
MIRANDO HACIA EL FUTURO

Sección a cargo de

Antonio Viruel

¿Cuántas caras puede tener un poliedro (simplicial)?

por

Francisco Santos

1. INTRODUCCIÓN

1.1. LA PREGUNTA (EL f -VECTOR)

Casi todos los lectores conocerán la famosa fórmula de Euler $v - a + c = 2$, válida para los números de vértices, aristas y caras de cualquier poliedro (convexo) [6].

En una carta a Goldbach, Euler dijo sobre ella: «*Me asombra que estas propiedades generales de la estereotomía no hayan sido observadas antes por nadie*». Y es que, en efecto, sorprende que esta fórmula se encontrase tan tarde en la historia de las matemáticas, habida cuenta de que los poliedros se encuentran entre los objetos geométricos de más antiguo estudio. Por ejemplo, los cinco poliedros regulares se tratan con detalle en el último libro de los *Elementos* de Euclides y son, en cierto modo, la meta a la que los *Elementos* se encaminan. Juegan también un papel fundamental en la filosofía y la cosmografía de Platón, quien, en el *Timeo*, siguiendo a los pitagóricos, asocia cuatro de ellos con los cuatro elementos de la naturaleza (tierra, agua, fuego y aire) y reserva el quinto —el dodecaedro, el más «redondo»— como el constituyente de los astros. Por esta razón a los poliedros regulares los llamamos también *sólidos platónicos*. Pero su estudio y descubrimiento es mucho más antiguo; en Escocia se han encontrado bolas neolíticas talladas con estructura de poliedros regulares, fechadas hacia el 2000 a.C.

En dimensión superior en vez de poliedro usamos la palabra *politopo*, acuñada hacia 1880 por Alicia Boole Stott. Un d -politopo¹ tiene caras de dimensiones 0, 1, 2, etc. hasta $d - 1$ y, siguiendo a Euler, nos preguntamos:

¹En las siguientes secciones definiremos con más precisión los conceptos que se mencionan en esta introducción. De momento digamos solo que, para nosotros, un politopo es necesariamente convexo.

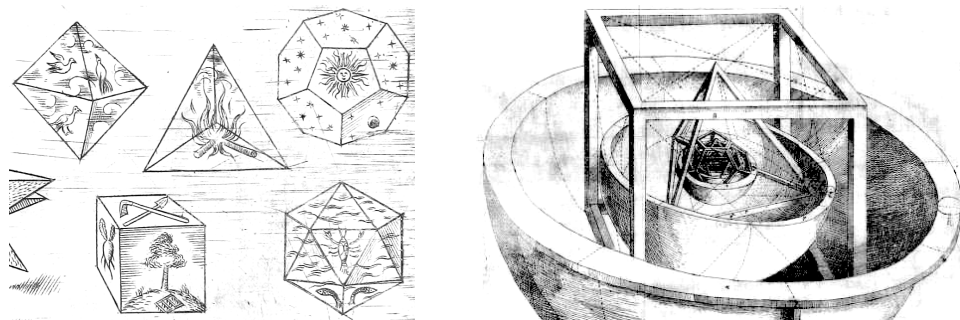


Figura 1: Izquierda: Los cinco sólidos platónicos tal como los dibujó Kepler en su *Harmonices Mundi* (1619), asociados a los cuatro elementos clásicos y al quinto elemento del cual están hechos los astros. Derecha: en *Mysterium Cosmographicum* (1596), Kepler ideó un modelo del sistema solar en el que los seis planetas entonces conocidos se mueven en esferas concéntricas cuyos radios están gobernados por sólidos platónicos circunscritos a una e inscritos en la siguiente. (Fuente: Internet archive).

PREGUNTA 1. Sea $f = (f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$. ¿Qué igualdades o desigualdades caracterizan completamente que f sea el vector de caras de algún d -politopo?

Para los poliedros de dimensión tres, donde $(f_0, f_1, f_2) = (v, a, c)$, conocemos la respuesta. El Teorema de Steinitz (1906) que demostraremos en la Sección 2 dice que, además de la fórmula de Euler, es necesario y suficiente que

$$c \leq 2v - 4 \quad \text{y} \quad v \leq 2c - 4.$$

Para politopos de dimensión 4 *no sabemos la respuesta completa*,² pero sí sabemos algunas cosas. Una de las más notables es el llamado *Teorema-g*, que nos da la respuesta completa *en dimensión arbitraria* si nos restringimos al caso de *politopos simpliciales*, o sea, aquellos cuyas caras son todas simples.³ Y lo sorprendente es que esta respuesta, no solo en su demostración sino también en su formulación, es eminentemente algebraica. El objetivo de este artículo es introducir las herramientas necesarias para enunciar y entender la caracterización, y dar algunas ideas de su demostración y su historia.

1.2. EL PROTAGONISTA (EL h -VECTOR)

Es muy conveniente aplicar un «cambio de coordenadas» al f -vector, traduciéndolo a otro vector que llamamos el h -vector. Para definirlo añadamos un $f_{-1} = 1$ al f -vector, que se interpreta entendiendo el conjunto vacío como (la única) cara de dimensión -1 de cualquier politopo. Con este convenio:

²Véase en [31] un *review* sobre la cuestión en el centenario del Teorema de Steinitz.

³El análogo en dimensión superior de triángulos en dimensión 2 o tetraedros en dimensión 3.

DEFINICIÓN 2. Dado un (posible) f -vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ de un d -politopo simplicial, definimos su correspondiente h -vector $h = (h_0, \dots, h_d)$ como

$$h_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{d-k}{d-i} f_{k-1}, \quad i = 0, \dots, d. \tag{1}$$

La transformación $f \mapsto h$ no es más que una aplicación lineal $\mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ (restringida a ciertos vectores enteros) y su matriz es triangular inferior con unos en la diagonal. Por tanto la podemos invertir y recuperar el f -vector a partir de un (posible) h -vector. No daremos los detalles del cálculo pero el resultado es⁴

$$f_{i-1} = \sum_{k=0}^i \binom{d-k}{d-i} h_k. \tag{2}$$

Por ejemplo, para $d = 3$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_{-1} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

En la Sección 3.2 interpretaremos este cambio de base en términos de «particiones» y «descascaramientos» del complejo de caras, pero de momento animamos al lector a calcular el h -vector de un tetraedro, octaedro, e icosaedro, usando la fórmula matricial. Descubrirá que el resultado es $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 3, 3, 1)$ y $(1, 9, 9, 1)$ respectivamente. Se observa que es un vector positivo (lo cual no es obvio a partir de su definición) y simétrico. Esto último nos dice que el h -vector codifica la información contenida en el f -vector de manera más «compacta», puesto que conociendo su primera mitad podemos recuperar la segunda.

El complejo de caras (propias) de un d -politopo simplicial es el ejemplo prototípico de un *complejo simplicial* de dimensión $d - 1$: un conjunto de símlices de dimensiones $d - 1$ o menor y «bien pegados entre sí». Además es *puro*, es decir, todos los símlices maximales tienen la misma dimensión. La definición de h -vector se extiende a este contexto, y el estudio de h -vectores de complejos simpliciales puros es la base de las herramientas algebraicas que aparecen en el Teorema- g . Nuestro objetivo es explicar estas herramientas y demostrar las tres propiedades siguientes. Definiremos los conceptos que aparecen en ellas a lo largo del artículo, aunque a veces restringidos al caso que nos interesa.

⁴Una manera conveniente de demostrar, así como de recordar, las fórmulas que relacionan el f -vector y el h -vector es como sigue. Consideremos los vectores como coeficientes de sendos polinomios mónicos de grado d , que seguimos denotando f y h , en una variable x . Es decir:

$$f(x) = f_{-1}x^d + f_0x^{d-1} + \dots + f_{d-2}x + f_{d-1}, \quad h(x) = h_0x^d + h_1x^{d-1} + \dots + h_{d-1}x + h_d.$$

Escritos así, las fórmulas (2) y (1) son equivalentes a

$$f(x) = h(x + 1), \quad h(x) = f(x - 1).$$

TEOREMA 3. Sea K un complejo simplicial puro de dimensión $d-1$ y con n vértices. Sea $h = (h_0, \dots, h_d)$ su h -vector.

1. Si K es una esfera topológica su h -vector es simétrico: $h_k = h_{d-k}$ para todo k .
2. Existe un ideal monomial⁵ $I_K \subset \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, donde $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$, cuya álgebra $A_K := \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_K$ tiene como serie de Hilbert el siguiente cociente de polinomios:

$$\frac{h_0 + h_1 t + \dots + h_d t^d}{(1-t)^d}.$$

3. Si K es descascarable⁶ y \mathbb{K} es infinito, entonces en A_K existe un conjunto $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ de elementos de grado uno tales que A_K/Θ es un álgebra finita con sucesión de Hilbert igual a (h_0, \dots, h_d) .

Las igualdades del apartado 1 son las ecuaciones de Dehn-Sommerville y generalizan a la fórmula de Euler. De hecho, la ecuación $h_0 = h_d$ es exactamente la fórmula de Euler-Poincaré para esferas de dimensión arbitraria (véase (3), en la Sección 2.2), y las demás se pueden demostrar recursivamente aplicando dicha fórmula a los *enlaces*⁷ del complejo. La demostración que daremos en la Sección 3.2 es válida solo para politopos⁸ o, más generalmente, para esferas topológicas *descascarables*.

Estas ecuaciones nos dicen que el f -vector de una esfera simplicial (en particular, el de un politopo simplicial) contiene información redundante; consta de d números pero entre ellos hay $\lfloor d/2 \rfloor$ relaciones, de modo que conociendo $\lfloor d/2 \rfloor$ podemos calcular los demás. Esto es bien conocido en dimensión tres: todo 3-politopo con caras triangulares y con n vértices tiene $3n - 6$ aristas y $2n - 4$ triángulos.

Demostraremos el apartado 2 en la Sección 4.2. El ideal y el álgebra en cuestión se llaman de *Stanley-Reisner*, o también el *ideal y el álgebra de caras* de K . Fueron introducidos y estudiados por estos dos autores hacia 1975 [24, 26], y combinando el trabajo de ambos se deduce el *Teorema de la cota superior* para esferas simpliciales.⁹ Stanley demostró que la cota se satisface para todo complejo puro cuya álgebra A_K sea de *Cohen-Macaulay* y Reisner caracterizó los complejos con esta propiedad como aquellos en los que tanto el complejo como todos sus enlaces tienen homología trivial

⁵Aquí \mathbb{K} es un cuerpo arbitrario y $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ el anillo de polinomios en n variables.

