

Hipersuperficies complejas completas en la bola de $\mathbb{C}^n$

por

Antonio Alarcón

Dedicado a Vicente Palmer por su sexagésimo cumpleaños

RESUMEN. En este artículo discutimos el problema de Yang sobre la existencia de subvariedades complejas completas y acotadas en los espacios euclídeos complejos, con énfasis en las hipersuperficies propias (topológicamente cerradas) de la bola unidad de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, que disfrutan estas propiedades.

1. EL PROBLEMA DE YANG

En 1977, Paul Yang propuso la siguiente cuestión sobre subvariedades complejas del espacio euclídeo complejo [33, p. 135, Question II]:

PROBLEMA 1.1. *¿Existe una subvariedad compleja $\varphi : M^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ ($1 \leq k < n$) que sea completa y tenga imagen acotada?*

La completitud es la condición más natural a imponer en una variedad riemanniana cuando se quiere estudiar sus propiedades globales; es el corazón de la geometría global. Recordemos que una subvariedad diferenciable inmersa $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *completa* si la métrica riemanniana $\varphi^*\mathbf{g}$ inducida en M por la métrica euclídea $\mathbf{g}$ en $\mathbb{R}^n$ a través de φ es completa: las geodésicas en $(M, \varphi^*\mathbf{g})$ están definidas para todo tiempo. Por el teorema clásico de Hopf-Rinow, esto es equivalente a que el arco $\varphi \circ \gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tenga longitud euclídea infinita para todo arco divergente $\gamma : [0, 1) \rightarrow M$. Toda variedad riemanniana compacta es completa, por lo que el análogo en el caso diferenciable real al problema 1.1 es completamente trivial: por ejemplo, la esfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ es una subvariedad completa. Tampoco es difícil construir subvariedades diferenciables completas y acotadas en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, que no sean compactas; animamos al lector a encontrar sus propios ejemplos.

Recordemos que una *variedad compleja* de dimensión (compleja) $n \in \mathbb{N}$ no es más que una variedad topológica de dimensión (real) $2n$ provista de un atlas complejo: los cambios de cartas son biholomorfismos entre dominios del espacio euclídeo complejo $\mathbb{C}^n$. Si bien todos los conceptos usuales en el estudio de variedades diferenciables (subvariedad, aplicación diferenciable entre variedades, diferencial de una aplicación, espacio tangente, etc) se definen de forma análoga en el caso complejo (y hablamos de subvariedad compleja, aplicación holomorfa entre variedades complejas, etc), la mayor rigidez del análisis complejo con respecto al real hace que la geometría de las subvariedades complejas y las reales en el espacio euclídeo sean muy distintas. Por ejemplo, el principio del máximo para funciones holomorfas impide la existencia

de subvariedades complejas compactas en $\mathbb{C}^n$, lo que dota de sentido y motiva el problema planteado por Yang. Otra diferencia significativa es que el famoso teorema del embebimiento de Nash (el de la película), al efecto de que toda variedad diferenciable es difeomorfa a una subvariedad propiamente embebida de algún espacio euclídeo, no admite análogo en el caso complejo. Así, una variedad compleja se dice de Stein si es biholomorfa a una subvariedad compleja y cerrada (esto es, propiamente embebida) de $\mathbb{C}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Las variedades de Stein son de gran interés en geometría compleja porque, en pocas palabras, disponen de muchas funciones holomorfas, tantas que disfrutan de buenas teorías de aproximación e interpolación. El propio $\mathbb{C}^n$ y la bola unidad $\mathbb{B}_n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ son ejemplos de variedad de Stein. Una superficie de Riemann o curva compleja (es decir, una variedad compleja de dimensión 1) es de Stein si y solo si es abierta (no compacta). Referimos a [20] para un manual sobre variedades de Stein.

Volviendo al problema 1.1, la principal motivación de Yang para proponerlo fue que una respuesta afirmativa demostraría la existencia de subvariedades complejas completas $M^k \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ con curvatura seccional holomorfa estrictamente negativa [34]. Por otro lado, como las subvariedades complejas de $\mathbb{C}^n$ son mínimas (esto es, puntos críticos del funcional volumen; véanse, por ejemplo, [27, 16] para una introducción a este tema clásico pero de mucha actualidad), el problema de Yang también está conectado con el de Calabi-Yau, que se remonta a unas conjeturas planteadas por Calabi en 1965 [26, p. 170] sobre la existencia de hipersuperficies mínimas, completas y acotadas en $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$); referimos a [6, §7] para una discusión sobre este tema. No obstante, el problema de Yang para subvariedades complejas se ha convertido en un foco activo de investigación por derecho propio, habiendo recibido un buen número de contribuciones relevantes en la última década. En este artículo discutimos con un ánimo divulgativo la historia y algunos avances recientes en este problema, poniendo el énfasis en la construcción de Globevnik en 2015 de una hipersuperficie compleja completa y cerrada de la bola $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ [22]. Referimos a [2] para una discusión más completa, detallada y técnica sobre el problema de Yang.

2. PRIMEROS EJEMPLOS

La primera respuesta afirmativa al problema 1.1 se debe a Jones [23], quien en 1979 demostró la existencia de una inmersión holomorfa completa y acotada $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}^2$, un embebimiento holomorfo completo y acotado $\mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{C}^3$ y un embebimiento holomorfo completo y propio $\mathbb{D} \hookrightarrow \mathbb{B}_4$. Los ejemplos de Jones son por tanto discos complejos, su topología es trivial. Hubo que esperar más de tres décadas para la aparición de ejemplos más complicados: Martín, Umehara y Yamada en [28] y Alarcón, Forstnerič y López en [3, 9] construyeron inmersiones holomorfas completas y propias $M \rightarrow \mathbb{B}_2$ y embebimientos holomorfos completos y propios $M \hookrightarrow \mathbb{B}_3$, para familias generales de superficies de Riemann abiertas M , incluyendo ejemplos con topología arbitraria (posiblemente infinita) y con control de la estructura compleja. Los primeros ejemplos de dimensión más alta (que no sean curvas complejas) fueron proporcionados por Drinovec Drnovšek [18], quien en 2015 estableció la existencia de embebimientos holomorfos completos y propios $\mathbb{B}_k \hookrightarrow \mathbb{B}_n$,

siempre que la codimensión $n - k \geq 1$ fuera suficientemente grande. Por supuesto, ninguno de estos ejemplos es explícito.

Estas construcciones, si bien son muy diferentes entre sí al estar basadas en herramientas muy distintas, responden todas ellas a la misma idea subyacente. Pensemos primero en el caso diferenciable real y supongamos que tenemos, por ejemplo, una superficie completa en $\mathbb{R}^3$ y queremos deformarla sin perder la completitud para meterla dentro de una bola. Si imaginamos nuestra superficie como un folio infinito, lo primero que se nos ocurre es aplastarlo para convertirlo en una bola de papel [problema resuelto! En efecto, este tipo de deformación preserva tanto la estructura diferenciable de la superficie (siempre que la suavicemos donde aparezcan picos) como la métrica intrínseca, por lo que la superficie resultante sigue siendo completa. Sin embargo, si volvemos al ambiente complejo y empezamos con una subvariedad compleja en $\mathbb{C}^n$, resulta que una deformación tan salvaje destruye la estructura compleja de la subvariedad, que deja inmediatamente de ser holomorfa. La idea que sí funciona en ambiente complejo es empezar con una subvariedad compleja compacta y con borde (luego acotada) e ir deformándola cerca del borde en un proceso recursivo para aumentar su diámetro intrínseco, hasta hacerlo infinito en el límite, sin que crezca demasiado su diámetro extrínseco, para mantenerla acotada. Con más precisión, supongamos por ejemplo que en el paso $j \in \mathbb{N}$ de la inducción tenemos una inmersión holomorfa $X_{j-1} : \overline{\mathbb{D}} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq 1\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ cuya imagen $X_{j-1}(\overline{\mathbb{D}})$ está contenida en la bola euclídea $R_{j-1}\mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < R_{j-1}\} \subset \mathbb{C}^n$ de centro el origen y radio $R_{j-1} > 0$. Si le aplicamos una deformación que sea pequeña en el compacto $(1 - \epsilon_j)\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$ y mueva cada punto x del borde $X_{j-1}(b\overline{\mathbb{D}})$ una distancia de aproximadamente $1/j$ en una dirección perpendicular al vector de posición de x en $\mathbb{C}^n$, obtenemos una nueva inmersión holomorfa $X_j : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}^n$ tal que

