498.

[5] Y. Brenier, Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), no. 4, 375–417.

[6] L. A. Caffarelli, The regularity of free boundaries in higher dimensions, *Acta Math.* **139** (1977), 155–184.

[7] L. A. CAFFARELLI, Further regularity for the Signorini problem, *Comm. Partial Differential Equations* **4** (1979), no. 9, 1067–1075.

[8] L. A. CAFFARELLI, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. of Math. (2)* **130** (1989), no. 1, 189–213.

[9] L. A. CAFFARELLI, Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampère equation, *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 1, 135–150.

[10] L. A. CAFFARELLI, A localization property of viscosity solutions to the Monge-Ampère equation and their strict convexity, *Ann. of Math. (2)* **131** (1990), no. 1, 129–134.

[11] L. A. CAFFARELLI, Allocation maps with general cost functions, *Partial differential equations and applications*, 29–35. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **177**, Dekker, New York, 1996.

[12] L. A. CAFFARELLI, The homogenization of surfaces and boundaries, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **44** (2013), no. 4, 755–775.

[13] L. A. CAFFARELLI Y X. CABRÉ, *Fully nonlinear elliptic equations*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **43**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[14] L. A. CAFFARELLI Y X. CABRÉ, Regularity for viscosity solutions of fully nonlinear equations $F(D^2u) = 0$, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **6** (1995), no. 1, 31–48.

[15] L. A. CAFFARELLI Y X. CABRÉ, Interior $C^{2,\alpha}$ regularity theory for a class of nonconvex fully nonlinear elliptic equations, *J. Math. Pures Appl. (9)* **82** (2003), no. 5, 573–612.

[16] L. A. CAFFARELLI Y F. CHARRO, On a fractional Monge-Ampère operator, *Ann. PDE* **1** (2015), no. 1, Art. 4, 47 pp.

[17] L. A. CAFFARELLI Y A. CÓRDOBA, An elementary regularity theory of minimal surfaces, *Differential Integral Equations* **6** (1993), no. 1, 1–13.

[18] L. A. CAFFARELLI Y A. CÓRDOBA, Uniform convergence of a singular perturbation problem, *Comm. Pure Appl. Math.* **48** (1995), no. 1, 1–12.

[19] L. A. CAFFARELLI Y A. CÓRDOBA, Phase transitions: uniform regularity of the intermediate layers, *J. Reine Angew. Math.* **593** (2006), 209–235.

[20] L. CAFFARELLI, M. GONZÁLEZ Y T. NGUYEN, A perturbation argument for a Monge-Ampère type equation arising in optimal transportation, *Arch. Rat. Mech. Anal.* **212** (2014), no. 2, 359–414.

[21] L. A. CAFFARELLI Y R. DE LA LLAVE, Planelike minimizers in periodic media, *Comm. Pure Appl. Math.* **54** (2001), no. 12, 1403–1441.

[22] L. A. CAFFARELLI Y R. DE LA LLAVE, Interfaces of ground states in Ising models with periodic coefficients, *J. Stat. Phys.* **118** (2005), no. 3-4, 687–719.

[23] L. A. CAFFARELLI Y I. PERAL, On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form, *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (1998), no. 1, 1–21.

[24] L. CAFFARELLI, X. ROS-OTON Y J. SERRA, Obstacle problems for integro-differential operators: regularity of solutions and free boundaries, *Invent. Math.* **208** (2017), no. 3, 1155–1211.

[25] L. Caffarelli, S. Salsa y L. Silvestre, Regularity estimates for the solution and the free boundary of the obstacle problem for the fractional Laplacian, *Invent. Math.* **171** (2008), no. 2, 425–461.

[26] L. Caffarelli y L. Silvestre, An extension problem related to the fractional Laplacian, *Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260.

[27] L. A. Caffarelli, F. Soria y J. L. Vázquez, Regularity of solutions of the fractional porous medium flow, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **15** (2013), no. 5, 1701–1746.

[28] L. A. Caffarelli y M. Soria-Carro, On a family of fully nonlinear integro-differential operators: From fractional Laplacian to nonlocal Monge-Ampère, *Anal. PDE*, en prensa, 2024.

[29] L. A. Caffarelli, M. Soria-Carro y P. R. Stinga, Regularity for $C^{1,\alpha}$ interface transmission problems, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **240** (2021), no. 1, 265–294.

[30] L. A. Caffarelli y A. F. Vasseur, The De Giorgi method for regularity of solutions of elliptic equations and its applications to fluid dynamics, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **3**, no. 3, 409–427.