⁶Un complejo descascarable es uno que se puede construir de manera iterativa añadiendo los símlices de dimensión d de uno en uno de acuerdo a ciertas reglas (véanse los detalles en la Sección 3.2). «Descascarable» es nuestra traducción de la palabra *shellable* usada en inglés.

⁷El enlace de un vértice es el conjunto de símlices conectados a él; si nuestro complejo tiene dimensión d los enlaces tienen dimensión $d-1$ y son lo que cada vértice «ve». El enlace de una cara de dimensión positiva se puede definir recursivamente.

⁸Que es el contexto en el que las demostró Sommerville (Dehn había previamente demostrado el caso ≤ 5). Klee [11] es quien observó que las ecuaciones valen para todos los *complejos eulerianos*, es decir, aquellos en los que tanto el complejo total como los enlaces tienen la característica de Euler de la esfera de la dimensión que les corresponde.

⁹Dicho teorema establece que toda $(d-1)$ -esfera con n vértices tiene $h_k \leq \binom{n-d-1+k}{k}$, para todo k , con igualdad si y solo si su $(k-1)$ -esqueleto es completo. Para politopos, la cota había sido conjeturada por Motzkin en 1957 [21] y demostrada por McMullen en 1970 [16].

excepto en la dimensión más alta. Dichos complejos se denominan por ello *complejos Cohen-Macaulay* y, obviamente, incluyen a todas las esferas.¹⁰

Para el apartado 3 se suele demostrar que descascarable implica Cohen-Macaulay, y que Cohen-Macaulay implica este enunciado. En la Sección 4.3 procedemos al revés: demostraremos el enunciado partiendo de un descascaramiento y veremos como subproducto que el álgebra A_K de un complejo descascarable es Cohen-Macaulay.

1.3. LA RESPUESTA (M -VECTORES Y g -VECTOR)

El Teorema 3 nos da ya dos condiciones necesarias para que un vector sea f -vector de un politopo, solo que vienen expresadas en términos de su h -vector: hace falta que se cumplan las ecuaciones de Dehn-Sommerville y que el h -vector sea la sucesión de Hilbert de algún *álgebra graduada estándar*; es decir, que sea un M -vector de acuerdo a la siguiente definición:

DEFINICIÓN 4. *Un vector $(m_0, m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{N}^{d+1}$ es un M -vector si cumple las propiedades siguientes, que son equivalentes entre sí:*

1. *Es el «vector de caras de un multicomplejo».* Un multicomplejo es una familia de *multiconjuntos*¹¹ que es cerrada por contenido: si un multiconjunto está, todos sus multisubconjuntos también. El vector de caras de un multicomplejo cuenta cuántos multiconjuntos hay de cada tamaño. Por ejemplo, m_0 siempre es 1, porque el conjunto vacío ha de estar en cualquier multicomplejo.
2. *Es la sucesión de Hilbert del conjunto de monomios estándar de un ideal monomial en $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, donde \mathbb{K} es un cuerpo arbitrario.* Un ideal monomial I es un ideal generado por monomios, y podemos pensar en él como un conjunto «cerrado hacia arriba» de puntos en \mathbb{N}^n .¹² si un punto está, todos los que son mayores o iguales que él coordenada a coordenada también. Los monomios estándar son los que no están en el ideal y, por tanto, son un conjunto «cerrado hacia abajo». Véanse en la Figura 2 un ejemplo de un ideal monomial y su correspondientes monomios estándar, con $n = 2$. Definiremos la sucesión (o función) de Hilbert de un ideal y de un álgebra en la Sección 4, pero en el caso que nos ocupa no es más que la sucesión que cuenta el número de monomios de cada grado.
3. *Es la sucesión de Hilbert de un álgebra graduada estándar,* es decir, un álgebra $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$ obtenida como cociente por algún ideal homogéneo.
4. *Es el h -vector de un complejo simplicial puro y descascarable.*
5. *Es una secuencia cuyos términos satisfacen ciertas desigualdades explícitas (que no detallaremos aquí).*

¹⁰Puesto que es una propiedad homológica, ser Cohen-Macaulay no depende de cómo triangulamos un espacio topológico dado, pero sí depende del cuerpo sobre el que calculemos la homología y el álgebra A_K . Las esferas son Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo pero, por ejemplo, el plano proyectivo real (triangulado arbitrariamente) lo es solo sobre cuerpos de característica distinta de dos.

¹¹Conjuntos en los que admitimos elementos repetidos.

¹²En este escrito tomamos el convenio de que $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, o sea, incluimos el 0.

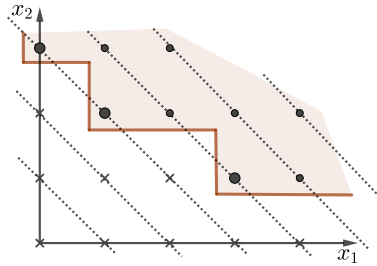


Figura 2: El ideal monomial en dos variables generado por $x_1^3x_2, x_1x_2^2, x_2^3$ (sombreado). Marcamos como ● los monomios del ideal y como × los monomios estándar. El M -vector de estos últimos es $(1, 2, 3, 2, 1, 1, 1, 1, \dots)$.

A excepción de la 4, la equivalencia de estas propiedades la demostró Macaulay [15], en cuyo honor utilizamos la M . La equivalencia $1 \Leftrightarrow 2$ es más o menos obvia, una vez que entendemos que a cada monomio le podemos asociar como multiconjunto las variables que multiplicamos, y viceversa. Por ejemplo, al monomio $x_1^2x_3x_4^5$ asociamos el multiconjunto $\{1, 1, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}$. La propiedad «ser cerrado hacia abajo» para los monomios estándar deviene «ser cerrado por contenido» para los multiconjuntos. La 3 es a priori más general que la 2, pero la construcción de ideales iniciales (por ejemplo a través de bases de Gröbner) nos dice que las sucesiones de Hilbert obtenidas son las mismas. El Teorema 3.2 nos da la implicación $4 \Rightarrow 2$.

Estamos ya en disposición de enunciar el Teorema- g , que responde completamente a la Pregunta 1 para politopos simpliciales:

TEOREMA 5 (Teorema- g). *Un vector $(f_0, \dots, f_{d-1}) \in \mathbb{N}^d$ es el vector de caras de algún d -politopo simplicial si, y solo si, su h -vector (h_0, \dots, h_d) satisface:*

1. *Es simétrico, es decir, $h_i = h_{d-i}$ para todo i (Ecs. de Dehn-Sommerville).*
2. *Su primera mitad es creciente (y por tanto su segunda mitad decreciente):*

$$h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

3. *Su vector de diferencias, es decir, el vector*

$$g = (g_0, g_1, \dots, g_{\lfloor d/2 \rfloor}) := (h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1, \dots, h_{\lfloor d/2 \rfloor} - h_{\lfloor d/2 \rfloor - 1}),$$

es un M -vector.

La propiedad 3 es más fuerte que decir, como se hacía en el Teorema 3.3, que h es un M -vector. En efecto, si g es el M -vector de una cierta álgebra $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$, se puede comprobar que h es el de $\mathbb{K}[\mathbf{x}, y]/I$ (una variable más, mismos generadores).

1.4. HISTORIA DEL TEOREMA- g

Las ecuaciones de Dehn-Sommerville e, implícitamente, la definición del h -vector, se deben a Sommerville (1927) [25]. En 1970, McMullen demostró la cota superior

para f -vectores conjeturada por Motzkin [16, 21] y al año siguiente [17], recopilando lo que se sabía hasta la fecha, conjeturó la caracterización contenida en el teorema. Quizá no estaba muy convencido, porque ese mismo año, en su libro publicado con Shephard [20], dijo que la conjetura era «*even more intriguing* [que la conjetura de la cota superior], *if rather less plausible*». Sin embargo, menos de 10 años después la conjetura era ya un teorema, gracias al esfuerzo combinado de Billera, Lee y Stanley.

Billera y Lee [5] demostraron la suficiencia de las condiciones de McMullen mediante una construcción más o menos explícita y «elemental» (pero sofisticada) basada en modificar de manera ingeniosa los llamados *politopos cíclicos*.¹³

Stanley [27] (véase también [28, Sección III.1]) demostró la necesidad, utilizando para ello las herramientas algebraicas que había desarrollado pocos años antes junto con Reisner (y otros, e.g., Hochster). Su demostración tiene dos puntos esenciales; partiendo del Teorema 3:

1. (Realizar A_K/Θ «geométricamente»): Stanley se dio cuenta de que si K es el complejo de caras de un politopo simplicial P , entonces A_K/Θ (calculada sobre \mathbb{C}) es isomorfa al álgebra de cohomología de la variedad tórica X_P .¹⁴
2. (Existencia de un elemento de Lefschetz): Llamamos *elemento de Lefschetz* del álgebra A_K/Θ a un elemento $l \in (A_K/\Theta)_1$ (o sea, de grado 1) tal que los homomorfismos

$$(A_K/\Theta)_i \xrightarrow{\times l^{d-2i}} (A_K/\Theta)_{d-i}$$

son isomorfismos para todo $i \leq d/2$. Su existencia implica que las aplicaciones individuales «multiplicar por l » son inyectivas hasta grado $d/2$, es decir:

$$(A_K/\Theta)_1 \xleftarrow{\times l} (A_K/\Theta)_1 \xleftarrow{\times l} (A_K/\Theta)_2 \xleftarrow{\times l} \dots \xleftarrow{\times l} (A_K/\Theta)_{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

Esto a su vez lleva a que el álgebra $A_K/\Theta/l$ tiene como sucesión de Hilbert el g -vector.¹⁵ Lo que Stanley demuestra es que (la clase de cohomología de) cualquier sección de X_P por un hiperplano es un elemento de Lefschetz.¹⁶

Hay demostraciones posteriores, con las mismas dos partes que la de Stanley pero cambiando la manera en que se realiza A_K/Θ y se encuentra l :

- McMullen (1993, simplificada en 1996 [18, 19]) realiza A_K/Θ como el *álgebra de pesos* asociada al politopo P^\vee dual de P , en la cual McMullen define las operaciones de «exponencial y logaritmo de un politopo» mediante sus series de Taylor habituales. El elemento de Lefschetz es el «logaritmo de P^\vee ».

¹³Los politopos cíclicos habían sido estudiados por Motzkin y aparecen en su conjetura de la cota superior, porque son politopos en los que la cota se alcanza. Recomendamos [30] como excelente introducción a la teoría de politopos, en particular a los politopos cíclicos.

