La Gaceta de la RSME, Vol. 28 (2025), Núm. 2, Págs. 231–252
https://doi.org/10.63427/IWPT1312

Una visión categórica de la noción de espacio métrico

por

Igor Arrieta, Jone Lopez de Gamiz Zearra y Andoni Zozaya

Resumen. Se sabe que las estructuras matemáticas se agrupan en categorías y que la teoría de categorías sirve para estudiar estas estructuras y sus relaciones con otras. Sin embargo, y desde un punto de vista totalmente diferente, los propios objetos matemáticos pueden tener individualmente la estructura de una categoría.

En este artículo, siguiendo una brillante idea de Lawvere, explicamos cómo un espacio métrico puede ser visto por sí mismo como una categoría, y vemos que nociones propias de los espacios métricos son casos particulares de conceptos más generales expresables de manera puramente categórica. En particular, prestamos especial atención a la completitud de Cauchy, y caracterizamos esta propiedad en términos puramente categóricos.

1. Introducción

Habitualmente, la teoría de categorías se introduce abstrayendo la idea de tener una colección de objetos matemáticos junto con ciertas aplicaciones entre ellos, de manera que estas aplicaciones se puedan componer y existan aplicaciones distinguidas que actúan como elemento neutro con respecto a la composición. Así, los conjuntos y las aplicaciones, los grupos y sus homomorfismos, y los espacios topológicos y las aplicaciones continuas forman naturalmente categorías.

Sin embargo, adoptando una perspectiva diferente, individualmente algunos objetos matemáticos como un grupo o un conjunto ordenado pueden también ser vistos como categorías (ver los ejemplos 2.3 (iv)-(v)). Además, conceptos conocidos en grupos o conjuntos ordenados resultan ser casos particulares de nociones propias de la teoría de categorías. Verbigracia, los homomorfismos entre grupos o las aplicaciones monótonas entre conjuntos ordenados corresponden a los funtores entre estas categorías asociadas, los supremos e ínfimos de un conjunto ordenado pueden ser vistos como colímites y límites de la correspondiente categoría, o las representaciones de grupos no son más que ciertos funtores.

Siguiendo este punto de vista, en este artículo exploramos una sorprendente observación de Lawvere que consiste en ver cada espacio métrico como una determinada categoría. Así, conceptos fundamentales del análisis como la completitud de Cauchy se pueden formular en un lenguaje puramente categórico y pueden ser estudiados utilizando procedimientos generales de la teoría de categorías. Recíprocamente, esas nociones analíticas se pueden interpretar en categorías de naturaleza muy distinta, lo cual ofrece una visión enriquecedora de otros campos matemáticos.

La teoría que aquí se desarrolla para espacios métricos se puede generalizar a lo que habitualmente se conoce como *topología monoidal* (o teoría de categorías mónada-cuantal enriquecidas), un área activa y fructífera de investigación que proporciona un marco general para el estudio categórico de distintas estructuras matemáticas tales como espacios topológicos, espacios métricos, uniformidades, conjuntos ordenados o multicategorías, y permite estudiar todas ellas de manera unificada. Referimos el lector a la monografía [3] para una introducción.

2. Teoría de categorías

Aunque la finalidad de este artículo no sea el desarrollo abstracto de la teoría de categorías, se quiere dotar al lector de todos los instrumentos necesarios para su comprensión, ya que solo se asume un conocimiento matemático básico. Por consiguiente, en esta sección se expondrán estos conceptos de forma detallada.

Definición 2.1. Una *categoría* $\mathcal{C}$ es una estructura que consta de

(i) una clase de *objetos*, $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$,

(ii) una clase de *morfismos* tal que cada par de objetos (A, B) tiene asignado un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$, los *morfismos de A a B*, cuyos elementos se representarán con expresiones del tipo $f\colon A \to B$,

(iii) para cualquier terna (A, B, C) de objetos de $\mathcal{C}$, una operación que asigna a cada par de morfismos $f \in \mathcal{C}(A, B)$ y $g \in \mathcal{C}(B, C)$ un morfismo $g \circ f \in \mathcal{C}(A, C)$, denominado *composición de f con g*,

(iv) para cada objeto A de $\mathcal{C}$, un morfismo $\mathrm{Id}_A \in \mathcal{C}(A, A)$ denominado *identidad de A*,

con las siguientes propiedades:

- la composición de morfismos es *asociativa*, es decir,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

  para cualesquiera morfismos $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ y $h\colon C \to D$;
- para cualquier morfismo $f\colon A \to B$ de $\mathcal{C}$, se verifica $f \circ \mathrm{Id}_A = f$ y $\mathrm{Id}_B \circ f = f$.

Un morfismo $f\colon A \to B$ en la categoría $\mathcal{C}$ es un *isomorfismo* si existe otro morfismo $g\colon B \to A$ en $\mathcal{C}$ tal que $g \circ f = 1_A$ y $f \circ g = 1_B$.

Observación 2.2. La definición anterior corresponde en realidad a la noción de categoría *localmente pequeña* puesto que se asume que $\mathcal{C}(A, B)$ es un conjunto para objetos (A, B) y no una clase general. Sin embargo, aquí nos referiremos a ellas simplemente como categorías. Asimismo, diremos que una categoría es *pequeña* si los morfismos (y por tanto, los objetos) forman un conjunto.