[31] L. A. Caffarelli y A. F. Vasseur, Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation, *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 3, 1903–1930.

[32] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, A free-boundary problem for the heat equation arising in flame propagation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), no. 2, 411–441.

[33] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, Viscosity solutions for the porous medium equation, *Proc. Sympos. Pure Math.* **65**, 13–26, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[34] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, Nonlinear porous medium flow with fractional potential pressure, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **202** (2011), no. 2, 537–565.

[35] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, Asymptotic behaviour of a porous medium equation with fractional diffusion, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **29** (2011), no. 4, 1393–1404.

[36] L. A. Caffarelli y J. L. Vázquez, Regularity of solutions of the fractional porous medium flow with exponent 1/2, *Algebra i Analiz* **27** (2015), no. 3, 125–156; traducción en *St. Petersburg Math. J.* **27** (2016), no. 3, 437–460.

[37] L. A. Caffarelli, J. L. Vázquez y N. I. Wolanski, Lipschitz continuity of solutions and interfaces of the N-dimensional porous medium equation, *Indiana Univ. Math. J.* **36** (1987), no. 2, 373–401.

[38] J. A. Carrillo, M. G. Delgadino y A. Mellet, Regularity of local minimizers of the interaction energy via obstacle problems, *Comm. Math. Phys.* **343** (2016), no. 3, 747–781.

[39] R. Cont y P. Tankov, *Financial modelling with jump processes*, Financ. Math. Ser., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.

[40] X. Fernández-Real y X. Ros-Oton, *Regularity theory for elliptic PDE*, Zur. Lect. Adv. Math. **28**, EMS Press, Berlin, 2022.

[41] A. Figalli, *The Monge-Ampère equation and its applications*, Zur. Lect. Adv. Math., European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017.

[42] A. Figalli y F. Glaudo, *An invitation to optimal transport, Wasserstein distances, and gradient flows*, 2.ª edición, EMS Textbooks Math., EMS Press, Berlin, 2023.

[43] W. Gangbo y R. J. McCann, Optimal maps in Monge's mass transport problem, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **321** (1995), no. 12, 1653–1658.

[44] C. E. Gutiérrez, *The Monge-Ampère equation*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **44**, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.

[45] L. Kantorovitch, On the translocation of masses, *Management Sci.* **5** (1958), 1–4.

[46] S. Kolouri, S. R. Park, M. Thorpe, D. Slepcev y G. K. Rohde, Optimal Mass Transport: Signal processing and machine-learning applications, *IEEE Signal Process. Mag.* **34** (2017), no. 4, 43–59.

[47] X.-N. Ma, N. S. Trudinger y X.-J. Wang, Regularity of potential functions of the optimal transportation problem, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **177** (2005), no. 2, 151–183.

[48] M. V. Otero Espinar y J. L. Vázquez, Luis Caffarelli, Premio Abel de las Matemáticas 2023, `https://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/CaffAbelFundacionAreces.Esp.2oct.pdf`

[49] I. Peral y F. Soria, A note on $W^{1,p}$ estimates for quasilinear parabolic equations, *Proceedings of the 2001 Luminy Conference on Quasilinear Elliptic and Parabolic Equations and System*, 121–131, Electron. J. Differ. Equ. Conf. **8**, Southwest Texas State University, San Marcos, TX, 2002.

[50] O. Savin, Phase transitions, minimal surfaces and a conjecture of De Giorgi, *Current developments in mathematics*, 59–113, International Press, Somerville, MA, 2010.

[51] M. Soria-Carro y P. R. Stinga, Regularity of viscosity solutions to fully nonlinear elliptic transmission problems, *Adv. Math.* **435** (2023), Art. 109353, 52 pp.

[52] J. L. Vázquez, The mathematical theories of diffusion: nonlinear and fractional diffusion, *Nonlocal and nonlinear diffusions and interactions: new methods and directions*, 205–278, Lecture Notes in Math. **2186**, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Cham, 2017.

[53] J. L. Vázquez, Entrevista a Luis Caffarelli, Steele Prize de la American Mathematical Society 2009, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **12** (2009), no. 3, 449–455.

[54] C. Villani, *Optimal transport*, Grundlehren Math. Wiss. **338**, Fundamental Principles of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

María Soria-Carro, Dpto. de Matemáticas, Rutgers University, EE. UU.
Correo electrónico: `maria.soriacarro@rutgers.edu`