- $|X_j - X_{j-1}| < \epsilon_j$ en $(1 - \epsilon_j)\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$,
- la distancia en $(\overline{\mathbb{D}}, X_j^*\mathfrak{g})$ desde $0 \in \mathbb{D}$ hasta el borde $b\overline{\mathbb{D}}$ se ha incrementado aproximadamente $1/j$ con respecto a dicha distancia en $(\overline{\mathbb{D}}, X_{j-1}^*\mathfrak{g})$ y,
- por el teorema de Pitágoras, la subvariedad compleja imagen $X_j(\overline{\mathbb{D}})$ está contenida en la bola $R_j\mathbb{B}_n$ con $R_j = \sqrt{R_{j-1}^2 + 1/j^2}$.

Véase la figura 1. Como

$$\sum_{j \geq 1} \frac{1}{j} = \infty \quad \text{y} \quad \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^2} < \infty, \quad (1)$$

si repetimos este proceso recursivamente de forma adecuada con una sucesión de números positivos $\{\epsilon_j\} \searrow 0$ que decrezca suficientemente rápido, obtenemos en el límite una inmersión holomorfa

$$X = \lim_{j \rightarrow \infty} X_j : \overline{\mathbb{D}} = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (1 - \epsilon_j)\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}^n$$

cuya imagen está contenida en la bola de radio $R = \lim_{j \rightarrow \infty} R_j < \infty$ y tal que la longitud de las curvas divergentes en $(\overline{\mathbb{D}}, X^*\mathfrak{g})$ es infinita, esto es, X es completa.

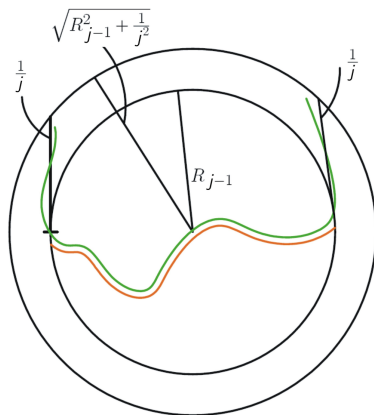


Figura 1: El problema de Yang y el teorema de Pitágoras.

Diferentes herramientas y variaciones de estas ideas dan lugar a los resultados en [23, 28, 3, 9, 18] anteriormente mencionados.

3. CURVAS EMBEBIDAS EN LA BOLA DE $\mathbb{C}^2$

El problema 1.1 es significativamente más difícil cuando consideramos subvariedades embebidas en codimensión baja, siendo el caso más complicado el de hipersuperficies complejas embebidas, es decir, cuando $k = n - 1$ y no permitimos autointersecciones. El principal motivo es que, si bien las subvariedades complejas de dimensión $k \in \mathbb{N}$ en $\mathbb{C}^n$ son genéricamente embebidas si $n \geq 2k + 1$, las autointersecciones de dichas subvariedades son estables si $n \leq 2k$, es decir, no desaparecen con deformaciones pequeñas. Esto ocurre de forma análoga en ambiente real: si pensamos, por ejemplo, en una curva en $\mathbb{R}^2$ que tenga un punto de autointersección transverso, es evidente que no podemos deshacernos de él con deformaciones pequeñas de la curva, mientras que sí podemos hacerlo trivialmente si la curva vive en $\mathbb{R}^3$. Notemos que los ejemplos de Jones [23], Alarcón, Forstnerič y López [3, 9], y Drinovec Drnovšek [18] anteriormente mencionados son embebidos solamente cuando $n \geq 2k + 1$, es decir, cuando el embebimiento viene gratis por ser la codimensión suficientemente grande.

El problema de Yang para curvas complejas embebidas en $\mathbb{C}^2$ fue finalmente resuelto por Alarcón y López en un artículo publicado en 2016.

TEOREMA 3.1 ([10]). *En la bola $\mathbb{B}_2$ de $\mathbb{C}^2$ existen curvas complejas completas y propiamente embebidas.*

La herramienta principal para la demostración es la teoría de aproximación para funciones holomorfas en superficies de Riemann y es mucho más elaborada que las construcciones previas. Para explicar las ideas que están detrás de la demostración, supongamos que tenemos una curva compleja Z , compacta y con borde, contenida

en una bola $R\mathbb{B}_2$ de $\mathbb{C}^2$, $R > 0$, de forma que el borde bZ de la curva cae en la esfera borde $R\mathbb{S}^3 = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z| = R\}$ de la bola y la interseca de forma transversa. Dado un natural $j \in \mathbb{N}$, el primer paso es encontrar una familia finita de bandas en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ (una *banda* es el dominio comprendido entre dos hiperplanos afines reales paralelos) cuya unión H cumple que $bZ \subset H$ y la longitud de todo arco en H que conecta la esfera $R\mathbb{S}^3$ con la esfera $(R + 1/j^2)\mathbb{S}^3$ es grande en cierto sentido preciso, digamos del orden de $1/j$; véase la figura 2, izquierda. Esto puede conseguirse con trigonometría básica. En el segundo paso de la demostración, deformamos la

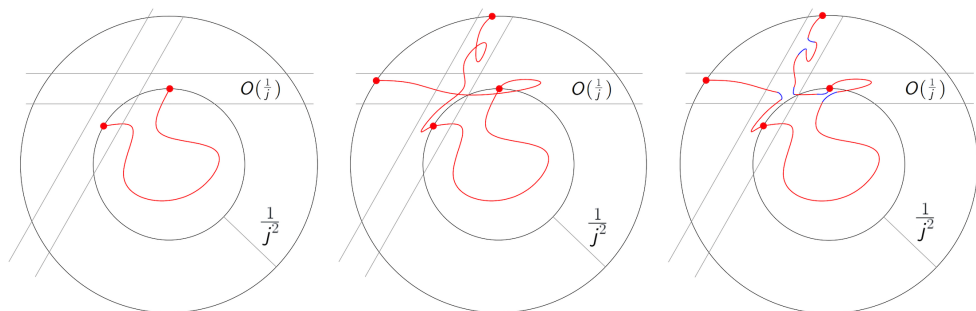


Figura 2: Pasos en la demostración del teorema 3.1.

curva compleja Z cerca del borde para llevarlo a la esfera $(R + 1/j^2)\mathbb{S}^3$ a través de la unión de bandas H (véase la figura 2, centro); esta es la parte difícil de la demostración. Este proceso produce con toda probabilidad autointersecciones en la nueva curva compleja (compacta y con borde) $\tilde{Z}$. Finalmente, aplicamos una cirugía a $\tilde{Z}$ consistente en sustituir cada autointersección por un pequeño cilindro (figura 2, derecha), con lo que podemos suponer que $\tilde{Z}$ sigue siendo embebida. Esto es de nuevo fácil, aunque usa un teorema clásico de Serre [30] que implica que toda curva compleja propiamente embebida en la bola $\mathbb{B}_2 \subset \mathbb{C}^2$ es el conjunto de ceros de una función holomorfa en $\mathbb{B}_2$. Resumiendo, al pasar de Z a $\tilde{Z}$ hemos incrementado el diámetro extrínseco de nuestra curva compleja en $1/j^2$ mientras que el intrínseco ha crecido del orden de $1/j$. Si repetimos este procedimiento de forma adecuada en un proceso recursivo, nuevamente Pitágoras está de nuestra parte y en el límite encontramos una curva compleja completa y propia en una bola de $\mathbb{C}^2$; véase la ecuación (1). Y como esta curva es límite de curvas complejas embebidas, si las aproximaciones son suficientemente próximas en cada paso, también será embebida.