Ejemplos 2.3. (i) *La categoría de conjuntos*, Set, es la categoría cuyos objetos son los conjuntos y cuyos morfismos son las aplicaciones entre conjuntos. En este caso, la composición es la habitual entre aplicaciones y los morfismos identidad son las aplicaciones identidad usuales.

(ii) Los objetos de *la categoría de grupos*, Grp, son grupos y los morfismos son homomorfismos de grupos. También en este caso la composición y los morfismos identidad son los habituales. Asimismo, Ab es la categoría cuyos objetos son los grupos abelianos y los morfismos son los homomorfismos de grupos.

Del mismo modo, cualquier estructura algebraica —anillos, módulos, espacios vectoriales, etcétera— forma una categoría donde los morfismos son los homomorfismos correspondientes. Igualmente, se pueden definir categorías cuyos objetos son otras estructuras matemáticas —espacios topológicos, variedades diferenciables, etcétera— y los morfismos aplicaciones adecuadas entre ellas —aplicaciones continuas, diferenciables, etcétera—.

(iii) Sea Preord la *categoría de preórdenes*. Los objetos son los *conjuntos preordenados*, es decir, los conjuntos X equipados con relaciones binarias $\leq_X$ que verifican las propiedades reflexiva y transitiva; y los morfismos son las *aplicaciones monótonas*, es decir, las aplicaciones $f\colon (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ tales que $f(x) \leq_Y f(y)$ siempre que $x \leq_X y$. Cuando no haya riesgo de confusión, denotaremos un conjunto preordenado simplemente como X, omitiendo la relación $\leq_X$, que simplemente se escribirá $\leq$ cuando aparezca. En general, dados dos conjuntos preordenados X e Y, el conjunto de aplicaciones monótonas $\mathsf{Preord}(X, Y)$ también tiene la estructura de conjunto preordenado bajo el *preorden puntual* definido como $f \leq g$ si, y solo si, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$.

Un *conjunto ordenado* es un conjunto preordenado cuya relación es adicionalmente antisimétrica. Denotamos como Ord la categoría de conjuntos ordenados y aplicaciones monótonas.

Finalmente, si $(X, \leq)$ es un conjunto (pre)ordenado, definimos su *conjunto (pre)ordenado dual*, denotado $(X^{op}, \leq^{op})$ (o simplemente X^{op}), como el conjunto X con el *orden dual*, esto es, $x \leq^{op} y$ si, y solo si, $y \leq x$.

En todos los ejemplos anteriores, los objetos son conjuntos equipados con alguna estructura adicional y los morfismos son ciertas aplicaciones entre esos conjuntos. No obstante, tal y como se ha mencionado en la introducción, una estructura concreta también puede, individualmente, definir por sí misma una categoría. Por ejemplo:

(iv) Sea $(G, \cdot)$ un grupo, es decir, un objeto de Grp. Definimos la categoría $\mathcal{C}_G$ con un único objeto, $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}_G) = \{p_0\}$, y donde hay un morfismo $\hat{g}\colon p_0 \to p_0$ por cada elemento $g \in G$. La composición esta dada por $\hat{g} \circ \hat{h} = \widehat{g \cdot h}$, y es fácil ver que si e es el neutro del grupo, entonces $\hat{e}$ es Id_{p_0}. De hecho, los grupos son precisamente las categorías pequeñas con un solo objeto que satisfacen la propiedad de que todos sus morfismos son isomorfismos.

(v) Sea $(X, \leq)$ un conjunto preordenado, es decir, un objeto de Preord. Este puede ser considerado como una categoría cuyos objetos son los elementos $x \in X$ y donde hay un único morfismo $x \to y$ si y solo si $x \leq y$. En este caso, los morfismos identidad existen por la reflexividad; y la composición de morfismos está bien definida en virtud de la transitividad. Observamos que esta categoría cumple la propiedad de que entre dos objetos existe a lo sumo un morfismo.

Las categorías que cumplen esta propiedad se llaman *categorías delgadas*, y es fácil ver que las categorías pequeñas y delgadas son exactamente los conjuntos preordenados.

Por ejemplo, el conjunto $\mathbf{2} = \{0 < 1\}$ con el orden usual es una categoría de dos objetos con un único morfismo no identidad $0 \to 1$.

Finalmente, se pueden construir nuevas categorías a partir de otras ya dadas:

(vi) Dada la categoría $\mathcal{C}$, su *categoría dual* $\mathcal{C}^{op}$ tiene los mismos objetos, y para todo par de objetos A, B se define $\mathcal{C}^{op}(A, B) = \mathcal{C}(B, A)$. Esto es, es la categoría que se obtiene *invirtiendo formalmente el sentido de los morfismos*, y la composición $\circ^{op}$ se define como $g^{op} \circ^{op} f^{op} = (f \circ g)^{op}$. Claramente, si vemos un conjunto preordenado $(X, \leq)$ como una categoría, su categoría dual es el conjunto preordenado dual $(X^{op}, \leq^{op})$.