¹⁴La variedad tórica de un politopo P es una variedad algebraica proyectiva que se puede definir siempre que los vértices de P sean racionales. Esto no es pérdida de generalidad porque perturbar los vértices no cambia la estructura combinatoria de un politopo simplicial.

¹⁵Porque la parte de grado i de $A_K/\Theta/l$ es simplemente el cociente como espacio vectorial de $(A_K/\Theta)_i$ por la imagen de « $\times l$ ».

¹⁶Este hecho es el llamado *Teorema duro de Lefschetz* ya demostrado por Lefschetz [14], solo que en su versión original requería que la variedad fuera no singular. La variedad tórica de un politopo simplicial es en general singular, pero sus singularidades son relativamente sencillas.

- Fleming y Karu (2010 [7]) entienden A_K como el álgebra de funciones *polinómicas por caras*,¹⁷ o sea, funciones $\phi : \partial P \rightarrow \mathbb{R}$ globalmente continuas y con restricción polinómica a cada cara. Toman como Θ el espacio de funciones lineales globales, y demuestran que como elemento de Lefschetz en A_K/Θ funciona cualquier función que sea *lineal por caras* y estrictamente convexa.

1.5. EL TEOREMA- g PARA ESFERAS

McMullen solo conjeturó las condiciones para los f -vectores de polítopos simpliciales, pero es natural preguntarse si se cumplen también para *esferas* simpliciales, o sea, complejos simpliciales homeomorfos a una esfera. La respuesta no es obvia, puesto que sabemos que para $d = 4$ o superior existen $(d - 1)$ -esferas simpliciales que no son combinatoriamente isomorfas a ningún d -polítopo, y que su número crece mucho más rápido que el de polítopos:

TEOREMA 6 (Goodman-Pollack [8], Alon [2], Kalai [9], Nevo-Santos-Wilson [22]). *Denotemos por $s_d(n)$ el número de tipos combinatorios de $(d - 1)$ -esferas simpliciales y por $p_d(n)$ el de las que se pueden realizar como polítopos. Para cada $d \geq 4$ fijo existen constantes C_1 y C_2 tales que, para todo $n > d$,*

$$p_d(n) \leq C_1 n^{\log n}, \quad s_d(n) \geq C_2 n^{\lfloor d/2 \rfloor}.$$

La conjetura de que todas las esferas simpliciales satisfacen las condiciones de McMullen (y de que, por tanto, los f -vectores de $(d - 1)$ -esferas simpliciales son los mismos que los de d -polítopos simpliciales) ha sido llamada «el Santo Grial de la geometría discreta» [10] y tardó en ser demostrada 40 años más que la versión para polítopos. Pero hoy tenemos (al menos) dos demostraciones de ella. Las dos siguen de nuevo los dos pasos mencionados en las anteriores:

- En 2018 Adiprasito sorprende a la comunidad de expertos en el tema con un *preprint* en el que demuestra la Conjetura- g para esferas [1]. En su demostración, como en la de Fleming-Karu, A_K aparece como el álgebra de funciones polinómicas por caras en una realización de K en \mathbb{R}^d , y A_K/Θ es el cociente por las funciones polinómicas globales. Pero no necesita convexidad en la realización¹⁸ ni en la función que se toma como elemento de Lefschetz; basta con que sea lineal por caras (y más o menos genérica).
- Tan solo dos años después, Papadakis y Petrotou anuncian una nueva demostración [23] en la que no se explicita ninguna realización para A_K , y en la que Θ se construye mediante una extensión trascendente del cuerpo base.¹⁹ Pero la principal novedad es que trabajan sobre cuerpos de característica dos, lo

¹⁷Esta interpretación había sido ya hecha por Billera [4] (1985).

¹⁸Ni siquiera inyectividad, cualquier elección suficientemente genérica de posiciones en \mathbb{R}^d para los vértices funciona, incluso si los simplices resultantes tienen intersecciones impropias.

¹⁹Es decir, a partir de un cuerpo base \mathbb{K} consideran una extensión \mathbb{K}' por $d \times n$ elementos trascendentes y algebraicamente independientes, y construyen el anillo A_K/Θ sobre \mathbb{K}' , tomando como Θ funciones lineales que tienen a los elementos de la extensión como coeficientes.

cual hace que muchas expresiones se simplifiquen, y deducen la propiedad de Lefschetz de la *anisotropía* de la siguiente forma cuadrática:²⁰

$$(A_K/\Theta)_{d/2} \times (A_K/\Theta)_{d/2} \longrightarrow (A_K/\Theta)_d \cong \mathbb{K}.$$

2. POLITOPOS Y SUS f -VECTORES

Un subconjunto X de \mathbb{R}^d es *convexo* si, para todo $p, q \in X$, el segmento de recta $[p, q]$ está contenido en X . La envolvente convexa $\text{conv}(S)$ de un $S \subset \mathbb{R}^d$ es el convexo más pequeño que contiene a S , o sea, la intersección de los convexos que contienen a S .

DEFINICIÓN 7. *Un politopo (convexo) es la envolvente convexa en \mathbb{R}^d de algún conjunto finito de puntos.*

Por ejemplo, un politopo de dimensión 1, o 1-politopo, es un segmento; un 2-politopo es un polígono convexo; y un 3-politopo es lo que habitualmente llamamos un *poliedro*: un sólido delimitado por polígonos (convexos) planos.

2.1. POLITOPOS DE DIMENSIÓN 3

Nos interesa sobre todo la *combinatoria* de los politopos. Todos entendemos que un politopo tridimensional está formado por *caras* (polígonos) que comparten sus *aristas* (segmentos) y *vértices* (puntos). Por *estructura combinatoria* de un politopo entendemos los números y tipos de sus caras, aristas y vértices, así como la información de cuáles son adyacentes entre sí, etc. Centrándonos en cuántas caras puede haber de cada dimensión, la primera propiedad no obvia ya mencionada en la Introducción es la fórmula de Euler que afirma que, llamando f_2 , f_1 y f_0 a los números de caras, aristas y vértices de un 3-politopo,

$$f_2 - f_1 + f_0 = 2.$$

En 1906 Steinitz [29] demostró que la fórmula de Euler junto con dos desigualdades sencillas son necesarias y suficientes para caracterizar los vectores de caras de politopos de dimensión 3. Veamos el enunciado y su demostración:

TEOREMA 8 (Steinitz [29], [30, Ejercicio 8.28]). *Tres números naturales $(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{N}^3$ son los números de vértices, aristas y caras de algún 3-politopo si, y solo si, cumplen la fórmula de Euler y las desigualdades*

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f_0 - 4}{f_2 - 4} \leq 2.$$

*Además, en la primera desigualdad se da la igualdad si y solo si todas las caras son triángulos, y en la segunda si y solo si todos los vértices son trivalentes.*²¹

²⁰Suponemos que d es par, pero el caso impar del Teorema- g se sigue fácilmente del par.

²¹Llamamos *valencia* de un vértice al número de aristas que inciden en él. Para 3-politopos esto es lo mismo que el número de caras (de dimensión dos) que contienen al vértice. Trivalente significa, claro está, «de valencia 3». A los 3-politopos que aparecen en la última frase los llamamos *simpliciales* y *simples*, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que todo 3-politopo cumple las desigualdades.

Si sumamos los números de lados de todas las caras, necesariamente obtendremos como resultado dos veces el número de aristas, puesto que cada arista la hemos contado en dos caras. Por otro lado, esa suma ha de ser al menos tres veces el número de caras, porque cada cara tiene al menos tres lados. Por tanto, $3f_2 \leq 2f_1$. Sustituyendo (por Euler) que $2f_1 = 2f_0 + 2f_2 - 4$, se tiene:

$$3f_2 \leq 2f_1 \Rightarrow 3f_2 \leq 2f_0 + 2f_2 - 4 \Rightarrow f_2 - 4 \leq 2f_0 - 8 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{f_0 - 4}{f_2 - 4}.$$

Además, la desigualdad se convierte en igualdad si (y solo si) $3f_2 = 2f_1$, lo cual pasa si (y solo si), en la suma de lados de las caras, todas las caras tienen tres lados.

Del mismo modo, como cada arista tiene dos vértices y cada vértice está en al menos tres aristas, tenemos que $3f_0 \leq 2f_1$ y, juntando esto de nuevo con la fórmula de Euler, llegamos a $\frac{f_0 - 4}{f_2 - 4} \leq 2$, con igualdad si y solo si todo vértice es trivalente.

Para ver el recíproco, si nos dan tres números $(f_0, f_1, f_2) \in \mathbb{N}$ que satisfacen las condiciones, lo primero que observamos es que podemos olvidarnos de f_1 . Si encontramos un politopo con f_0 vértices y f_2 caras, la fórmula de Euler nos garantiza que su número de aristas es el correcto. Vamos a representar en el plano los puntos enteros (f_0, f_2) que satisfacen las desigualdades del enunciado. Las desigualdades definen sendos semiplanos delimitados por las rectas de pendiente $1/2$ y 2 que pasan por el punto $(4, 4)$, así que el resultado son los puntos de la Figura 3.

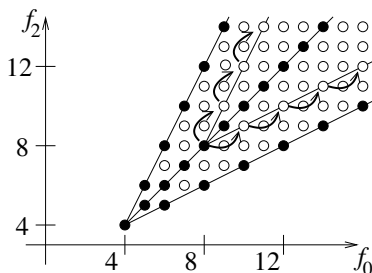


Figura 3: Los posibles pares (f_0, f_2) de un 3-politopo. Los puntos negros de la diagonal corresponden a las pirámides. A partir de ellas se pueden obtener todos los demás con «saltos de caballo». En la figura están marcados los saltos que parten de $f_0 = f_2 = 8$, que corresponde a la pirámide sobre un heptágono. Los puntos del borde son los 3-politopos simples (borde inferior) y simpliciales (borde superior).

El punto $(4, 4)$, viene realizado por el tetraedro que, en efecto, tiene 4 vértices y 4 caras. Más generalmente, los puntos (n, n) con $n \geq 4$ vienen realizados por la pirámide con base de $n - 1$ lados, que tiene n vértices ($n - 1$ en la base más el ápice) y n caras (la base más $n - 1$ triángulos que la unen al ápice). Para «realizar» el resto de los puntos usaremos las dos operaciones siguientes, ilustradas en la Figura 4:

- Si un politopo tiene algún vértice de valencia 3, *cortando ese vértice* mediante un plano muy cercano a él aumentamos en 1 el número de caras (aparece un triángulo) y en 2 el número de vértices (aparecen 3 vértices, quitamos uno).