Este método utiliza de forma fuerte la teoría de superficies de Riemann y no funciona en dimensiones más altas, por lo que el problema de Yang para hipersuperficies embebidas en $\mathbb{C}^n$ quedaba abierto para todo $n \geq 3$.

4. HIPERSUPERFICIES EMBEBIDAS EN LA BOLA DE $\mathbb{C}^n$

El paso de gigante en la comprensión del problema de Yang para hipersuperficies embebidas lo dio Globevnik en un artículo publicado en 2015 en *Annals of Mathematics*, donde estableció una solución positiva en dimensión arbitraria.

TEOREMA 4.1 ([22]). *En la bola $\mathbb{B}_n$ de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, existen hipersuperficies complejas completas y propiamente embebidas.*

La demostración de Globevnik es totalmente diferente a cualquier construcción previa en relación al problema de Yang. Sus ejemplos, en lugar de a través de inmersiones o embebimientos, se obtienen de forma implícita como conjuntos de nivel de funciones holomorfas en la bola. La idea es la siguiente: en un primer paso de la demostración, se construye una suerte de laberinto $L = \bigcup_{j \geq 1} L_j$ de subconjuntos compactos en $\mathbb{B}_n$, de forma que cada pieza L_j del laberinto es un dominio compacto en un hiperplano real (véase la figura 3). El laberinto consiste en infinitas piezas que

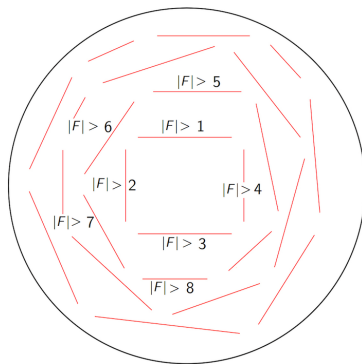


Figura 3: Demostración del teorema 4.1.

se acumulan en el borde de la bola y tiene la propiedad de que todo arco divergente $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{B}_n$ cuya imagen no corte a L (o corte únicamente a una cantidad finita de piezas) tiene longitud infinita. Esto sin más es fácil de conseguir, lo meritorio es que, además, L es tal que, en el segundo paso de la demostración, es posible encontrar una función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ de forma que, ordenando las piezas $L_1, L_2, \dots$ del laberinto de manera adecuada, tenemos que $|F| > j$ en L_j para todo $j \geq 1$ (figura 3). Observemos finalmente que si consideramos un conjunto de nivel no vacío $F^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$, $\zeta \in \mathbb{C}$, de F , que es una hipersuperficie compleja cerrada (posiblemente con singularidades) de $\mathbb{B}_n$, resulta que todo arco divergente en $F^{-1}(\zeta)$ también diverge en $\mathbb{B}_n$ y solo interseca a una cantidad finita de piezas de L , por lo que tiene longitud euclídea infinita. Tenemos por tanto que $F^{-1}(\zeta)$ es completa. Por el teorema de Sard, casi todos los conjuntos de nivel de F son regulares, luego hipersuperficies complejas propiamente embebidas en $\mathbb{B}_n$. Esto demuestra el teorema 4.1, pero mucho más, ya que los conjuntos de nivel $F^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, de F determinan una foliación de la bola por hipersuperficies complejas todas ellas completas.

TEOREMA 4.2 ([22]). *Existe una función holomorfa no constante $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$, $n \geq 2$, cuyos conjuntos de nivel $F^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, son todos completos. En particular, la bola $\mathbb{B}_n$ admite una foliación holomorfa por hipersuperficies complejas completas y propias (posiblemente con singularidades).*

Dedicaremos el resto de esta sección a esbozar la prueba del teorema 4.2. La herramienta principal en el segundo paso de la misma es la teoría de aproximación para funciones holomorfas en variedades de Stein (recordemos que $\mathbb{B}_n$ es de Stein). Esto se sustancia en el teorema de Oka-Weil, que data de los años 1930 y generaliza el teorema de Runge de 1885 para funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ [29].

TEOREMA 4.3 ([20, teorema 2.3.1]). *Sean X una variedad de Stein, $K \subset X$ un subconjunto compacto y holomórficamente convexo, y $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa definida en un entorno U de K en X . Entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe una función holomorfa $\tilde{h} : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|\tilde{h}(x) - h(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K$.*

Resulta evidente que para poder usar este resultado en la construcción de la función holomorfa F en la segunda parte de la demostración del teorema 4.2, habrá que construir el laberinto L en la primera parte teniendo buenas propiedades de convexidad holomorfa. Esto es precisamente lo que dificulta su construcción.

4.1. CONVEXIDAD HOLOMORFA Y POLINÓMICA

Recordemos como motivación que un compacto K en $\mathbb{R}^n$ es (*geométricamente*) *convexo* si y solo si para todo punto $q \in \mathbb{R}^n \setminus K$ existe un hiperplano afín $H \subset \mathbb{R}^n$ que separa q de K , en el sentido de que q y K se encuentran en distintas componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus H$. Esto es equivalente a que exista una función afín $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (dependiendo del punto q) tal que $f(q) > \max\{f(p) : p \in K\}$, puesto que entonces $H = f^{-1}(t)$ separa q de K para cualquier $t \in \mathbb{R}$ con $\max\{f(p) : p \in K\} < t < f(q)$.

De forma análoga, decimos que un compacto K en una variedad de Stein X es *holomórficamente convexo* si todo punto $x \in X \setminus K$ puede separarse de K por un conjunto de nivel del módulo de una función holomorfa en X , esto es, existe una función holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ (que depende del punto x) tal que

$$|F(x)| > \max\{|F(y)| : y \in K\}.$$

De los conjuntos compactos y holomórficamente convexos K de $\mathbb{C}^n$ decimos que son *polinomialmente convexos*, porque en este caso como función holomorfa $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ puede tomarse un polinomio complejo en $\mathbb{C}^n$. Ya que nuestro interés en la convexidad holomorfa se circunscribe a la construcción de un laberinto de compactos dentro de la bola $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$, pondremos a partir de ahora el foco en discutir condiciones que implican que un compacto dado en $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo; referimos a [31] para un texto monográfico sobre el tema. El caso $n = 1$ es muy fácil: un compacto $K \subset \mathbb{C}$ es polinomialmente convexo si y solo si su complementario $\mathbb{C} \setminus K$ es conexo, es decir, K no tiene agujeros; esta no es más que la condición suficiente para poder aplicar el teorema clásico de Runge. A pesar de que la tarea es mucho más complicada para $n \geq 2$, sabemos para empezar que todo compacto convexo de $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo. Nuestro laberinto será una unión de compactos disjuntos, así que nos interesa especialmente entender cuándo una unión de compactos es polinomialmente convexa. Sobre esto, la unión de dos conjuntos compactos, convexos y disjuntos de $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexa; la unión de tres ya no lo es en general. También es conocido que la unión de tres bolas cerradas en $\mathbb{C}^n$ disjuntas dos a dos

es polinomialmente convexa; la unión de cuatro ya no lo es en general. Nosotros usaremos de forma crucial el lema de Kallin, de 1965, que afirma lo siguiente:

TEOREMA 4.4 ([24]). *Si A_1 y A_2 son subconjuntos compactos, (geométricamente) convexos y disjuntos de $\mathbb{C}^n$ ($n \geq 2$) y $K_1 \subset A_1$ es un compacto polinomialmente convexo, entonces $K_1 \cup A_2$ es polinomialmente convexo.*

4.2. LABERINTOS TANGENTES

El paso más difícil en la demostración del teorema 4.2 por parte de Globevnik es la obtención del laberinto (figura 3). A continuación esbozaremos la construcción de un laberinto alternativo, mucho más sencillo pero igualmente válido para los siguientes pasos de la demostración, que se debe a Alarcón, Globevnik y López [8].