(vii) Dada las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, su *producto* es la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares (A, B) donde A es un objeto de $\mathcal{C}$ y B es un objeto de $\mathcal{D}$, y donde los morfismos $(A, B) \to (A', B')$ están dados por pares (f, g) con $f : A \to A'$ en $\mathcal{C}$ y $g : B \to B'$ en $\mathcal{D}$. La composición y los morfismos identidad se definen componente a componente.

A continuación introducimos la noción natural de morfismo entre categorías:

DEFINICIÓN 2.4. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Un *funtor* (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una asignación que manda cada objeto A de $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ a un objeto $F(A)$ de $\mathsf{Ob}(\mathcal{D})$, y cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$ a un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ de $\mathcal{D}$, preservando

- la composición de morfismos, es decir, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ siempre que la composición de f con g esté definida, y
- las identidades, es decir, $F(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{F(A)}$ para todo objeto A de $\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$.

El ejemplo trivial es el *funtor identidad* $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definido como $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(A) = A$ en los objetos y $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}(f) = f$ en los morfismos. Además, la composición de funtores se define de forma natural, y, por tanto, se define la *categoría de categorías* Cat cuyos objetos son categorías (pequeñas) y cuyos morfismos son los funtores. Veamos otros ejemplos relevantes de funtores:

EJEMPLOS 2.5. (i) Los conjuntos preordenados vistos como categorías (véase el ejemplo 2.3 (v)), son de especial interés para los propósitos de este artículo. En este caso un funtor es una aplicación monótona entre conjuntos preordenados, es decir, un morfismo de Preord.

(ii) Dado un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, se define el *funtor dual* $F^{op} : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}^{op}$ dado por $F^{op}(A) = F(A)$ y $F(f^{op}) = F(f)^{op}$ para todo objeto A y todo morfismo f de $\mathcal{C}$ (véase el ejemplo 2.3 (vi)).

(iii) Dados dos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$, se define el *funtor producto*

$$F \times G : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \to \mathcal{D} \times \mathcal{D}'$$

como $(F \times G)(A, B) = (F(A), G(B))$ y $(F \times G)(f, g) = (F(f), G(g))$ para todo objeto (A, B) y todo morfismo (f, g) de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ (véase el ejemplo 2.3 (vii)).

(iv) Dada una categoría $\mathcal{C}$, el *funtor hom*

$$\mathcal{C}(-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathsf{Set}$$

se construye de la siguiente manera: para cada objeto (A, B) de $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})$ se define $\mathcal{C}(-,-)(A,B) = \mathcal{C}(A,B)$; y para cada morfismo

$$(f_1, f_2) \in (\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C})((A_1, B_1), (A_2, B_2)),$$

se define $\mathcal{C}(-,-)(f_1, f_2)$, denotado $\mathcal{C}(f_1, f_2)$, como la aplicación

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(f_1, f_2)\colon \mathcal{C}(A_1, B_1) &\to \mathcal{C}(A_2, B_2), \\ g &\mapsto f_2 \circ g \circ f_1. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un funtor, se define

$$\mathcal{D}(F-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$$

como la composición $\mathcal{D}(-,-) \circ (F^{op} \times 1_{\mathcal{D}})$ y, de manera similar, si $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un funtor, se define

$$\mathcal{C}(-,G-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$$

como la composición $\mathcal{C}(-,-) \circ (1_{\mathcal{C}^{op}} \times G)$.

La categoría Cat posee una estructura adicional, los *morfismos entre morfismos*.

Definición 2.6. Sean $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dos funtores. Una *transformación natural* $\eta\colon F \to G$ es una asignación que hace corresponder a cada objeto A de $\mathcal{C}$ a un morfismo $\eta_A\colon F(A) \to G(A)$ de $\mathcal{D}$ y es tal que, para cualquier morfismo $f\colon A \to B$ en $\mathcal{C}$, el siguiente diagrama conmuta en $\mathcal{D}$:

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \eta_A} & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta_B} \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B). \end{array}$$

Decimos que η es un *isomorfismo natural* cuando todos los morfismos η_A son isomorfismos en $\mathcal{D}$.

Definición 2.7. Sean $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Decimos que F es el *adjunto por la izquierda* de G (equivalentemente, que G es *adjunto por la derecha* de F o, que F y G son *adjuntos entre sí*), si existe un isomorfismo natural entre los funtores $\mathcal{D}(F-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$ y $\mathcal{C}(-,G-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathsf{Set}$; esta adjunción se denotará mediante la expresión $F \dashv G$.