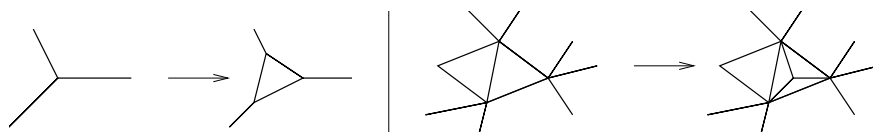


Figura 4: Las dos operaciones usadas para incrementar (f_0, f_2) en el Teorema de Steinitz. A la izquierda cortamos un vértice trivalente (aumentando en $(2, 1)$), y a la derecha levantamos una pirámide triangular (aumentando en $(1, 2)$).

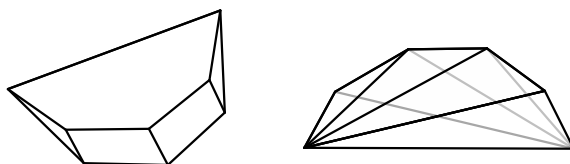


Figura 5: Izquierda: un 3-politopo con $(f_0, f_1, f_2) = (8, 12, 6)$, igual que el cubo, pero que no tiene la combinatoria de un cubo (tiene caras de 3, 4 y 5 lados; el cubo solo de cuatro). Derecha: un 3-politopo con $(f_0, f_1, f_2) = (6, 12, 8)$, igual que el octaedro, pero que no tiene la combinatoria de un octaedro (tiene vértices de valencias 3, 4 y 5; el octaedro solo de cuatro).

- Si un politopo dado tiene alguna cara con tres lados (triángulo), añadiendo un vértice muy cercano al centro de ese triángulo (es decir, pegando a ese triángulo una pirámide «muy chata») haremos aumentar en 1 el número de vértices y en 2 el número de caras (aparecen tres triángulos nuevos, pero desaparece uno).

La demostración queda terminada si observamos que desde los puntos de la diagonal de la Figura 3 (correspondientes a las pirámides) podemos llegar a cualquiera de los demás mediante saltos de vector $(2, 1)$ o $(1, 2)$. Esos saltos se corresponden con las operaciones geométricas descritas.²² □

OBSERVACIÓN 9. *Dos 3-politopos con los mismos f -vectores no tienen necesariamente el mismo tipo combinatorio. Por ejemplo, los de la Figura 5 tienen los f -vectores de (respectivamente) el cubo y el octaedro, pero no son equivalentes a ellos.*

Es decir, Steinitz en 1906 clasificó completamente los politopos tridimensionales por sus números de caras. Más complicado sería clasificarlos por su tipo combinatorio. Esta es una tarea que la comunidad matemática no tiene esperanzas de poder completar, aunque sí tenemos cotas relativamente buenas para el número de tipos combinatorios posibles en función del número n de vértices (o de caras): su crecimiento asintótico es del orden de c^n para una cierta constante c .

²²El lector atento se preguntará si podemos concatenar esos saltos de manera indefinida, puesto que para hacer los primeros necesitamos algún vértice de valencia tres y para los segundos algún triángulo. La respuesta es que sí porque las pirámides de las que partimos tienen ambas propiedades y tras cada operación aparece al menos un nuevo vértice trivalente y una nueva cara triangular.

2.2. POLITOPOS DE CUALQUIER DIMENSIÓN

Viajemos ahora a dimensión arbitraria. Un politopo P en \mathbb{R}^d puede tener dimensión estrictamente menor que d , llamando dimensión de P a la dimensión del subespacio afín que genera. Así, en \mathbb{R}^3 tenemos politopos de dimensión 3 (los habituales) pero también de dimensiones 2, 1 o 0 (polígonos, segmentos, y puntos).

Cada función lineal $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ define una *cara* de P , a saber, el subconjunto de P donde ϕ alcanza su máximo:

$$P^\phi := \{p \in P : \phi(p) \geq \phi(q) \ \forall q \in P\}.$$

Obsérvese que tomando $\phi = 0$ sale el propio P como cara de sí mismo. Por convenio consideraremos también al conjunto vacío como una cara, de dimensión -1 .

Toda cara de un politopo es a su vez un politopo²³ y por tanto tiene una dimensión bien definida. Las caras de dimensiones 0, 1, $d - 2$ y $d - 1$ de un d -politopo se llaman *vértices*, *aristas*, *crestas* y *facetas*, respectivamente. Además, toda cara de una cara de P es a su vez una cara de P .²⁴ Por tanto, el conjunto de caras de P forma un *conjunto parcialmente ordenado*, o *COPO*:²⁵ un conjunto en el que tenemos una relación de orden (en nuestro caso «estar contenido en» o, equivalentemente, «ser cara de») que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Decimos que dos politopos P y Q tienen el mismo *tipo combinatorio*, o que son *combinatoriamente equivalentes*, si sus COPOs de caras son isomorfos. Equivalentemente, si hay una biyección entre los vértices de P y los de Q que induce una biyección entre los conjuntos de caras.

Nuestro interés en este trabajo es entender los posibles números de caras de cada dimensión que puede tener un d -politopo. Más explícitamente:

DEFINICIÓN 10. *Sea P un politopo de dimensión d . Llamamos f -vector o vector de caras de P al vector*

$$f(P) = (f_{-1}, f_0, \dots, f_d), \quad \text{donde } f_i := \text{número de caras de dimensión } i \text{ de } P.$$

Obsérvese que siempre se tendrá que $f_{-1} = 1 = f_d$.

EJEMPLO 11 (El d -símplice). *Un símplice es un politopo cuyos vértices son afínmente independientes. Es fácil ver que esto determina su tipo combinatorio: el d -símplice (símplice de dimensión d) tiene $d + 1$ vértices y todo subconjunto de vértices produce una cara, de dimensión uno menos que su cardinal. Por tanto, el f -vector del d -símplice es*

$$f(d\text{-símplice}) = \left(\binom{d+1}{0}, \binom{d+1}{1}, \binom{d+1}{2}, \dots, \binom{d+1}{d}, \binom{d+1}{d+1} \right).$$

Por ejemplo, el 3-símplice o tetraedro tiene f -vector $(1, 4, 6, 4, 1)$.

²³Porque si $P = \text{conv}(S)$, entonces $P^\phi = \text{conv}(S^\phi)$, definiendo S^ϕ igual que hemos definido P^ϕ .

²⁴Porque si $Q = P^f$, entonces $Q^g = P^{f+\epsilon g}$ para algún $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.

²⁵Utilizamos COPO como abreviatura de CONjunto Parcialmente Ordenado. Es un término de uso más o menos común en México y otros países [3], que imita al uso de *poset* en inglés como abreviatura de *partially ordered set*.

DEFINICIÓN 12. *El d -símplice estándar Δ^d es $\text{conv}(e_1, \dots, e_{d+1})$, donde e_1, \dots, e_{d+1} son la base canónica de \mathbb{R}^{d+1} . Aunque usamos $d + 1$ coordenadas es un politopo de dimensión d , contenido en el hiperplano «suma de coordenadas igual a 1».*

EJEMPLO 13 (El d -cubo). *El d -cubo (centrado) es el politopo $[-1, 1]^d$. Sus vértices son los 2^d elementos de $\{-1, 1\}^d$. Cada cara (no vacía) del d -cubo viene determinada por qué coordenadas valen 1 en ella, qué coordenadas valen -1 , y qué coordenadas varían. Es decir, a cada cara le podemos asociar un vector de $\{-1, 0, 1\}^d$, donde un 1 o -1 en la posición i representa que el valor de la i -ésima coordenada es constante en esa cara, y un 0 que la coordenada no es constante. La dimensión de la cara es el número de ceros del vector que le corresponde, lo cual lleva a la siguiente expresión para el f -vector:*

$$f(d\text{-cubo}) = \left(1, 2^d \binom{d}{0}, 2^{d-1} \binom{d}{1}, 2^{d-2} \binom{d}{2}, \dots, 2 \binom{d}{d-1}, \binom{d}{d} \right).$$

Por ejemplo, el 3-cubo tiene f -vector $(1, 8, 12, 6, 1)$.

Algunas de las propiedades del f -vector en dimensión arbitraria son análogas a las de dimensión tres, utilizadas en la demostración del Teorema 8:

- $df_0 \leq 2f_1$, con igualdad si y solo si todos los vértices son d -valentes, en cuyo caso decimos que el politopo es *simple*.
- $df_{d-1} \leq 2f_1$, con igualdad si y solo si todas las facetas (y por tanto todas las caras propias) son símplices, en cuyo caso decimos que el politopo es *símplicial*.
- Se satisface la fórmula de Euler-Poincaré: la suma alternada de las entradas del f -vector es cero:²⁶

$$\sum_{k=-1}^d (-1)^k f_k = 0. \tag{3}$$

3. COMPLEJOS SIMPLICIALES

3.1. COMPLEJOS SIMPLICIALES ABSTRACTOS Y GEOMÉTRICOS, Y SUS f -VECTORES

DEFINICIÓN 14 ([30, Def. 5.1]). *Una familia finita \mathcal{K} de símplices en \mathbb{R}^d es un complejo símplicial geométrico si cumple que:*

- Para todo $\sigma \in \mathcal{K}$, todas las caras de σ están en \mathcal{K} .
- Si $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$, entonces $\sigma_1 \cap \sigma_2$ es una cara tanto de σ_1 como de σ_2 .

A los elementos de \mathcal{K} les llamamos caras de \mathcal{K} . A las caras maximales, facetas. El complejo es puro si todas sus facetas tienen la misma dimensión.

Por ejemplo, el conjunto de caras propias (es decir, excluyendo la cara total) de cualquier politopo símplicial P es un $(d - 1)$ -complejo símplicial puro. Si P es un símplice podemos añadir la cara total y tenemos un complejo puro de dimensión d .

DEFINICIÓN 15 ([28, Sect. 0.3]). *Sea V un conjunto finito.²⁷ Una familia K de*

²⁶Obsérvese que incluir el vacío como cara hace que en la derecha tengamos un 0. En la versión habitual de la fórmula de Euler para una bola tendríamos un 1.

²⁷Se pueden definir complejos símpliciales infinitos, pero no los necesitaremos en este artículo.

subconjuntos de V es un complejo simplicial abstracto si es cerrada por contenido. Es decir:

$$S \in K, T \subset S \Rightarrow T \in K.$$

A los elementos de V les llamamos vértices y a los de K les llamamos caras. La dimensión de una cara es su número de elementos menos uno. Definimos facetas y puro igual que en el caso geométrico.