DEFINICIÓN 4.5. Dados un entero $n \geq 2$ y un par de números $R > r > 0$, decimos que un conjunto compacto $\mathcal{L}$ en la corona esférica $R\mathbb{B}_n \setminus r\overline{\mathbb{B}}_n = \{z \in \mathbb{C}^n : r < |z| < R\}$ es un *laberinto tangente* si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\mathcal{L}$ tiene una cantidad finita de componentes conexas $T_1, \dots, T_k$ ($k \in \mathbb{N}$).
- Cada componente T_j de $\mathcal{L}$ es una bola cerrada (redonda) en un hiperplano afín real en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, de forma que el hiperplano es perpendicular al vector de posición del centro x_j de la bola T_j . En particular, T_j es tangente a la esfera $|x_j|\mathbb{S}^{2n-1}$ en el punto x_j .
- Si $|x_i| = |x_j|$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, k\}$, entonces los radios de las bolas T_i y T_j son iguales, mientras que si $|x_i| < |x_j|$ entonces $T_i \subset |x_j|\mathbb{B}_n$.

Grosso modo, cada pieza del laberinto es una bola cerrada en un hiperplano afín real y las distintas piezas se distribuyen en niveles dependiendo de la norma del vector de posición de sus centros, es decir, de la distancia de la pieza al origen de $\mathbb{C}^n$. Además, las piezas de cada nivel son tangentes a una esfera centrada en el origen de $\mathbb{C}^n$; véase la figura 4. Este tipo de laberintos tienen dos propiedades fundamentales, que recogemos en el siguiente resultado:

LEMA 4.6 ([8]). *Sean $n \geq 2$ un entero y $R > r > 0$ números reales. Se tiene que:*

- (I) *Si $\mathcal{L}$ es un laberinto tangente en la corona esférica $R\mathbb{B}_n \setminus r\overline{\mathbb{B}}_n$, entonces el conjunto compacto $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup \mathcal{L} \subset \mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo.*
- (II) *Dados números $\delta > 0$ (grande) y $\tau > 0$ (pequeño), existe un laberinto tangente $\mathcal{L} \subset R\mathbb{B}_n \setminus r\overline{\mathbb{B}}_n$ que satisface las siguientes condiciones:*
 - *Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un arco que cruza la corona esférica $R\mathbb{B}_n \setminus r\overline{\mathbb{B}}_n$ (es decir, $|\gamma(0)| \leq r$ y $|\gamma(1)| \geq R$) y γ es disjunto del laberinto (es decir, $\gamma([0, 1]) \cap \mathcal{L} = \emptyset$), entonces γ tiene longitud euclídea mayor que δ .*
 - *Cada componente T de $\mathcal{L}$ tiene diámetro euclídeo menor que τ ; es decir, el radio de la bola euclídea T es menor que $\tau/2$.*

Para comprobar (I) usamos el lema de Kallin en un proceso inductivo finito. En efecto, como $r\overline{\mathbb{B}}_n$ y la primera pieza, digamos T_1 , del laberinto $\mathcal{L}$ son dos compactos

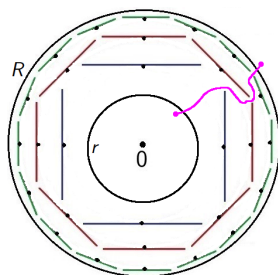


Figura 4: Un laberinto tangente con piezas en tres niveles distintos y un arco disjunto del laberinto que cruza la corona esférica.

convexos y disjuntos (véase la figura 5, izquierda), su unión $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup T_1$ es polinomialmente convexa. A continuación, por la geometría del laberinto tangente, podemos encontrar un compacto convexo $A_1 \subset \mathbb{C}^n$ que contiene al polinomialmente convexo $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup T_1$ y es disjunto de la siguiente pieza del laberinto, digamos la bola T_2 (figura 5, centro). Por el teorema 4.4 tenemos que $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup T_1 \cup T_2$ es también polinomialmente convexo. Del mismo modo, si llamamos T_3 a la siguiente pieza del laberinto, podemos encontrar un compacto convexo $A_2 \subset \mathbb{C}^n$ que contiene a $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup T_1 \cup T_2$ y es disjunto del compacto convexo T_3 (derecha en la figura 5), luego $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup T_1 \cup T_2 \cup T_3$ es polinomialmente convexo por el teorema 4.4. Si continuamos razonando de este modo, en k pasos (el número de componentes de $\mathcal{L}$) concluimos que $r\overline{\mathbb{B}}_n \cup \mathcal{L} = r\overline{\mathbb{B}}_n \cup \bigcup_{i=1}^k T_i$ es polinomialmente convexo.

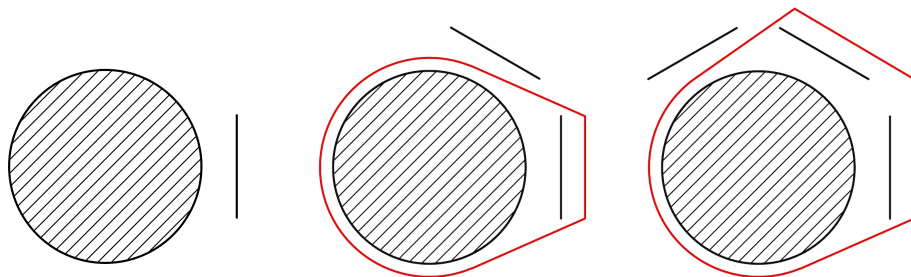


Figura 5: Prueba del lema 4.6, afirmación (I).

La demostración de (II) es más tediosa, si bien solamente requiere de trigonometría elemental. La clave para la primera condición es construir el laberinto con un número grande de niveles y elegir de forma adecuada los centros de las bolas de cada nivel. La idea es que cuando un arco γ que atraviesa la corona esférica sin cortar al laberinto supere cada uno de los niveles se encuentre de frente con una pieza del siguiente nivel. Como cada pieza es una bola en un hiperplano que es tangente a una esfera de $\mathbb{C}^n$ centrada en el origen, para evitar dicha pieza el arco γ se ve obligado a recorrer un camino que es aproximadamente perpendicular a su vector de posición (figura 4). Nuevamente, como ocurre en los argumentos descritos en las secciones 2

y 3, Pitágoras está aquí de nuestra parte y obliga a que la longitud euclídea del arco γ sea grande, tanto como queramos si el número de niveles que forman el laberinto es suficientemente alto y las piezas de cada nivel están bien distribuidas. Finalmente, la segunda condición en la propiedad (II) se garantiza sin más que reemplazar r y R por otro par de números $r < r' < R' < R$ suficientemente próximos entre sí, recordemos que las piezas del laberinto son trozos de hiperplanos. Los detalles de la construcción se pueden encontrar en [8, lema 2.4] y [1, lema 2.3].