En particular, en la definición anterior, para todo objeto $C \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ y $D \in \mathsf{Ob}(\mathcal{D})$ existen biyecciones naturales

$$\Phi_{AB}\colon \mathcal{D}(F(A), B) \to \mathcal{C}(A, G(B)).$$

La *naturalidad* significa que esas aplicaciones definen un isomorfismo natural entre los funtores hom correspondientes. Volviendo al ejemplo 2.3 (v), si $f\colon X \to Y$ es un funtor —una aplicación monótona— entre conjuntos preordenados, un adjunto por la izquierda de f es una aplicación monótona $g\colon Y \to X$ que cumple

$$g(y) \leq x \iff y \leq f(x)$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$ (al ser un conjunto preordenado una categoría delgada, esta condición equivale a la existencia de las biyecciones Φ_{xy} y la naturalidad se cumple trivialmente). Es sencillo comprobar que la condición anterior es equivalente a las desigualdades

$$g \circ f \leq \mathrm{Id}_X \quad \text{y} \quad \mathrm{Id}_Y \leq f \circ g. \tag{1}$$

A continuación daremos una caracterización para la existencia de funtores adjuntos entre retículos completos. Un conjunto ordenado $(X, \leq)$ es un *retículo completo* si todo subconjunto (incluidos el conjunto vacío y los posibles subconjuntos infinitos) tiene un ínfimo y un supremo. Recordamos que si S es un subconjunto de un conjunto (pre)ordenado X, el *ínfimo* de S es, si existe, un elemento $\bigwedge S \in X$ tal que

$$\bigwedge S \leq s \quad \text{para todo} \quad s \in S,$$

y si otro elemento $z \in X$ satisface que $z \leq s$ para todo $s \in S$, entonces $z \leq \bigwedge S$. Es decir, $\bigwedge S$ es el mayor elemento que es menor o igual que todos los elementos del conjunto S. Análogamente, el *supremo* de S es, si existe, el elemento $\bigvee S \in X$ tal que

$$s \leq \bigvee S \quad \text{para todo} \quad s \in S,$$

y si otro elemento $w \in X$ satisface que $s \leq w$ para todo $s \in S$, entonces $\bigvee S \leq w$, es decir, $\bigvee S$ es el menor elemento que es mayor o igual que todos los elementos de S. En el caso binario, el ínfimo de x e y se suele denotar simplemente por $x \wedge y$, y el supremo de x e y por $x \vee y$.

En particular, el ínfimo del conjunto vacío, usualmente denotado como $\top$, es el elemento máximo de X, esto es, el elemento $\top$ cumple que $x \leq \top$ para todo $x \in X$.

En este contexto, el teorema del funtor adjunto (para retículos completos) [4, 7.34 Proposition] afirma que una aplicación monótona g entre retículos completos tiene un adjunto por la derecha si y solo si g preserva supremos.

En este artículo trabajaremos con categorías que poseen una operación asociativa, conmutativa y con unidad en el sentido de la teoría de categorías, es decir, salvo isomorfismo natural, generalizando así la noción clásica de monoide.

Definición 2.8. Una *categoría monoidal simétrica* es una categoría $\mathcal{V}$ junto con:

(i) un funtor $\otimes\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ llamado *producto tensorial,*

(ii) un objeto I llamado el *objeto unidad*,

(iii) para todos los objetos X, Y, Z en $\mathcal{V}$, isomorfismos naturales

- $a_{XYZ}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$, llamados *asociadores,*

- $l_X \colon I \otimes X \to X$, llamados *unitores izquierdos,*
- $r_X \colon X \otimes I \to X$, llamados *unitores derechos,*
- $\gamma_{XY} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$, llamados *simetrías*,

sujetos a ciertas condiciones de coherencia que se expresan mediante diagramas conmutativos (véase [8, Section 1.1] para una definición completa).

Como, en nuestro caso, trabajaremos con categorías monoidales delgadas, estas condiciones se satisfacen automáticamente, por lo que no es necesario incluir los diagramas que expresan las condiciones de coherencia.

Ejemplos 2.9. (i) La categoría Set es monoidal simétrica, tomando el producto cartesiano $\times$ como el producto tensorial y el conjunto con un único elemento, $\{*\}$, como el objeto unidad.

(ii) Recordamos que si A y B son dos grupos abelianos, su producto tensorial $A \otimes B$ es un grupo abeliano que reduce el estudio de las aplicaciones bilineales al de los homomorfismos. Más concretamente, si A y B son grupos abelianos, existe un único grupo abeliano (salvo isomorfismo) $A \otimes B$ y una aplicación bilineal $\otimes \colon A \times B \to A \otimes B$ tal que si P es un grupo abeliano y $f \colon A \times B \to P$ es una aplicación bilineal, entonces existe un único homomorfismo $g \colon A \otimes B \to P$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "g"] \\ & P & \end{tikzcd}$$

Con esta noción de producto y tomando I igual al grupo trivial $\mathbf{0}$, se tiene que Ab es una categoría monoidal simétrica.

(iii) Observaremos más adelante que el conjunto $\mathbf{2}$, considerado como una categoría, es una categoría monoidal simétrica de gran relevancia, tomando el producto tensorial y el objeto identidad de la siguiente forma:

$$0 \otimes 0 = 1 \otimes 0 = 0 \otimes 1 = 0, \quad 1 \otimes 1 = 1, \quad I = 1.$$

(iv) El ejemplo anterior es un caso específico de un conjunto preordenado donde los ínfimos por pares y el elemento máximo existen. Si consideramos la categoría dada por un conjunto preordenado $(X, \leq)$ con ínfimos por pares y con un elemento máximo $\top$, entonces este puede ser dotado de una estructura monoidal simétrica donde $x \otimes y = x \wedge y$ e $I = \top$.