Es fácil asociar a todo complejo simplicial geométrico \mathcal{K} un complejo abstracto K . Basta tomar como V la unión de los conjuntos de vértices de todos los $\sigma \in \mathcal{K}$ y como familia K los subconjuntos de V que son conjunto de vértices de algún $\sigma \in \mathcal{K}$. Cuando un complejo K se obtiene de \mathcal{K} de esta manera decimos que K es una *realización geométrica* de K .

Veamos que el recíproco también es cierto. Para ello recuérdese que el $(n-1)$ -símplice estándar en \mathbb{R}^n es la envolvente convexa de la base canónica, y que su complejo de caras es isomorfo, como COPO, al conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, por la biyección que manda cada subconjunto a su envolvente convexa.

DEFINICIÓN 16 ([28, pág. 19]). Sea K un complejo simplicial abstracto con vértices V . Sea Δ^V el símplice estándar en el espacio vectorial \mathbb{R}^V . La realización geométrica canónica de K es el conjunto de caras de Δ^V indexadas por los $S \in K$. La denotaremos Δ^K .

Es decir, las categorías de complejos simpliciales abstractos y geométricos son equivalentes. Nosotros trabajaremos normalmente en la primera, y usaremos la segunda solo como ilustración, mediante la realización canónica.

El *soporte* de un complejo simplicial geométrico es la unión de todas sus caras. Una *esfera simplicial* de dimensión $d-1$ es un complejo simplicial (necesariamente puro y de dimensión $d-1$) cuyo soporte es homeomorfo a la esfera estándar

$$S^{d-1} := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \sum_i x_i^2 = 1\}.$$

El complejo de *caras propias* de un politopo simplicial de dimensión d es una esfera simplicial de dimensión $d-1$. Por esta razón, en lo que sigue será conveniente denotar por d no la dimensión de nuestros complejos sino la «dimensión más 1». De este modo, además, en complejos puros, d es el número de vértices de toda faceta.

3.2. UN CAMBIO DE BASE CONVENIENTE. EL h -VECTOR

Al igual que lo definimos para politopos, el *f-vector* de un complejo simplicial de dimensión $d-1$ (geométrico o abstracto) es el vector $(f_{-1}, f_0, \dots, f_{d-1})$ que cuenta el número de caras de cada dimensión. Obsérvese que siempre tendremos $f_{-1} = 1$.

Dado un $k \in \{0, \dots, d\}$, un $(d-1)$ -símplice (geométrico) *semiabierto* de índice k es un $(d-1)$ -símplice al que se le han quitado k de sus caras de codimensión 1 (es decir, de dimensión $(d-2)$), y las caras contenidas en ellas. La Figura 6 muestra los cuatro triángulos semiabiertos posibles, de índices 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

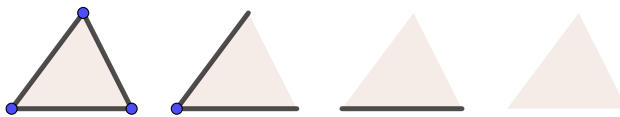


Figura 6: Los triángulos semiabiertos de índices 0, 1, 2 y 3 (el primero y el último son el triángulo cerrado y abierto, respectivamente). Sus f -vectores son $(1, 3, 3, 1)$, $(0, 1, 2, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, y $(0, 0, 0, 1)$.

En un $(d - 1)$ -símplice abstracto (o sea, un conjunto S de tamaño d y todos sus subconjuntos), la intersección de k de sus $(d - 2)$ -caras (subconjuntos de tamaño $d - 1$) es siempre una cara $R \subset S$ de tamaño $d - k$. Por tanto, las caras que hemos eliminado en el correspondiente símplice semiabierto son los $R' \subset S$ tales que $R \cup R' \neq S$; las que sobreviven son las que contienen a $T := S \setminus R$. Tomaremos esto como definición de símplice semiabierto abstracto:

DEFINICIÓN 17. *Un símplice semiabierto abstracto de dimensión $d - 1$ e índice k es el conjunto de caras de un $(d - 1)$ -símplice S que contienen a cierta cara de dimensión $d - k - 1$. Dicha cara T es la cara fundamental del símplice semiabierto. Denotaremos al símplice semiabierto abstracto como $[T, S]$.*²⁸

Llamamos caras de un símplice semiabierto a las caras del símplice original que no se han eliminado, ya sea en el sentido geométrico o abstracto. Aunque no son un complejo simplicial, podemos considerar su f -vector y es obvio que:

LEMA 18. *El f -vector de un $(d - 1)$ -símplice semiabierto de índice k es la fila $d - k$ del triángulo de Pascal, precedida de ceros. Es decir:*

$$f_{i-1}(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{si } i < k, \\ \binom{d-k}{i-k} = \binom{d-k}{d-i}, & \text{si } i \geq k. \end{cases}$$

Véanse los ejemplos de la Figura 6, y obsérvese que solo el f -vector del símplice cerrado tiene $f_{-1} = 1$, porque es el único que conserva la cara vacía.

DEFINICIÓN 19 ([28, pág. 80]). *Un complejo simplicial de dimensión d (geométrico o abstracto) se dice particionable si se puede descomponer en d -símplices semiabiertos. Llamaremos h -vector de una partición al vector (h_0, \dots, h_d) donde h_k es el número de d -símplices semiabiertos de índice k de la misma.*

Veamos que el h -vector no depende en realidad de qué partición elijamos. Por el Lema 18, conocido el h -vector de una partición, el f -vector del complejo es

$$f_{i-1} = \sum_{k=0}^i \binom{d-k}{d-i} h_k.$$

Puesto que esta es la misma fórmula (2) que relaciona el f -vector con el h -vector tal como lo definimos en la introducción, tenemos que *el h -vector de cualquier partición (si existe) no es más que el h -vector del complejo simplicial* [28, Prop. III.2.3].

²⁸Esta notación tiene la interpretación de «intervalo» con respecto a la relación de contenido: el símplice abstracto es la familia de todos los conjuntos que contienen a T y contenidos en S .

EJEMPLO 20 (*h*-vector de un octaedro). *Para particionar el octaedro, comenzamos tomando un triángulo cerrado, de índice 0. Tras esto podemos añadir sus tres vecinos, con índice 1 porque comparten una arista con el primero y no comparten aristas entre sí. Si vamos ahora a los vecinos de los vecinos, estos tienen índice dos porque comparten dos aristas con lo que ya teníamos. Por último, el triángulo final tiene índice tres. (Véase la Figura 7). El h-vector resultante es (1, 3, 3, 1), que coincide con la fórmula matricial*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

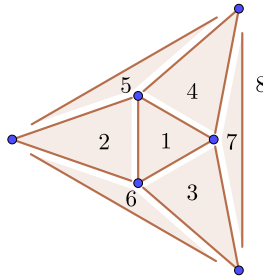


Figura 7: Una partición, y descascaramiento, del octaedro. El primer triángulo tiene índice 0; los tres siguientes índice 1; los 5, 6 y 7, índice 2; el triángulo 8 (que en la figura aparece como la región exterior) índice 3. El *h*-vector es (1, 3, 3, 1).

EJEMPLO 21 (*h*-vector de un toro). *Consideremos el toro triangulado dividiéndolo primero en 9 cuadrados y luego cada cuadrado en dos triángulos, como se ve en la Figura 8. Su f-vector es (1, 9, 27, 18). Aplicando la definición resulta que su h vector es*

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 27 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Como hay entradas negativas, el complejo no es particionable.²⁹ Esto puede sorprender al lector, pues la Figura 8 aparenta ser una partición de este complejo en 9 triángulos de índice 1 y otros 9 de índice 2. El problema es que el complejo original incluye a la cara vacía (como todo complejo), pero la partición no, porque la cara vacía solo está en símlices de índice cero. Esto se corresponde con que el h-vector

²⁹El recíproco no es cierto.

que nos da la fórmula se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

donde $(1, -3, 3, -1)$ es precisamente el h -vector que corresponde al f -vector $(1, 0, 0, 0)$, o sea, al complejo que solo tiene a la cara vacía.³⁰

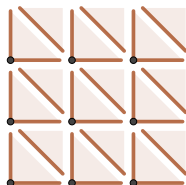


Figura 8: Una triangulación del toro con f -vector $(1, 9, 27, 18)$, y por tanto con h -vector $(1, 6, 12, -1)$. Que algún h_i sea negativo implica que este complejo no es particionable, a pesar de que la figura aparenta ser una partición en nueve triángulos semiabiertos de índice 1 y otros tantos de índice 2.

En el ejemplo del octaedro, la partición que usamos para calcular el h -vector tiene la propiedad de que podemos ir añadiendo los símlices semiabiertos de uno en uno y el resultado en cada paso intermedio es cerrado (es decir, un complejo simplicial). Cuando esto ocurre decimos que el complejo es *descascarable*:

DEFINICIÓN 22. Sea K un complejo simplicial (geométrico o abstracto) puro de dimensión d y con N facetas. Un descascaramiento de K es una ordenación de sus facetas, a las que denotamos $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ siguiendo ese orden, con la propiedad de que: si para cada $i = 1, \dots, N$ llamamos K_i al complejo que usa las primeras k facetas, se tiene que $K_{i+1} \setminus K_i$ es un símlice semiabierto, para todo i .

Decimos que K es descascarable si admite algún descascaramiento.

Todo complejo descascarable es particionable, pero el recíproco no es cierto.³¹ Usando la noción de descascaramiento podemos ya demostrar que todo politopo simplicial satisface las ecuaciones de Dehn-Sommerville, en dos pasos:

LEMA 23 ([30, Teorema 8.11]). *El complejo de caras propias de todo politopo simplicial P es descascarable.*

³⁰Este « h -vector de la cara vacía» admite una interpretación de inclusión-exclusión. Si a un triángulo cerrado le sumamos los tres de índice dos (con una arista cada uno) las caras que obtenemos, contadas con multiplicidad, son las mismas que si al triángulo abierto le sumamos las tres de índice uno, con la excepción de la cara vacía que solo está contenida en el cerrado.

³¹Por ejemplo, todo complejo descascarable ha de ser conexo, mientras que el complejo formado por la unión disjunta del octaedro y el toro de los Ejemplos 20 y 21 es particionable.

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN: Sea ℓ un recta que corta P y suficientemente genérica. Eso implica que ℓ corta al borde ∂P en puntos p y q del interior (relativo) de sendas facetas, y los hiperplanos afines que definen facetas de P cortan a ℓ en puntos distintos. El descascaramiento consiste en recorrer ℓ desde p hasta q a través del infinito y ordenar las facetas según atravesamos sus hiperplanos (véase la Figura 9).