4.3. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.2

Tomemos una sucesión de números reales $0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \dots$ con $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = \lim_{j \rightarrow \infty} R_j = 1$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, fijemos un laberinto tangente L_j en la corona esférica $R_j \mathbb{B}_n \setminus r_j \overline{\mathbb{B}}_n$ tal que todo arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n$ con $|\gamma(0)| \leq r_j$, $|\gamma(1)| \geq R_j$ y $\gamma([0, 1]) \cap L_j = \emptyset$ tiene longitud euclídea mayor que 1 (lema 4.6 (II)). Definiendo

$$L = \bigcup_{j \geq 1} L_j, \quad (2)$$

tenemos que todo arco divergente $[0, 1] \rightarrow \mathbb{B}_n$ que corte solo a una cantidad finita de los L_j tiene longitud infinita, ya que atraviesa infinitas de las coronas esféricas $R_j \mathbb{B}_n \setminus r_j \overline{\mathbb{B}}_n$ sin cortar al laberinto tangente L_j que contienen. Para terminar la demostración basta con asegurar la existencia de una función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|F| > j$ en L_j para todo $j \in \mathbb{N}$. En efecto, tendremos entonces que $F^{-1}(\zeta)$ interseca como mucho a una cantidad finita de los L_j para cada $\zeta \in \mathbb{C}$, con lo que la hipersuperficie compleja y propia $F^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$ resulta ser completa.

Para obtener una función F con estas propiedades construiremos de forma inductiva una sucesión de funciones holomorfas $F_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$, tales que:

$$(A_j) \quad |F_j(z) - F_{j-1}(z)| < 1/2^j \text{ para todo } z \in r_j \overline{\mathbb{B}}_n \text{ y } j \geq 2.$$

$$(B_j) \quad |F_j(z)| > j + 1 \text{ para todo } z \in L_j \text{ y } j \geq 1.$$

Supuesta la existencia de esta sucesión, las propiedades (A_j) garantizan la existencia de una función holomorfa límite

$$F = \lim_{j \rightarrow \infty} F_j : \mathbb{B}_n = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} r_j \overline{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{C}$$

que, a la vista también de (B_j) , satisface la desigualdad $|F| \geq |F_j| - |F - F_j| > j$ en L_j para todo $j \in \mathbb{N}$.

Así que solo nos queda explicar la inducción. Para la base tomamos cualquier función holomorfa $F_1 : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ que cumpla la propiedad (B_1) , es decir, $|F_1| > 2$ en L_1 . Notemos que (A_1) es vacía. Para el paso inductivo, fijemos $j \geq 2$, supongamos que tenemos una función holomorfa F_{j-1} en $\mathbb{B}_n$ y consideremos la función holomorfa $h : r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup L_j \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h|_{r_j \overline{\mathbb{B}}_n} = F_{j-1}, \quad h|_{L_j} = j + 2;$$

recordemos que $r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cap L_j = \emptyset$. Como el compacto $r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup L_j$ es polinomialmente convexo por el lema 4.6 (I), el teorema de Oka-Weil (teorema 4.3) nos proporciona una función holomorfa $F_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ con $|F_j - h| < 1/2^j$ en $r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup L_j$, lo que claramente implica las condiciones (A_j) y (B_j). Esto cierra la inducción y completa la demostración del teorema 4.2.

5. LAS HIPERSUPERFICIES COMPLEJAS COMPLETAS DE LA BOLA VIENEN EN FOLIACIONES

En un principio no quedaba claro si la construcción de Globevnik en [22] proporcionaba un tipo, digamos, poco común o muy especial de solución al problema de Yang embebido para hipersuperficies de la bola. Nótese que sus ejemplos de hipersuperficies complejas completas y propiamente embebidas en $\mathbb{B}_n$ (teorema 4.1) se encuentran como hojas de foliaciones holomorfas de $\mathbb{B}_n$ por hipersuperficies del mismo tipo (teorema 4.2). Tienen por tanto la particularidad de poder embeberse en una foliación de la bola por hipersuperficies complejas todas ellas con estas mismas propiedades. Cabe entonces y es natural preguntarse si esto es en efecto una peculiaridad de los ejemplos de Globevnik o si, por el contrario, toda hipersuperficie compleja completa y propia en $\mathbb{B}_n$ es una hoja en una foliación holomorfa de $\mathbb{B}_n$ por tales hipersuperficies.

Para tratar de decidir sobre esta cuestión, recordemos por un lado que en el momento de la aparición del artículo de Globevnik ya había disponibles en la literatura varias construcciones diferentes de subvariedades complejas completas y propiamente embebidas en bolas $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ (sección 2), e incluso de hipersuperficies en el caso de dimensión más baja $n = 2$ (teorema 3.1), y que ninguna de ellas es implícita. Además, Alarcón, Globevnik y López desarrollaron entre 2017 y 2019 una nueva técnica de construcción de tales hipersuperficies en $\mathbb{B}_n$, para dimensión arbitraria $n \geq 2$, usando un método diferente al de Globevnik (aunque también basado en los laberintos tangentes) que permite cierto control sobre la topología de los ejemplos y, de hecho, permite prescribir completamente su topología en el caso $n = 2$ [8, 7]. A la vista de esta variedad de construcciones, uno podría estar inclinado a pensar que los ejemplos de Globevnik son ciertamente muy especiales.

En la otra dirección, por un teorema de Serre de 1953 [30] al que ya nos hemos referido anteriormente, toda hipersuperficie compleja cerrada $V \subset \mathbb{B}_n$ (posiblemente con singularidades) es un conjunto de nivel de una función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$, luego es una hoja en una foliación holomorfa de $\mathbb{B}_n$ por hipersuperficies del mismo tipo, a saber, la foliación formada por los conjuntos de nivel $F^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, de dicha función. (Esto es de hecho cierto si reemplazamos la bola $\mathbb{B}_n$ por cualquier variedad de Stein X con segundo grupo de cohomología trivial $H^2(X; \mathbb{Z}) = 0$). Así que uno podría del mismo modo estar inclinado a pensar que si la hipersuperficie dada $V \subset \mathbb{B}_n$ es completa, entonces es posible encontrar una tal función $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ de manera que todos sus conjuntos de nivel sean completos.

Resulta que esto último es lo que ocurre. Sorprendentemente, el siguiente resultado, establecido por Alarcón en 2022, muestra que no es necesario imponer que

la hipersuperficie inicial V sea completa para garantizar que lo sean el resto de conjuntos de nivel de F .

TEOREMA 5.1 ([1]). *Para cada hipersuperficie compleja propia (posiblemente con singularidades) $V \subset \mathbb{B}_n$, $n \geq 2$, existe una función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F^{-1}(0) = V$ y la hipersuperficie compleja $F^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$ es completa para todo $\zeta \in F(\mathbb{B}_n) \setminus \{0\}$.*

En particular, toda hipersuperficie V de este tipo puede realizarse como una hoja en una foliación holomorfa (posiblemente singular) de $\mathbb{B}_n$ por hipersuperficies complejas propias que son todas, excepto quizás V , completas. Si la hipersuperficie dada V es completa, entonces la foliación puede tomarse con todas sus hojas completas.

El método usado en la demostración sigue en líneas generales el desarrollado por Globevnik en [22], pero presenta varias diferencias y novedades muy significativas. Como antes, la función holomorfa $F : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ que satisface la conclusión del teorema se obtiene como límite de una sucesión de funciones holomorfas $F_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ ($j \in \mathbb{N}$), y se garantiza que cada conjunto de nivel de F , excepto quizás $F^{-1}(0) = V$, corta como mucho a una cantidad finita de piezas de un determinado laberinto infinito de compactos en $\mathbb{B}_n$, asegurando así que todo conjunto de nivel $F^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, es completo. Una novedad fundamental es que la prueba requiere construir el laberinto y la función holomorfa límite F al mismo tiempo en un proceso inductivo, es decir, el laberinto no puede fijarse a priori como se hizo en la demostración del teorema 4.2. Además, el laberinto depende de manera fuerte de la hipersuperficie dada V , y las componentes del laberinto que cortan a V son tratadas de una forma totalmente diferente a las que no lo hacen; en particular, las primeras deben elegirse con diámetro pequeño en cierto sentido preciso (el diámetro del resto de piezas es irrelevante).