(v) Sea $[0, +\infty]$ el intervalo de números reales no negativos incluyendo el infinito, y considerémoslo equipado con su orden usual. Por razones que quedarán claras más adelante, estamos interesados en el conjunto ordenado dual $[0, +\infty]^{op}$. En $[0, +\infty]^{op}$ consideramos la operación $+$ dada por la suma de dos números reales, y $t + \infty = \infty + s = \infty$. Es fácil comprobar que $\otimes = +$ define una estructura monoidal simétrica en $[0, +\infty]^{op}$ cuya unidad es 0.

Centrémonos por un momento en el ejemplo 2.9 (I), es decir, la categoría Set con el producto tensorial dado por el producto cartesiano. Dado un conjunto A, consideramos el funtor $(-) \times A\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ que envía un conjunto B al producto $B \times A$. Nótese que las aplicaciones de la forma $B \times A \to C$ están en correspondencia biyectiva con aplicaciones $B \to \mathsf{Set}(A, C)$; es decir, existe una biyección

$$\mathsf{Set}(B \times A, C) \cong \mathsf{Set}(B, \mathsf{Set}(A, C)).$$

De ello se sigue fácilmente que el funtor $(-) \times A$ posee un adjunto por la derecha dado por $\mathsf{Set}(A, -)\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$ que envía un conjunto C a $\mathsf{Set}(A, C)$. No toda categoría monoidal $\mathcal{V}$ satisface que el funtor $(-) \otimes X\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ admite un adjunto por la derecha para todo objeto X de $\mathcal{V}$. Sin embargo, aquellas que sí lo cumplen, como Set, desempeñan un papel fundamental en lo que sigue. Esta propiedad se formaliza en la siguiente definición (ver [5]).

DEFINICIÓN 2.10. Sea $\mathcal{V}$ una categoría monoidal simétrica. Se dice que $\mathcal{V}$ es una categoría *monoidal cerrada* si para todo objeto X de $\mathcal{V}$, el funtor $(-) \otimes X\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tiene un adjunto por la derecha, denotado como $[X, -]\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$.

Así, en una categoría monoidal cerrada $\mathcal{V}$ cada par de objetos (X, Y) tiene asociado, además de un conjunto de morfismos $\mathcal{V}(X, Y)$, un *objeto de morfismos* en $\mathcal{V}$, el objeto $[X, Y]$ denominado *hom interno*. Por ejemplo, Set (ver el ejemplo 2.9 (I)) es una categoría monoidal cerrada donde el hom interno $[X, Y]$ es el conjunto $\mathsf{Set}(X, Y)$. Asimismo, es fácil comprobar que en el caso Ab (ver el ejemplo 2.9 (II)) la estructura monoidal es cerrada. Para ello, dados dos grupos abelianos A y B, definimos $[A, B] = \mathsf{Ab}(A, B)$. Como el conjunto de homomorfismos de grupos $A \to B$ tiene estructura de grupo abeliano bajo la suma puntual, se tiene que $[A, B] \in \mathsf{Ab}$, y por tanto define un funtor $[A, -]\colon \mathsf{Ab} \to \mathsf{Ab}$, que es adjunto por la derecha del funtor $(-) \otimes A$. Sin embargo, existen categorías monoidales cerradas, como las que veremos a continuación, en las que el *objeto hom* de un par de objetos posee una estructura muy diferente a la del *conjunto hom* asociado.

Las categorías monoidales simétricas cerradas con las que trabajaremos mayoritariamente en este texto son los *cuantales conmutativos unitarios* [6, Section 2.3]. Recordemos (ejemplo 2.3 (V)) que un conjunto preordenado $(X, \leq)$ puede ser considerado como una categoría delgada cuyos objetos son los elementos $x \in X$ y donde hay un único morfismo $x \to y$ si y solo si $x \leq y$. En el ejemplo 2.9 (IV) hemos observado que si requerimos la existencia de ínfimos por pares y elemento máximo, entonces esta categoría puede ser dotada de una estructura monoidal simétrica.

Veamos ahora cómo generalizar esta situación y dotar a un retículo completo de una estructura monoidal simétrica cerrada (nos restringiremos a retículos completos por razones que entenderemos a continuación). Siguiendo la numeración de la definición 2.8, si $(X, \leq)$ es un retículo completo, una estructura monoidal simétrica viene dada por: (I) una aplicación monótona $*\colon X \times X \to X$ y (II) un objeto unidad $e \in X$. Las condiciones (III) de asociatividad, unidad y simetría se traducen en

$$a * (b * c) = (a * b) * c, \quad a * e = e * a = a, \quad a * b = b * a,$$

respectivamente, para cualesquiera $a, b, c \in X$. Analicemos qué significa que la estructura sea cerrada. Como hemos indicado después de la definición 2.7, al desarrollar el ejemplo 2.3 (v), el teorema del funtor adjunto establece que una aplicación monótona entre retículos completos tiene un adjunto por la derecha si, y solo si, preserva supremos. Así, la estructura monoidal simétrica es cerrada si y solo si el funtor $(-) * b \colon X \to X$ preserva supremos.