En la primera mitad del recorrido, el complejo parcialmente construido es la parte de ∂P que vemos desde nuestra posición en ℓ . Es decir, cuando atravesamos el hiperplano H_F que contiene una faceta F , añadimos al complejo el interior de F y la parte de ∂F que no veíamos antes de atravesar H_F , que es un simplejo semiabierto. En la segunda mitad del recorrido el complejo parcial es la parte de ∂P que *no* vemos y al atravesar un hiperplano H_F añadimos al complejo («dejamos de ver») el interior de F y parte de su borde, formando también un simplejo semiabierto. \square

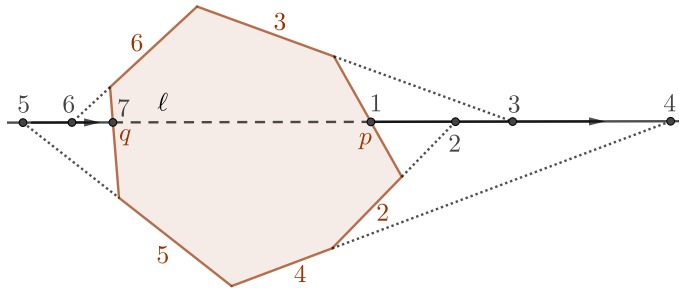


Figura 9: Descascaramiento de un politopo simplicial mediante una recta genérica ℓ (Lema 23). Invertiendo el orden del descascaramiento se obtiene otro descascaramiento con h -vector inverso del primero (Lema 24).

LEMA 24 ([30, Teorema 8.11]). *Toda esfera simplicial descascarable satisface las ecuaciones de Dehn-Sommerville: $h_k = h_{d-k}$ para todo k .*

IDEA DE LA DEMOSTRACIÓN: Si el orden $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ es un descascaramiento de una esfera simplicial, entonces el orden contrario $\sigma_N, \dots, \sigma_1$ también lo es. Además, el índice con el que añadimos cada σ_i en el primer caso y en el segundo son complementarios, porque las $(d-2)$ -caras de σ_i que ya estaban en el complejo al añadir σ_i en el primero son exactamente las que no estaban al añadirlo en el segundo.

Esta propiedad es especialmente clara en el descascaramiento del lema anterior, porque al invertir el orden se invierte también la noción de «antes» y «después», así como la de primera y segunda mitad del recorrido (véase de nuevo la Figura 9). \square

4. EL ÁLGEBRA DE STANLEY-REISNER DE K

4.1. LA SUCESIÓN Y LA SERIE DE HILBERT DE UN ÁLGEBRA, O DE UN IDEAL

Un *álgebra* sobre un cuerpo \mathbb{K} es un conjunto que es a la vez anillo y \mathbb{K} -espacio vectorial (con ciertos axiomas naturales). Es \mathbb{N} -*graduada* [12, Def. 1.7.1] o, para

nosotros, *graduada a secas*,³² si se descompone (como \mathbb{K} -espacio vectorial) en suma directa

$$A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

cumpliendo (como anillo) que $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$ para todo i, j .

Nuestras álgebras graduadas serán siempre *estándar* [13, Def. 4.1.3], es decir: conmutativas, con $A_0 \cong \mathbb{K}$, y generadas como álgebras por una cantidad finita de elementos de grado uno. La finitud implica que cada A_i tiene dimensión finita como \mathbb{K} -espacio vectorial y podemos definir la *sucesión de Hilbert*³³ de A como la sucesión $(H_i(A))_{i \in \mathbb{N}}$ con

$$H_i(A) = \dim_{\mathbb{K}}(A_i).$$

Toda álgebra graduada estándar es isomorfa a un cociente $A = \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I$ del anillo de polinomios por un ideal homogéneo I , y viceversa. El propio I que define el álgebra se descompone también como suma directa de sus partes homogéneas, $I = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} I_i$, las cuales son \mathbb{K} -espacios vectoriales de dimensión finita. Tenemos por tanto una *sucesión de Hilbert del ideal*. Se tiene entonces que, como espacios vectoriales,

$$A_i = \mathbb{K}[\mathbf{x}]_i / I_i,$$

de modo que

$$H_i(A) = H_i(\mathbb{K}[\mathbf{x}]) - H_i(I).$$

EJEMPLO 25. $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ es un álgebra graduada estándar con respecto al grado total. El espacio $\mathbb{K}[\mathbf{x}]_i$ de polinomios homogéneos de grado i está generado como espacio vectorial por los monomios de grado i en n variables y el número de tales monomios es el número de combinaciones con repetición de n elementos (las variables) tomados de i en i . Por tanto:

$$H_i(\mathbb{K}[\mathbf{x}]) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]_i) = \binom{n+i-1}{i}.$$

EJEMPLO 26. Sea I el ideal generado por un cierto monomio m de grado k . El número de monomios de grado i del ideal, o sea, de múltiplos de m , es, por la misma cuenta del Ejemplo 25,

$$H_i(I) = H_{i-k}(\mathbb{K}[\mathbf{x}]) = \binom{n+i-k-1}{i-k}.$$

Es muy conveniente representar la sucesión de Hilbert por su *función generatriz*, es decir, la serie de potencias en una variable ficticia (por ejemplo t) cuyos coeficientes son los términos de la sucesión. La denotaremos por $\text{Hilb}_A(t)$ y se conoce como la *serie de Hilbert* de A , o de I [13, Sec. 5.2.B], [28, Def. I.2.1]. Es decir:

$$\text{Hilb}_A(t) := \sum_{i=0}^{\infty} H_i(A)t^i, \quad \text{Hilb}_I(t) := \sum_{i=0}^{\infty} H_i(I)t^i.$$

³²Se definen álgebras graduadas más generales sustituyendo \mathbb{N} por otros semigrupos o monoides.

³³Es también habitual (sobre todo cuando se estudian graduaciones sobre semigrupos distintos de \mathbb{N}) llamarla *función de Hilbert* [13, Ch. 5], entendiéndola como la aplicación $i \mapsto H_i(A)$.

Esta expresión debe entenderse como un objeto puramente algebraico (una *serie de potencias formal*) aunque a veces tiene un significado también como función de t .

La serie de Hilbert de todo ideal en $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ y de toda álgebra graduada estándar se pueden reescribir como cociente de dos polinomios con un denominador de la forma $(1-t)^d$ para algún $d \leq n$ [13, Th. 5.2.20], [28, Th. I.2.3].

EJEMPLO 27. *En el caso del anillo $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ tenemos que*³⁴

$$\text{Hilb}_{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n+i-1}{i} t^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{-n}{i} t^i = (1-t)^{-n} = \frac{1}{(1-t)^n}.$$

Del mismo modo, cuando I está generado por un solo monomio, de grado k , tenemos que

$$\text{Hilb}_I(t) = t^k \text{Hilb}_{\mathbb{K}[\mathbf{x}]}(t) = \frac{t^k}{(1-t)^n}.$$

4.2. EL ANILLO DE STANLEY-REISNER DE UN COMPLEJO SIMPLICIAL

La mayoría de los lectores estarán familiarizados con la dicotomía álgebra-geometría que es la base de la geometría algebraica. Una *variedad algebraica* $X \subset \mathbb{K}^d$ es un subconjunto que se puede escribir como los ceros comunes de un conjunto finito de polinomios en $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, y, para estudiar X , pasamos al álgebra y estudiamos el *ideal* I_X formado por *todos* los polinomios que se anulan en X , así como su álgebra cociente $A_X := \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_X$. Si, además, I_X es un ideal homogéneo (por ejemplo, si en vez de variedades afines consideramos variedades proyectivas), el álgebra A_X es graduada.

Esta álgebra $A_X := \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_X$ tiene una interpretación como *anillo de funciones polinómicas en X* : cada polinomio $\phi \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ define una función polinómica $\mathbf{x} \in X \mapsto \phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}$, y los elementos del ideal I_X son exactamente los polinomios que, como funciones en X , se anulan. Es decir, I_X es el núcleo del homomorfismo

$$\mathbb{K}[\mathbf{x}] \longrightarrow \{\text{funciones polinómicas } X \rightarrow \mathbb{K}\}.$$

Por el primer teorema de isomorfismo, se tiene entonces que

$$A_X = \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_X \cong \{\text{funciones polinómicas } X \rightarrow \mathbb{K}\}.$$

Vamos a aplicar esta misma filosofía a complejos simpliciales. Recordemos que a todo complejo simplicial K con n vértices le asociamos su realización canónica Δ^K en \mathbb{R}^n (Definición 16). Denotaremos como $|\Delta^K| \subset \mathbb{R}^n$ el espacio subyacente a esa realización. Se tiene que

$$|\Delta^K| = \Delta^n \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \text{soporte}(\mathbf{x}) \in K\},$$

³⁴En este cálculo hemos usado la definición del coeficiente binomial $\binom{-n}{i}$ con $i, n \in \mathbb{N}$ como

$$\binom{-n}{i} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-(i-1))}{i!} = (-1)^i \binom{n+i-1}{i},$$

así como la fórmula del binomio de Newton: $(1+a)^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{-n}{i} a^i$.

donde $\Delta^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \sum x_i = 1, x_1, \dots, x_n \geq 0\}$ es el s3mplice est3andar y llamamos *soporte* de un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$ a su conjunto de coordenadas no nulas. De ese modo, decir que $\text{soporte}(\mathbf{x}) \in K$ para un $\mathbf{x} \in \Delta^n$ es lo mismo que decir que \mathbf{x} est3a en una cara de Δ^n que aparece en el complejo K (o en su realizaci3n geom3trica Δ^K).

La realizaci3n Δ^K solo tiene sentido de manera natural sobre el cuerpo \mathbb{R} , pero el segundo conjunto lo podemos definir sobre cualquier cuerpo. Lo denotaremos $|\Delta^K|_{\text{lin}}$ y lo llamaremos la *realizaci3n lineal de K* :

$$|\Delta^K|_{\text{lin}} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n : \text{soporte}(\mathbf{x}) \in K\}.$$

Se trata de una variedad algebraica, porque es una uni3n de subespacios lineales de coordenadas. Como tal, podemos definir su ideal y su 3lgebra asociada. Dado un $S \subset [n]$ denotaremos

$$\mathbf{x}^S := \prod_{i \in S} x_i.$$

DEFINICI3N 28 ([28, Def. II.1.1]). *Sea K un complejo simplicial (abstracto) con n v3rtices. El ideal de Stanley-Reisner de K sobre el cuerpo \mathbb{K} es el ideal monomial I_K generado por los monomios \mathbf{x}^S con $S \notin K$. El 3lgebra de Stanley-Reisner A_K es el 3lgebra cociente $\mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_K$.*

PROPOSICI3N 29. *Si \mathbb{K} es un cuerpo infinito, I_K es el ideal asociado a la variedad algebraica $|\Delta^K|_{\text{lin}}$. Es decir:*

$$|\Delta^K|_{\text{lin}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n : \phi(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \phi \in I_K\}, \quad I_K = \{\phi \in \mathbb{K}[\mathbf{x}] : \phi(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in |\Delta^K|_{\text{lin}}\}.$$

DEMOSTRACI3N. La primera igualdad es inmediata de las definiciones.