La demostración también requiere de la siguiente versión del teorema de Oka-Weil incluyendo interpolación.

TEOREMA 5.2 ([20, teorema 2.8.4]). *En las hipótesis del teorema 4.3, si además $V \subset X$ es una subvariedad compleja cerrada y h es holomorfa en un entorno U de $K \cup V$ en X , entonces para cada $\epsilon > 0$ existe una función holomorfa $\tilde{h} : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $|\tilde{h}(x) - h(x)| < \epsilon$ para todo $x \in K$ y $\tilde{h}(x) = h(x)$ para todo $x \in V$. Si además $H^2(X; \mathbb{Z}) = 0$ y $V = h^{-1}(0)$, entonces podemos elegir $\tilde{h}$ con $\tilde{h}^{-1}(0) = V$.*

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5.1. Tomemos una función holomorfa $F_0 : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ con $F_0^{-1}(0) = V$; existe por Serre [30]. Tomemos también una sucesión de números reales $0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \dots$ con $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = \lim_{j \rightarrow \infty} R_j = 1$. La demostración consiste en construir una sucesión $S_j = \{F_j, L_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, donde

- $F_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ es una función holomorfa y
- L_j es un laberinto tangente en la corona esférica $R_j \mathbb{B}_n \setminus r_j \overline{\mathbb{B}}_n$ (definición 4.5),

de forma que las siguientes condiciones se cumplen para todo $j \in \mathbb{N}$:

- (a_j) $|F_j(z) - F_{j-1}(z)| < 1/2^j$ para todo $z \in r_j \overline{\mathbb{B}}_n$.
- (b_j) $F_j^{-1}(0) = V$.
- (c_j) Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{B}_n$ es un arco con $|\gamma(0)| \leq r_j$, $|\gamma(1)| \geq R_j$ y $\gamma([0, 1]) \cap L_j = \emptyset$, entonces la longitud euclídea de γ es mayor que 1.

esto es, que cumple (b_{j-1}) . Teniendo en cuenta esta condición y que $V \cap R_j \overline{\mathbb{B}}_n$ es compacto, podemos fijar un número $\tau > 0$ tan pequeño que

$$|F_{j-1}(z)| < 1/j \text{ para todo } z \in R_j \overline{\mathbb{B}}_n \text{ con } \text{dist}(z, V) < \tau, \quad (3)$$

donde dist denota la distancia euclídea. Usemos ahora el lema 4.6 (II) para obtener un laberinto tangente L_j en $R_j \overline{\mathbb{B}}_n \setminus r_j \overline{\mathbb{B}}_n$ que satisface (c_j) y tal que

$$\text{diam}(T) < \tau \text{ para toda componente conexa } T \text{ de } L_j. \quad (4)$$

A continuación dividimos el laberinto L_j en dos partes,

$$L_j = \Lambda_V \cup \Lambda_0,$$

donde Λ_V es la unión de las componentes conexas de L_j que intersecan a V y Λ_0 es la unión de aquellas que no lo hacen. Se sigue que tanto Λ_V como Λ_0 consisten en una cantidad finita de componentes de L_j (si bien alguno de los dos podría ser vacío) y $\Lambda_V \cap \Lambda_0 = \emptyset$. Véase la figura 6, derecha. Además, (3) y (4) implican que

$$|F_{j-1}(z)| < 1/j \text{ para todo } z \in \Lambda_V. \quad (5)$$

Como $L_j \cap r_j \overline{\mathbb{B}}_n = \emptyset$ y el compacto $r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup L_j = (r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup \Lambda_V) \cup \Lambda_0$ es polinomialmente convexo, el teorema 5.2, aplicado con un número $0 < \delta < 1$ y la función holomorfa $h : r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup L_j \cup V \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$h|_{r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup \Lambda_V \cup V} = F_{j-1}, \quad h|_{\Lambda_0} = j + 1,$$

nos proporciona una función holomorfa $F_j : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

- $|F_j(z) - F_{j-1}(z)| < \delta$ para todo $z \in r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup \Lambda_V$,
- $|F_j(z)| > j$ para todo $z \in \Lambda_0$ y
- $F_j^{-1}(0) = V$.

Téngase en cuenta que $(r_j \overline{\mathbb{B}}_n \cup \Lambda_V \cup V) \cap \Lambda_0 = \emptyset$ y que $F_{j-1}^{-1}(0) = V$. Es claro a la vista de estas propiedades y de (5) que F_j satisface las condiciones (a_j) , (b_j) y (d_j) del proceso inductivo siempre que tomemos el número $\delta > 0$ suficientemente pequeño. Esto cierra la inducción y completa la demostración del teorema 5.1. $\square$

6. ¿QUÉ TAN ABUNDANTES SON LAS FUNCIONES DE GLOBEVNIK?

Tampoco quedaba claro en un principio qué tan grande es el conjunto de las funciones de Globevnik, esto es, funciones holomorfas $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}$ ($n \geq 2$) cuyos conjuntos de nivel son todos hipersuperficies completas. Sabemos por el teorema 4.2 que este conjunto es no vacío, mientras que el teorema 5.1 insinúa que hay muchas funciones de Globevnik (al menos una para cada hipersuperficie compleja completa y propia de la bola), pero uno podría estar inclinado a pensar, y estaría en lo cierto, que es realmente muy complicado encontrar ejemplos. Por supuesto, no es posible dar

un ejemplo explícito. Nada de esto es óbice, no obstante, para que las funciones de Globevnik pudieran formar un subconjunto más o menos grande del espacio $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ de todas las funciones holomorfas en la bola. Sorprendentemente, la realidad es que casi todas las funciones en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ son de Globevnik, veamos en qué sentido.

Consideremos en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ la topología compacto-abierta, que fue introducida por Arens en 1946 [11] y es la topología natural en cualquier espacio de aplicaciones continuas entre espacios topológicos. En esta topología, una base de entornos de una función $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ viene dada por los conjuntos de la forma

$$U(f, K, \epsilon) = \{g \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n) : \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \epsilon\},$$

donde $K \subset \mathbb{B}_n$ es un compacto y $\epsilon > 0$. En este caso, esta topología coincide con la de la convergencia uniforme sobre compactos: una sucesión $f_j \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ converge a una función $f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ si y solo si la sucesión de restricciones $f_j|_K$ a cualquier compacto $K \subset \mathbb{B}_n$ converge uniformemente en K a $f|_K$; véase [13, corolario 2.13]. Además, $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ es completamente metrizable, luego un espacio de Baire por el teorema de la categoría de Baire [32, corolario 25.4, p. 186]. En efecto, si para cada número $0 < r < 1$ y cada par de funciones $f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ definimos

$$d_r(f, g) = \max_{x \in r\mathbb{B}_n} |f(x) - g(x)|,$$

entonces para cualquier sucesión $0 < r_1 < r_2 < \dots$ con $\lim_{j \rightarrow \infty} r_j = 1$ se tiene que la expresión

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{d_{r_j}(f, g)}{1 + d_{r_j}(f, g)}, \quad f, g \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$$

define una distancia completa en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ que induce la topología compacto-abierta; véanse, por ejemplo, [11] o [32, §43G].