En síntesis, un *cuantal conmutativo unitario* X se puede definir como un retículo completo con una estructura monoidal simétrica cerrada, o alternativamente, como un retículo completo junto con:

(i) una operación asociativa y conmutativa $* \colon X \times X \to X$ que preserva supremos en cada variable,

(ii) un elemento $e \in X$ tal que $a * e = a$ para todo $a \in X$.

En el ejemplo 2.9 (v) hemos visto que $[0, +\infty]^{op}$ es monoidal y simétrica. Evidentemente, $(-)+t$ preserva supremos, por lo que $[0, +\infty]^{op}$ es, de hecho, un cuantal conmutativo unitario, llamado *el cuantal de Lawvere*.

Las categorías monoidales cerradas son de gran importancia, puesto que son aquellas que sirven como base de enriquecimiento de otras categorías, como explicamos a continuación.

3. Teoría de categorías enriquecida

3.1. Introducción

Dos objetos cualesquiera A y B de una categoría $\mathcal{C}$ tienen asociado un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ de morfismos de A en B. Sin embargo, en multitud de situaciones, este conjunto posee alguna estructura adicional, pudiendo ser, por ejemplo, un grupo abeliano, un conjunto ordenado, etcétera.

La teoría de categorías enriquecidas es la extensión natural de la teoría de categorías que modela esta situación y fue esencialmente introducida por Kelly ([8] es la referencia introductoria habitual). Así, la principal idea reside en considerar estructuras similares a las categorías con la diferencia de que los morfismos entre dos objetos cualesquiera forman, en lugar de meramente un conjunto, un objeto de otra categoría, llamada *base del enriquecimiento* y denotada habitualmente por $\mathcal{V}$.

La noción de categoría monoidal es esencial para el desarrollo de la teoría de categorías enriquecidas. En efecto, si $\mathcal{C}$ es una categoría usual, la composición se puede ver simplemente como aplicaciones

$$\mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C) \qquad (A, B, C \text{ en } \mathsf{Ob}(\mathcal{C})),$$

es decir, morfismos en Set, que verifican ciertas propiedades. Si el funtor $\mathcal{C}(-, -)$ toma valores en una categoría monoidal simétrica $\mathcal{V}$ (siempre podemos tomar $\mathcal{V} = \mathsf{Set}$), el producto tensorial $\otimes$ de $\mathcal{V}$ debería permitir expresar la composición de morfismos de $\mathcal{C}$ mediante morfismos en $\mathcal{V}$,

$$\mathcal{C}(B, C) \otimes \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, C) \qquad (A, B, C \text{ en } \mathsf{Ob}(\mathcal{C}))$$

que verifican ciertas propiedades de coherencia, surgiendo así la noción de categoría $\mathcal{V}$-enriquecida.

En este sentido, cabe destacar que parte del trabajo que condujo hasta alcanzar la noción correcta de categoría monoidal fue realizado por MacLane, con su célebre teorema de coherencia [11], junto a otros autores como Bénabou [2] o Linton [10].

La introducción de la teoría de categorías enriquecidas supuso un importante avance tanto en la teoría de categorías en sí misma como en otras áreas. A continuación mencionamos brevemente dos ejemplos exitosos. Las categorías enriquecidas sobre Cat son, esencialmente, categorías $\mathcal{C}$ tales que $\mathcal{C}(A, B)$ es una categoría para cada par de objetos A y B. Así, $\mathcal{C}$ posee *morfismos entre morfismos* llamados 2-*morfismos*. Este tipo de categorías son conocidas como 2-*categorías*. Además uno puede reiterar esta construcción, dando lugar a las 3-*categorías*, 4-*categorías*…, n-*categorías* y, más generalmente, al área de las categorías de dimensión superior, que han demostrado ser muy útiles como marco conceptual de la topología algebraica moderna en relación a la teoría de homotopía. La idea inicial es, moralmente, que las aplicaciones continuas son los morfismos, y las homotopías entre ellas son los 2-morfismos; referimos a [1] para una introducción al área.

Otro ejemplo importante es el de las categorías enriquecidas sobre Ab, llamadas, a menudo, *categorías preaditivas*. Estas constituyen el primer paso esencial en el estudio de las *categorías abelianas*, que son precisamente categorías preaditivas con biproductos finitos y que posee suficientes núcleos y conúcleos; véase [7] para la definición de estos conceptos. Destacamos que las categorías abelianas son uno de los conceptos fundamentales del álgebra homólogica.