Para la segunda: Si m es un monomio de I_K , para todo $\mathbf{x} \in |\Delta^K|_{\text{lin}}$ tenemos que alguna coordenada nula de \mathbf{x} se usa en m y, por tanto, $m(\mathbf{x}) = 0$. Rec3procamente, veamos que si ϕ es un polinomio que contiene alg3n monomio \mathbf{x}^S con $S \in K$, entonces ϕ no se anula en todo $|\Delta^K|_{\text{lin}}$. Podemos entender \mathbf{x}^S como una funci3n en el subespacio \mathbb{K}^S definido por esas coordenadas, el cual est3 contenido en $|\Delta^K|_{\text{lin}}$. Restringido a \mathbb{K}^S , ϕ es un polinomio en las variables S , porque los monomios que usan alguna otra variable se anulan. El 3nico polinomio en las variables S que se anula en todo \mathbb{K}^S es el polinomio 0. (Esto es lo que ser3 falso en un cuerpo finito). \square

Es decir, si \mathbb{K} es infinito el 3lgebra de Stanley-Reisner $A_K := \mathbb{K}[\mathbf{x}]/I_K$ es el anillo de coordenadas de la realizaci3n lineal $|\Delta^K|_{\text{lin}}$. Podemos incluso relacionar A_K con la realizaci3n geom3trica can3nica Δ^K :

COROLARIO 30. *Tomando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, I_K es el ideal generado por los polinomios homog3neos que se anulan en Δ^K .*

DEMOSTRACI3N. Queremos ver que si $\phi \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ se anula en $|\Delta^K|$ pero no est3 en I_K , ϕ no puede ser homog3neo. Como $\phi \notin I_K$, uno de los monomios de ϕ tiene soporte contenido en una cara $S \in K$. Restringiendo ϕ a las variables S (o sea, haciendo cero las dem3s) tenemos un polinomio $\phi|_S \in \mathbb{R}[x_i : i \in S] \setminus \{0\}$ que se anula en todo el s3mplice Δ^S y, por tanto, en todo el hiperplano de $\{\sum_{i \in S} x_i = 1\} \subset \mathbb{R}^S$. Eso implica que $\phi|_S$ es m3ltiplo de $\sum_{i \in S} x_i - 1$, con lo cual no puede ser homog3neo. \square

Aunque es bueno tener en mente esta interpretación geométrica de I_K y A_K , todo lo que decimos a continuación es válido sobre cuerpos arbitrarios.

La siguiente descripción explícita de A_K es inmediata a partir de la definición, y con ella podemos ya demostrar el Teorema 3.2.

LEMA 31. *El álgebra A_K está generada como espacio vectorial por los monomios con soporte en K (o sea, los monomios \mathbf{x}^S con $\text{soporte}(S) \in K$) y tiene el producto natural:*

$$\mathbf{x}^{S_1} \mathbf{x}^{S_2} = \begin{cases} \mathbf{x}^{S_1+S_2} & \text{si } \text{soporte}(S_1 \cup S_2) \in K, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

TEOREMA 32 ([28, Th. II.1.4]). *Para todo complejo simplicial K puro de dimensión $d - 1$ se cumple*

$$\text{Hilb}(A_K) = \frac{h(t)}{(1-t)^d},$$

donde $h(t) = h_0 + \dots + h_d t^d$ es el h -vector de K escrito como polinomio.³⁵

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que K es particionable, es decir, Δ^K es unión disjunta de ciertos símplices semiabiertos que denotamos $\sigma_1, \dots, \sigma_N$. Recuerdese que, desde el punto de vista abstracto, cada símplice semiabierto se escribe como un intervalo $[T_i, S_i]$, donde S_i es el conjunto de vértices del correspondiente símplice cerrado y T_i el de la cara más pequeña contenida en σ_i .

Con esta notación, diremos que un monomio m tiene soporte en σ_i si su soporte está contenido en S_i y contiene a T_i . Se tiene entonces que:

- Cada monomio con soporte en K tiene soporte en uno y solo uno de los símplices semiabiertos σ_i . Como los monomios con soporte en K son una base de A_K como \mathbb{K} -espacio vectorial (Lema 31), tenemos A_K descompuesto como suma directa de los espacios vectoriales A_{σ_i} generados por los monomios con soporte en σ_i . Véase una ilustración de esta descomposición en la Figura 10.
- Como vimos en los Ejemplos 26 y 27, el número de monomios de grado k con soporte en σ_i es $\binom{d+k-|T_i|-1}{k-|T_i|}$ y su serie de Hilbert es³⁶

$$\text{Hilb}(A_{\sigma_i}) = \frac{t^{|T_i|}}{(1-t)^d}.$$

- Como la serie de Hilbert es aditiva por suma directa y h_k simplemente cuenta cuántos T_i tienen tamaño k , concluimos que

$$\text{Hilb}(A_K) = \sum_{i=1}^N \text{Hilb}(A_{\sigma_i}) = \sum_{i=1}^N \frac{t^{|T_i|}}{(1-t)^d} = \frac{h_0 + \dots + h_d t^d}{(1-t)^d}.$$

³⁵Pero obsérvese que aquí lo escribimos en orden inverso al utilizado en la nota 4 de la página 169.

³⁶En los Ejemplos 26 y 27 pensábamos en ese conjunto de monomios como el ideal generado por \mathbf{x}^{T_i} . Aquí pensamos en él como base de un subespacio vectorial de nuestra álgebra.

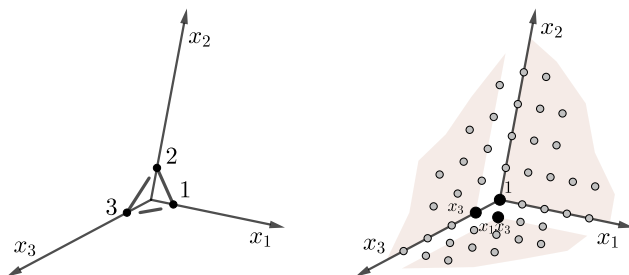


Figura 10: Ilustración del Teorema 32 en el caso particionable, con el complejo $K = \{12, 13, 23\}$ (el borde de un triángulo). A la izquierda, la realización canónica del complejo en \mathbb{R}^3 , mostrando una partición en la que 12 tiene índice 0; 23 tiene índice 1 (se elimina el vértice 2); y 13 tiene índice 2 (se eliminan los dos vértices). A la derecha, la correspondiente partición del conjunto de monomios de A_K , que descompone a A_K como suma directa de $\mathbb{K}[x_1, x_2]$, $x_3\mathbb{K}[x_2, x_3]$ y $x_1x_3\mathbb{K}[x_1, x_3]$. Las series de Hilbert de los sumandos son $1/(1-t)^2$, $t/(1-t)^2$ y $t^2/(1-t)^2$, con lo cual la serie de Hilbert de A_K es $(1+t+t^2)/(1-t)^2$, como afirma el teorema.

El argumento se extiende a complejos que no sean particionables porque no estamos usando ninguna propiedad algebraica, sino simplemente «contando monomios». Estas cuentas funcionan también si en vez de uniones disjuntas de símlices semiabiertos usamos argumentos de inclusión-exclusión como hicimos al calcular «el h -vector del símlice vacío» en el Ejemplo 21.³⁷ □

En el caso particionable esta demostración nos da el siguiente resultado mucho más explícito, en el que para cada $S \subset \{1, \dots, n\}$ denotamos $\mathbb{K}[S] := \mathbb{K}[x_j : j \in S]$.

COROLARIO 33. *Si K es un complejo puro particionable con facetas S_1, \dots, S_N y si $T_i \subset S_i$ denota la cara minimal del correspondiente símlice semiabierto, se tiene*

$$A_K = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{x}^{T_i} \mathbb{K}[S_i].$$

Al monomio \mathbf{x}^{T_i} lo llamaremos el *monomio fundamental* del símlice semiabierto.

4.3. EL COCIENTE ARTINIANO A_K/Θ , EN EL CASO DESCASCARABLE

Sea K de nuevo un $(d-1)$ -complejo puro con n vértices, pero supongamos ahora que K es descascarable. Es decir, podemos ordenar sus facetas como $S_1, \dots, S_N \subset \{1, \dots, n\}$ de modo que en cada una tenemos un subconjunto $T_i \subset S_i$ con la propiedad de que los subconjuntos de S_i no contenidos en ningún S_j con $j < i$ son, precisamente, los del intervalo $[T_i, S_i]$.

³⁷No necesitamos hacer las cuentas; basta entender que la expresión de inclusión-exclusión que obtendremos en el lado del complejo simplicial es exactamente la misma que la que en el lado de los monomios, porque los monomios con soporte en K son los puntos enteros no negativos de $|\Delta^K|_{\text{lin}}$ (realizado sobre \mathbb{R}). Véase de nuevo la Figura 10.

Consideremos un conjunto $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ de d funciones lineales en \mathbb{K}^n «suficientemente genéricas». ³⁸ La propiedad explícita que necesitamos es que, para todo i ,

$$\Theta \text{ restringido a } \mathbb{K}^{S_i} \cong \mathbb{K}^d \text{ es base de las funciones lineales en } \mathbb{K}^{S_i}. \quad (4)$$

Denotemos por $\mathbb{K}[\Theta] \cong \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$ la \mathbb{K} -álgebra generada por Θ . Gracias al descascaramiento podemos reescribir el Corolario 33 como:

PROPOSICIÓN 34. *Si K es un $(d-1)$ -complejo puro y descascaramiento y Θ un sistema de d funciones lineales que satisface la condición (4), entonces A_K es un $\mathbb{K}[\Theta]$ -módulo libre generado por los monomios fundamentales del descascaramiento. Es decir:*

$$A_K = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{x}^{T_i} \mathbb{K}[\Theta].$$

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre N . Si $N = 1$, entonces K es el símplice S_1 (y todas sus caras) y tenemos que $A_K = \mathbb{K}[S_1] = \mathbb{K}[\Theta]$, y $T_1 = \emptyset$, así que $\mathbf{x}^{T_1} = 1$.