En teoría de la categoría, un conjunto en un espacio topológico se dice *residual* (o *comeagre*)¹ si contiene una intersección numerable de subespacios abiertos y densos. Todo conjunto residual en un espacio de Baire es denso (esta propiedad, cuyo recíproco no es cierto en general, define los espacios de Baire), y toda intersección numerable de conjuntos residuales es residual. Por tanto, los conjuntos residuales en espacios de Baire son considerablemente grandes; son densos en un sentido fuerte. Se dice que una propiedad de elementos en un espacio de Baire es *genérica*, o que un elemento *genérico* satisface la propiedad, si la disfrutan todos los elementos de un conjunto residual [25, definición 8.5]. Así, las propiedades genéricas son aquellas que son satisfechas por casi todos los elementos del espacio en este sentido topológico.

Lo que sigue es una simplificación de un resultado de Charpentier y Kosiński.

TEOREMA 6.1 ([15]). *Una función genérica en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$, $n \geq 2$, satisface que todos sus conjuntos de nivel son completos, es decir, es de Globevnik.*

¹No conocemos en la literatura en español una traducción de este concepto. Usando la terminología introducida originalmente por Baire en 1899 [12], un subconjunto de un espacio topológico es residual si su complementario es de *primera categoría*, es decir, está contenido en una unión numerable de cerrados con interior vacío.

Hablando sin mucha precisión, el teorema afirma que si elegimos al azar una función en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$, la probabilidad de que sea de Globevnik es 1.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos números $0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \dots$ y laberintos tangentes $L_j \subset R_j \mathbb{B}_n \setminus r_j \overline{\mathbb{B}}_n$ como en la demostración del teorema 4.2, y consideremos el laberinto infinito $L = \bigcup_{j \geq 1} L_j \subset \mathbb{B}_n$ como en (2). Para cada par de números $i, j \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto

$$U_i^j = \{f \in \mathcal{O}(\mathbb{B}_n) : |f(x)| > i \text{ para todo } x \in L_j\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}_n).$$

Es claro por compacidad de L_j que $U_i^j \subset \mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ es un conjunto abierto (en la topología compacto-abierto) para cada $i, j \in \mathbb{N}$, luego también lo es

$$U_i = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_i^j$$

para cada $i \in \mathbb{N}$. Además, una aplicación del teorema de Oka-Weil (teorema 4.3) similar a la que se hace en la demostración del teorema 4.2 muestra que U_i es denso en $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que

$$U = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} U_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_i^j$$

es un conjunto residual en el espacio de Baire $\mathcal{O}(\mathbb{B}_n)$. Para terminar, basta comprobar que toda función en U es de Globevnik. En efecto, tomemos $f \in U$ y $\zeta \in f(\mathbb{B}_n)$, y comprobemos que la hipersuperficie compleja propia $f^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$ es completa. Para ello, razonamos por reducción al absurdo y suponemos que existe un arco divergente $\gamma : [0, 1) \rightarrow f^{-1}(\zeta)$ con longitud finita. Como $f^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$ es propia, el arco γ también diverge en $\mathbb{B}_n$, así que, por las propiedades del laberinto $L = \bigcup_{j \geq 1} L_j$, tenemos que $\gamma([0, 1))$ deja de intersectar a lo más una cantidad finita de los laberintos tangentes L_j . Existe por tanto $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\gamma([0, 1)) \cap L_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \geq j_0. \quad (6)$$

Por otro lado, como $f \in U$ tenemos que para todo $i \in \mathbb{N}$ existe $j(i) \in \mathbb{N}$ tal que $f \in U_i^{j(i)}$, es decir, $|f(x)| > i$ para todo $x \in L_{j(i)}$. Podemos definir de este modo una aplicación $j : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Es claro que su imagen $\{j(i) : i \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto infinito, luego existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $i_0 > |\zeta|$ y $j(i_0) > j_0$. A la vista de (6), podemos finalmente elegir un número $t \in [0, 1)$ tal que $\gamma(t) \in L_{j(i_0)}$, luego $|f(\gamma(t))| > i_0 > |\zeta|$, siendo esto imposible ya que γ toma valores en $f^{-1}(\zeta)$. Esta contradicción completa la demostración del teorema. $\square$

7. GENERALIZACIONES

Los resultados de las secciones anteriores admiten generalizaciones en varias direcciones. Apuntamos aquí algunas de las más significativas y referimos a [2] para ampliar información. Una primera extensión del teorema 5.1 nos dice que, bajo hipótesis necesarias, el resultado sigue siendo cierto en codimensión arbitraria y que, además, las foliaciones pueden tomarse no singulares.

TEOREMA 7.1 ([1]). *Sean n y q un par de enteros con $1 \leq q < n$. Sea V una subvariedad compleja propiamente embebida de codimensión q en $\mathbb{B}_n$, no necesariamente conexa, y supongamos que V está contenida en una fibra de una sumersión holomorfa $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}^q$. Entonces existe una sumersión holomorfa $f : \mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}^q$ con las siguientes propiedades:*

- V es unión de componentes conexas de $f^{-1}(0)$.
- La fibra $f^{-1}(\zeta) \subset \mathbb{B}_n$ es una subvariedad compleja completa y propiamente embebida de codimensión q para todo $\zeta \in f(\mathbb{B}_n) \setminus \{0\}$.
- $f^{-1}(0) \setminus V$ es o bien vacío o bien una subvariedad compleja completa y propiamente embebida de codimensión q en $\mathbb{B}_n$.
- Si la subvariedad dada V es una fibra de una sumersión holomorfa $\mathbb{B}_n \rightarrow \mathbb{C}^q$, entonces f puede tomarse con $f^{-1}(0) = V$.

En particular, V se embebe en una foliación holomorfa y no singular de $\mathbb{B}_n$ por subvariedades complejas propiamente embebidas de codimensión q todas las cuales, excepto quizás las componentes conexas V , son completas.

La demostración de este resultado es, aunque técnicamente más complicada, análoga a la del teorema 5.1, pero usando una extensión del teorema de Oka-Weil para funciones holomorfas sin puntos críticos y, más generalmente, sumersiones holomorfas en variedades de Stein, obtenida por Forstnerič [19, 21]. Los resultados en [19, 21] implican, además, que toda hipersuperficie compleja propiamente embebida en $\mathbb{B}_n$ es el conjunto de ceros de una función holomorfa en $\mathbb{B}_n$ sin puntos críticos. Así, en el caso $q = 1$, el teorema 7.1 se aplica con cualquier hipersuperficie compleja propiamente embebida $V \subset \mathbb{B}_n$. En el caso $q > 1$ resulta evidente que la hipótesis sobre V en el enunciado del teorema es necesaria y no puede relajarse.

El teorema 7.1 tiene la siguiente consecuencia inmediata:

COROLARIO 7.2. *Para cada par de enteros n y q con $1 \leq q < n$, existe una foliación holomorfa y no singular de $\mathbb{B}_n$ por subvariedades complejas completas, conexas y propiamente embebidas de codimensión q .*

Una segunda línea de generalizaciones del teorema 5.1 consiste en reemplazar la bola $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{C}^n$ por una variedad de Stein arbitraria. En esta dirección tenemos el siguiente resultado, cuya demostración sigue la misma línea argumental que las anteriores y, además, usa de manera fuerte que toda variedad de Stein se embebe propia y holomórficamente en $\mathbb{C}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

TEOREMA 7.3 ([1]). *Sea X una variedad de Stein de dimensión ≥ 2 provista de una métrica riemanniana. Sea $V \subset X$ una hipersuperficie compleja propiamente embebida y supongamos que el fibrado normal $N_{V/X}$ de V en X es trivial. Entonces existe una función holomorfa $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ con las siguientes propiedades:*

- $V \subset f^{-1}(0)$.
- El conjunto de nivel $f^{-1}(\zeta) \subset X$ es una hipersuperficie compleja completa y propia (posiblemente con singularidades) para todo $\zeta \in f(X) \setminus \{0\}$.