3.2. Definición y propiedades

Las ideas reflejadas en la subsección 3.1 se pueden expresar formalmente como sigue:

Definición 3.1. Sea $\mathcal{V}$ una categoría monoidal simétrica cerrada. Una *categoría $\mathcal{A}$ enriquecida sobre $\mathcal{V}$* (o una *categoría $\mathcal{V}$-enriquecida*) es una estructura que consta de:

(i) una clase de *objetos*, denotada $\mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$,

(ii) para cada par de objetos A y B de $\mathcal{A}$, un objeto $\underline{\mathcal{A}}(A, B)$; denominado *objeto de morfismos* de A en B,

(iii) para cada terna (A, B, C) de objetos de $\mathcal{A}$, un morfismo en $\mathcal{V}$,

$$\circ_{ABC} \colon \underline{\mathcal{A}}(B, C) \otimes \underline{\mathcal{A}}(A, B) \to \underline{\mathcal{A}}(A, C),$$

denominado *morfismo composición*,

(iv) para cada objeto A de $\mathcal{A}$, un morfismo $e_A \colon I \to \underline{\mathcal{A}}(A, A)$ de $\mathcal{V}$,

que verifican las siguientes propiedades:

- la composición es asociativa, es decir, cada uno de los diagramas

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}(C,D)\otimes(\underline{A}(B,C)\otimes\underline{A}(A,B)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\circ_{ABC}"] & \underline{A}(C,D)\otimes\underline{A}(A,C) \arrow[dr, "\circ_{ACD}"] & \\
 & & \underline{A}(A,D) \\
(\underline{A}(C,D)\otimes\underline{A}(B,C))\otimes\underline{A}(A,B) \arrow[uu, "a"] \arrow[r, "\circ_{BCD}\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{A}(B,D)\otimes\underline{A}(A,B) \arrow[ur, "\circ_{ABD}"'] &
\end{tikzcd}
$$

  es conmutativo, siendo A, B, C y D objetos cualesquiera de $\mathcal{A}$;
- para cualesquiera objetos A y B de $\mathcal{A}$, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}(B,B)\otimes\underline{A}(A,B) \arrow[r, "\circ_{ABB}"] & \mathcal{A}(A,B) & \underline{A}(A,B)\otimes\underline{A}(A,A) \arrow[l, "\circ_{AAB}"'] \\
I\otimes\underline{A}(A,B) \arrow[u, "e_B\otimes\mathrm{id}"] \arrow[ur, "l"'] & & \underline{A}(A,B)\otimes I \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes e_A"'] \arrow[ul, "r"]
\end{tikzcd}
$$

  es conmutativo, es decir, la composición es *unital*.

Observamos que como en nuestro caso de interés trabajaremos con categorías delgadas, los diagramas de asociatividad y unitalidad se cumplen automáticamente.

Observación 3.2. Diremos que $\mathcal{A}$ es una categoría $\mathcal{V}$-enriquecida *pequeña* si $\mathsf{Ob}\,A$ es un conjunto.

Antes de pasar a los ejemplos, definimos también la versión enriquecida de la noción de funtor:

Definición 3.3. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías $\mathcal{V}$-enriquecidas. Un *$\mathcal{V}$-funtor* $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ viene dado por:

(i) una asignación $\mathsf{Ob}(\mathcal{A})\to\mathsf{Ob}(\mathcal{B})$ que denotaremos como $A\mapsto F(A)$,

(ii) junto con una colección de morfismos de $\mathcal{V}$

$$\nu_{AA'}\colon \underline{A}(A,A')\to\underline{B}(F(A),F(A')),$$

indicada por los pares (A,A') de objetos de $\mathcal{A}$, de manera que la composición y las identidades se respetan, es decir, los siguientes diagramas conmutan en $\mathcal{V}$:

$$
\begin{tikzcd}
\underline{A}(A',A'')\otimes\underline{A}(A,A') \arrow[r, "\circ_{AA'A''}"] \arrow[d, "\nu_{A'A''}\otimes\nu_{AA'}"'] & \underline{A}(A,A'') \arrow[d, "\nu_{AA''}"] \\
\underline{B}(F(A'),F(A''))\otimes\underline{B}(F(A),F(A')) \arrow[r, "\circ_{F(A),F(A'),F(A'')}"'] & \underline{B}(F(A),F(A''))
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dl, "e_A"'] \arrow[dr, "e_{F(A)}"] & \\
\underline{A}(A,A) \arrow[rr, "\nu_{AA}"'] & & \underline{B}(F(A),F(A)).
\end{tikzcd}
\tag{3}
$$

Claramente, las categorías pequeñas $\mathcal{V}$-enriquecidas y los $\mathcal{V}$-funtores forman una categoría que denotaremos como $\mathsf{Cat}(\mathcal{V})$.

En los siguientes ejemplos, describimos la noción de categoría enriquecida sobre las diferentes bases dadas en los ejemplos 2.9.

EJEMPLOS 3.4. (I) Tal y como hemos expuesto en la discusión al inicio de esta sección, las categorías Set-enriquecidas son simplemente las categorías (localmente pequeñas, véase la observación 2.2).

(II) La categoría Ab está enriquecida sobre sí misma. A saber, dados grupos abelianos A y B, el conjunto $\mathsf{Ab}(A,B)$ de homomorfismos de A en B forma un grupo abeliano bajo la suma puntual. Además, dados grupos abelianos A, B y C, debemos establecer el homomorfismo $\circ_{ABC}\colon \mathsf{Ab}(B,C)\otimes\mathsf{Ab}(A,B)\to\mathsf{Ab}(A,C)$. Por la propiedad universal del producto tensorial en Ab, esto es equivalente a definir una aplicación bilineal $\mathsf{Ab}(B,C)\times\mathsf{Ab}(A,B)\to\mathsf{Ab}(A,C)$. Pero está claro que la composición usual $(g,f)\mapsto g\circ f$ cumple esa propiedad. Finalmente, el homomorfismo $\mathbf{0}\to\mathsf{Ab}(A,A)$ manda el único elemento de $\mathbf{0}$ a la identidad Id_A. Los diagramas de asociatividad y unitalidad se comprueban fácilmente.