Para el paso inductivo, sea K' el complejo formado por las $N-1$ primeras facetas del descascaramiento, de modo que $K = K' \cup [T_N, S_N]$. Por el Corolario 33,

$$A_K = A_{K'} \oplus \mathbf{x}^{T_N} \mathbb{K}[S_N].$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $S_N = \{1, \dots, d\}$. Como Θ es base de las funciones lineales en \mathbb{K}^{S_N} y $\mathbb{K}[\Theta]$ depende solo del espacio lineal generado por Θ y no de los θ_i específicos, podemos suponer que

$$\theta_i = x_i + \theta'_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

donde θ'_i son funciones lineales en las variables $\{x_{d+1}, \dots, x_n\}$. Despejando $x_i = \theta_i - \theta'_i$ podemos reescribir (de manera única) cada $\phi \in \mathbb{K}[S_N]$ como $\phi_\Theta + \phi'$ donde $\phi_\Theta \in \mathbb{K}[\Theta]$ y $\phi' \in (x_{d+1}, \dots, x_n)$. Pero entonces

$$\mathbf{x}^{T_N} \phi = \mathbf{x}^{T_N} \phi_\Theta + \mathbf{x}^{T_N} \phi' = \mathbf{x}^{T_N} \phi_\Theta, \quad (5)$$

donde en la segunda igualdad usamos que $\mathbf{x}^{T_N} x_j$ es cero (en A_K) para todo $j \notin S_N$, ya que toda cara de K que contiene a T_N está contenida en S_N .

La ecuación (5) nos dice que $\mathbf{x}^{T_N} \mathbb{K}[S_N] = \mathbf{x}^{T_N} \mathbb{K}[\Theta]$ y, usando la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$A_K = A_{K'} \oplus \mathbf{x}^{T_N} \mathbb{K}[S_N] = \left(\bigoplus_{i=1}^{N-1} \mathbf{x}^{T_i} \mathbb{K}(\Theta) \right) \oplus \mathbf{x}^{T_N} \mathbb{K}[\Theta] = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{x}^{T_i} \mathbb{K}(\Theta). \quad \square$$

En el siguiente resultado, si $H(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} h_i t^i$ y $G(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} g_i t^i$ son dos series de potencias formales, escribiremos $H \leq G$ queriendo decir « $h_i \leq g_i$ para todo i ».

³⁸Para un cuerpo finito este conjunto puede no existir, pero para \mathbb{K} infinito siempre existe: Si pensamos en Θ como una matriz de tamaño $n \times d$ cuyas columnas son los θ_i , la condición (4) se traduce en que los menores $d \times d$ de Θ que corresponden a facetas de K sean no nulos. Si \mathbb{K} es infinito se puede construir una matriz en la que *todos* los menores sean no nulos.

LEMA 35 ([28, Lem. III.2.6]). *Sea $A = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i$ un álgebra graduada estándar, y sea $\theta \in A_k$. Entonces,*

$$\text{Hilb}_A(t)(1 - t^k) \leq \text{Hilb}_{A/(\theta)}(t).$$

La igualdad se da para todo i si, y solo si, θ no es un divisor de cero en A .

DEMOSTRACIÓN. Es claro que hasta grado $k - 1$ las dos series coinciden. Para $i \geq k$, el término de grado i en el lado de la izquierda es $\dim_{\mathbb{K}}(A_i) - \dim_{\mathbb{K}}(A_{i-k})$ y en el lado de la derecha es $\dim_{\mathbb{K}}(A_i) - \dim_{\mathbb{K}}(\theta)_i$. Por tanto, la desigualdad se sigue de

$$\dim_{\mathbb{K}}(\theta)_{i-k} \leq \dim_{\mathbb{K}}(A_{i-k}),$$

lo cual es obvio: todo elemento de grado i de (θ) es el producto de θ por un elemento de grado $i - k$. Además, la desigualdad es estricta para algún i si, y solo si, algún elemento de A_{i-k} se hace cero al multiplicarlo por θ . \square

Estamos ya en disposición de demostrar una versión explícita del Teorema 3.3:

COROLARIO 36 ([28, Th. III.2.5]). *Si K es un $(d - 1)$ -complejo puro y descascarable y Θ un sistema de d funciones lineales con la condición (4), entonces los monomios fundamentales del descascaramiento son una base de $A_K/(\Theta)$ como \mathbb{K} -espacio vectorial.*

En particular, $\text{Hilb}_{A_K/(\Theta)}(t) = h_0 + \dots + h_d t^d$, con (h_0, \dots, h_d) el h -vector de K .

DEMOSTRACIÓN. La Proposición 34 demuestra que los monomios fundamentales son sistema generador. Por tanto

$$\text{Hilb}_{A_K/(\Theta)}(t) \leq h_0 + \dots + h_d t^d.$$

Por otro lado, aplicando iterativamente el Lema 35 a las funciones $\theta_i \in (A_K)_1$, el Teorema 32 nos da la desigualdad contraria

$$\text{Hilb}_{A_K/(\Theta)}(t) \geq h_0 + \dots + h_d t^d. \tag{6}$$

Esto implica la igualdad y nos asegura que el sistema generador ha de ser base. \square

OBSERVACIÓN 37. *El Corolario 36 demuestra indirectamente que si K es descascarable existen $\theta_1, \dots, \theta_d$ de grado uno en A_K tales que para cada $i = 1, \dots, d$ se da la igualdad en la ecuación (6), es decir, en el Lema 35 al aplicarlo al elemento θ_i del álgebra $A_K/(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$. Como vimos en aquel lema, la igualdad implica que θ_i no es divisor de cero en $A_K/(\theta_1, \dots, \theta_{i-1})$.*

Cuando $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_d\}$ tiene esta propiedad y $A_K/(\Theta)$ es finita, se dice que Θ es una sucesión regular y que A_K es Cohen-Macaulay [28, Def. I.5.8, Th. I.5.9].

Concluimos por tanto que:

COROLARIO 38. [28, Lem. III.2.4] *Todo complejo descascarable es Cohen-Macaulay sobre cualquier cuerpo infinito. Como sucesión regular se puede tomar cualquier conjunto de d elementos de grado 1 en A_K con la propiedad de que sean una base al restringidos a \mathbb{K}^S para cada faceta S de K .*

REFERENCIAS

- [1] K. ADIPRASITO, Combinatorial Lefschetz Theorems beyond positivity, arXiv:1812.10454v4, 2018.
- [2] N. ALON, The number of polytopes, configurations and real matroids, *Mathematika* **33** (1986), 62–71.
- [3] J. A. AMOR MONTAÑO, *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*, 2.^a ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 2005.
- [4] L. J. BILLERA, The algebra of continuous piecewise polynomials, *Adv. Math.* **76** (1989), 170–183.
- [5] L. J. BILLERA Y C. W. LEE, A proof of the sufficiency of McMullen’s conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes, *J. Combin. Theory Ser. A* **31** (1981), 237–255.
- [6] L. EULER, Elementa doctrinae solidorum, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* (1758), 109–140.
- [7] B. FLEMING Y K. KARU, Hard Lefschetz theorem for simple polytopes, *J. Algebraic Combin.* **32** (2010), 227–239.
- [8] J. E. GOODMAN Y R. POLLACK, Upper bounds for configurations and polytopes in \mathbb{R}^d , *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 219–227.
- [9] G. KALAI, Many triangulated spheres, *Discrete Comput. Geom.* **3** (1988), 1–14.
- [10] G. KALAI, *Combinatorics and more* (blog), <https://gilkalai.wordpress.com/tag/g-conjecture>. Véanse en especial los posts invitados *The g-Conjecture* por Eran Nevo, partes I, II, III y IV, abril de 2009.
- [11] V. KLEE, A combinatorial analogue of Poincaré’s duality theorem, *Canadian J. Math.* **16** (1964), 517–531.
- [12] M. KREUZER Y L. ROBBIANO, *Computational Commutative Algebra 1*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.
- [13] M. KREUZER Y L. ROBBIANO, *Computational Commutative Algebra 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [14] S. LEFSCHETZ, *L’Analysis situs et la Géométrie Algébrique*, Gauthiers-Villars, Paris, 1924. Reimpresión: *Selected Papers*, Chelsea, New York, 1971.
- [15] F. S. MACAULAY, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* **26** (1927), 531–555.
- [16] P. McMULLEN, The maximum numbers of faces of a convex polytope, *Mathematika* **17** (1970), 179–184.
- [17] P. McMULLEN, The numbers of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* **9** (1971), 559–570.
- [18] P. McMULLEN, On simple polytopes, *Invent. Math.* **113** (1993), 419–444.
- [19] P. McMULLEN, Weights on polytopes, *Discrete Comput. Geom.* **15** (1996), 363–388.
- [20] P. McMULLEN Y G. C. SHEPHARD, *Convex polytopes and the upper bound conjecture*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **3**, Cambridge University Press, London-New York, 1971.

- [21] T. S. MOTZKIN, Comonotone curves and polyhedra, *Bull. Amer. Math. Soc.* **63** (1957), 35.
- [22] E. NEVO, F. SANTOS Y S. WILSON, Many triangulated odd-spheres, *Math. Ann.* **364** (2016), 737–762.
- [23] S. A. PAPADAKIS Y V. PETROTOU, The characteristic 2 anisotropy of simplicial spheres, arXiv:2012.09815, 2020.
- [24] G. A. REISNER, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, *Advances in Math.* **21** (1976), 30–49.
- [25] D. M. Y. SOMMERVILLE, The relations connecting the angle sums and volume of a polytope in space of n dimensions, *Proc. Royal Society Series A* **115** (1927), 103–119.
- [26] R. P. STANLEY, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, *Studies in Appl. Math.* **54** (1975), 135–142.
- [27] R. P. STANLEY, The number of faces of a simplicial convex polytope, *Adv. in Math.* **35** (1980), 236–238.
- [28] R. P. STANLEY, *Combinatorics and Commutative Algebra*, 2.^a ed., Prog. Math. **41**, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.
- [29] E. STEINITZ, Über die Eulerschen Polyederrelationen, *Archiv für Mathematik und Physik* **11** (1906), 86–88.
- [30] G. M. ZIEGLER, *Lectures on Polytopes*, Grad. Texts in Math. **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [31] G. M. ZIEGLER, Face numbers of 4-polytopes and 3-spheres, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002)*, 625–634, Higher Education Press, Beijing, 2002.

FRANCISCO SANTOS, DPTO. DE MATEMÁTICAS, ESTADÍSTICA Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Correo electrónico: francisco.santos@unican.es

Página web: <http://personales.unican.es/santosf>