- $f^{-1}(0) \setminus V$ es o bien vacío o bien una hipersuperficie compleja completa y propia (posiblemente con singularidades) en X .
- f no tiene puntos críticos en V .

La hipótesis sobre el fibrado normal $N_{V/X}$ en el teorema 7.3 es necesaria por un resultado de Docquier y Grauert [17] de 1960. Siempre se cumple si $X = \mathbb{B}_n$. La completitud en el teorema se refiere a la métrica inducida en las hipersuperficies por la métrica dada en X . Esta última es totalmente arbitraria; en particular, no se asume que sea completa (el resultado sería trivial en ese caso).

Destacamos también que el corolario 7.2 admite la siguiente generalización para variedades de Stein:

TEOREMA 7.4 ([5]). *Sea X una variedad de Stein de dimensión $n > 1$ provista de una métrica riemanniana. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$ con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n - 1$ existe una foliación holomorfa y no singular de X por subvariedades complejas completas, conexas y propiamente embebidas de dimensión k .*

En particular, en toda variedad de Stein de dimensión mayor que uno existe una foliación holomorfa y no singular por hipersuperficies complejas conexas y propiamente embebidas, siendo todas ellas completas con respecto a cualquier métrica riemanniana fijada en la variedad. Bajo hipótesis adicionales sobre la variedad de Stein X , la conclusión del teorema 7.4 también es válida en el caso $1 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Para terminar, apuntamos que existen en la literatura construcciones de foliaciones holomorfas de la bola, y de otras variedades de Stein, por subvariedades complejas completas y propiamente embebidas que incluyen cierto control de la topología e incluso la estructura compleja de las hojas [4, 14, 5]. Para ello se aplica un método distinto, inspirado por las ideas en [8], que usa automorfismos del ambiente y, en el caso de otras variedades de Stein, requiere de una construcción más elaborada de los laberintos. Pero eso es una larga historia que dejamos para otro día.

AGRADECIMIENTOS

Esta publicación es parte de los proyectos de I+D+i PID2020-117868GB-I00 y PID2023-150727NB-I00, y de la Unidad de Excelencia «María de Maeztu» IMAG CEX2020-001105-M, financiados por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/, España.

REFERENCIAS

- [1] A. ALARCÓN, Complete complex hypersurfaces in the ball come in foliations, *J. Differential Geom.* **121** (2022), 1–29.
- [2] A. ALARCÓN, The Yang problem for complete bounded complex submanifolds: a survey. En: *Cutting-Edge Mathematics, RSME 2022*. RSME Springer Series **13**, 1–25. Springer, Cham, 2024.
- [3] A. ALARCÓN Y F. FORSTNERIČ, Every bordered Riemann surface is a complete proper curve in a ball, *Math. Ann.* **357** (2013), 1049–1070.

- [4] A. ALARCÓN Y F. FORSTNERIČ, A foliation of the ball by complete holomorphic discs, *Math. Z.* **296** (2020), 169–174.
- [5] A. ALARCÓN Y F. FORSTNERIČ, Complete nonsingular holomorphic foliations on Stein manifolds, *Mediterr. J. Math.* **21** (2024), paper no. 25, 16 pp.
- [6] A. ALARCÓN, F. FORSTNERIČ Y F. J. LÓPEZ, *Minimal surfaces from a complex analytic viewpoint*, Springer Monogr. Math., Springer, Cham, 2021.
- [7] A. ALARCÓN Y J. GLOBEVNIK, Complete embedded complex curves in the ball of $\mathbb{C}^2$ can have any topology, *Anal. PDE* **10** (2017), 1987–1999.
- [8] A. ALARCÓN, J. GLOBEVNIK Y F. J. LÓPEZ, A construction of complete complex hypersurfaces in the ball with control on the topology, *J. Reine Angew. Math.* **751** (2019), 289–308.
- [9] A. ALARCÓN Y F. J. LÓPEZ, Null curves in $\mathbb{C}^3$ and Calabi-Yau conjectures, *Math. Ann.* **355** (2013), 429–455.
- [10] A. ALARCÓN Y F. J. LÓPEZ, Complete bounded embedded complex curves in $\mathbb{C}^2$, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **18** (2016), 1675–1705.
- [11] R. F. ARENS, A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math. (2)* **47** (1946), 480–495.
- [12] R. BAIRE, Sur les fonctions de variables réelles, *Ann. Mat. Pura Appl. (3)* **3** (1899), 1–123.
- [13] G. E. BREDON, *Topology and geometry*, Grad. Texts in Math. **139**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] S. CHARPENTIER Y Ł. KOSIŃSKI, Construction of labyrinths in pseudoconvex domains, *Math. Z.* **296** (2020), 1021–1025.
- [15] S. CHARPENTIER Y Ł. KOSIŃSKI, Wild boundary behaviour of holomorphic functions in domains of $\mathbb{C}^N$, *Indiana Univ. Math. J.* **70** (2021), 2351–2367.
- [16] T. H. COLDING Y W. P. MINICOZZI, II, Minimal submanifolds, *Bull. London Math. Soc.* **38** (2006), 353–395.
- [17] F. DOCQUIER Y H. GRAUERT, Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* **140** (1960), 94–123.
- [18] B. DRINOVEC DRNOVŠEK, Complete proper holomorphic embeddings of strictly pseudoconvex domains into balls, *J. Math. Anal. Appl.* **431** (2015), 705–713.
- [19] F. FORSTNERIČ, Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds, *Acta Math.* **191** (2003), 143–189.
- [20] F. FORSTNERIČ, *Stein manifolds and holomorphic mappings*, Ergeb. Math. Grenzgeb (3) **56**, Springer, Cham, 2017.
- [21] F. FORSTNERIČ, Divisors defined by noncritical functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **146** (2018), 2985–2994.
- [22] J. GLOBEVNIK, A complete complex hypersurface in the ball of $\mathbb{C}^N$, *Ann. of Math. (2)* **182** (2015), 1067–1091.
- [23] P. W. JONES, A complete bounded complex submanifold of $\mathbb{C}^3$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **76** (1979), 305–306.

- [24] E. KALLIN, Polynomial convexity: The three spheres problem, En: *Proc. Conf. Complex Analysis (Minneapolis, 1964)*, 301–304. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
- [25] A. S. KECHRIS, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math. **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [26] S. KOBAYASHI Y J. EELLS JR, *Proceedings of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965*, Nippon Hyoronsha Co., Ltd., Tokyo, 1966.
- [27] H. B. LAWSON JR, *Lectures on minimal submanifolds. Vol. I*, Math. Lecture Ser. **9**, Publish or Perish, Inc., Wilmington, DE, 1980.
- [28] F. MARTÍN, M. UMEHARA Y K. YAMADA, Complete bounded holomorphic curves immersed in $\mathbb{C}^2$ with arbitrary genus, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 3437–3450.
- [29] C. RUNGE, Zur Theorie der Analytischen Functionen, *Acta Math.* **6** (1885), 245–248.
- [30] J.-P. SERRE, Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, 1953*, Georges Thone, Liège, 1953, pp. 57–68.
- [31] E. L. STOUT, *Polynomial convexity*, Progr. Math. **261**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.
- [32] S. WILLARD, *General topology*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1970.
- [33] P. YANG, Curvature of complex submanifolds of C^n , *Proc. Sympos. Pure Math.* **30** (1976) II, 135–137.
- [34] P. YANG, Curvatures of complex submanifolds of $\mathbf{C}^n$, *J. Differential Geometry* **12** (1977), 499–511.

ANTONIO ALARCÓN, DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA E INSTITUTO DE MATEMÁTICAS (IMAG), UNIVERSIDAD DE GRANADA

Correo electrónico: alarcon@ugr.es

Página web: <https://www.ugr.es/~alarcon>