(III) Utilizando un argumento similar, podemos ver que las categorías enriquecidas sobre Ab son precisamente aquellas categorías $\mathcal{C}$ con la propiedad adicional de que para cada par de objetos A y B de $\mathcal{C}$, el conjunto $\mathcal{C}(A,B)$ tiene estructura de grupo abeliano y que la composición en $\mathcal{C}$ es una operación bilineal. A menudo, estas categorías se denominan *categorías preaditivas*, y constituyen el primer paso esencial en el estudio de las categorías abelianas (ver la sección 3.1).

(IV) Consideremos el conjunto ordenado $\mathbf{2}=\{0<1\}$ con la estructura monoidal cerrada dada por el ínfimo. Una categoría $\mathbf{2}$-enriquecida viene dada por un conjunto X y una aplicación $p\colon X\times X\to\mathbf{2}$ que cumple

$$p(y,z)\wedge p(x,y)\le p(x,z),\qquad p(x,x)=1,\qquad \forall x,y,z\in X \tag{4}$$

(obsérvese que los diagramas de asociatividad y unitalidad se cumplen trivialmente puesto que $\mathbf{2}$ es una categoría delgada). Además, podemos identificar la aplicación $p\colon X\times X\to\mathbf{2}$ con un subconjunto de $X\times X$, es decir, con una relación en X. Bajo esa identificación, las propiedades (4) se traducen en la asociatividad y reflexividad de la relación en cuestión. Por lo tanto, categorías $\mathbf{2}$-enriquecidas y preórdenes son conceptos equivalentes. Además, los $\mathbf{2}$-funtores entre conjuntos preordenados son precisamente las aplicaciones monótonas (nótese que como en $\mathcal{V}=\mathbf{2}$ existe a lo sumo un morfismo entre dos objetos, los diagramas (2) y (3) se verifican automáticamente). En lenguaje categórico, se tiene por tanto un isomorfismo de categorías

$$\mathsf{Cat}(\mathbf{2})\cong\mathsf{Preord}\,.$$

En este sentido, *la teoría del orden es una rama de la teoría de categorías enriquecidas.*

También se pueden definir nuevas categorías $\mathcal{V}$-enriquecidas a partir de otras categorías:

Ejemplos 3.5. (i) Dada una categoría $\mathcal{V}$-enriquecida $\mathcal{A}$, podemos construir su *categoría $\mathcal{V}$-enriquecida dual* $\mathcal{A}^{op}$ cuya clase de objetos es la misma que la de $\mathcal{A}$ y donde $\underline{\mathcal{A}^{op}}(A,B) := \underline{\mathcal{A}}(B,A)$ para todos los objetos A y B. Los morfismos $\circ^{\mathcal{A}^{op}}_{ABC}$ se definen utilizando esencialmente la simetría de $\mathcal{V}$ y están dados por la composición

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathcal{A}^{op}}(B,C)\otimes\underline{\mathcal{A}^{op}}(A,B)=\underline{\mathcal{A}}(C,B)\otimes\underline{\mathcal{A}}(B,A) \arrow[r, "\gamma"] & \underline{\mathcal{A}}(B,A)\otimes\underline{\mathcal{A}}(C,B) \arrow[d, "\circ^{\mathcal{A}}_{CBA}"] \\
& \underline{\mathcal{A}}(C,A)=\underline{\mathcal{A}^{op}}(A,C).
\end{tikzcd}$$

(ii) Dadas $\mathcal{V}$-categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, podemos construir la $\mathcal{V}$-categoría *producto* $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ cuyos objetos son pares (A,B) donde $A\in\mathsf{Ob}(\mathcal{A})$ and $B\in\mathsf{Ob}(\mathcal{B})$ y

$$\underline{(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B})}\,((A,B),(A',B')) := \underline{\mathcal{A}}(A,A')\otimes\underline{\mathcal{B}}(B,B').$$

Los morfismos que dotan a $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ de una composición se definen nuevamente utilizando la existencia de la simetría en $\mathcal{V}$.

(iii) Una categoría monoidal simétrica y cerrada $\mathcal{V}$ siempre puede ser vista por sí misma como $\mathcal{V}$-categoría. Más precisamente, los objetos de esta categoría enriquecida son los mismos que los de $\mathcal{V}$, y para todo par de objetos A y B de $\mathcal{V}$, definimos

$$\underline{\mathcal{V}}(A,B) := [A,B],$$

usando la notación de la definición 2.10.

3.3. Espacios métricos como categorías enriquecidas

El siguiente es el ejemplo central en este artículo, y se trata de la exposición de una brillante idea de Lawvere [9] relacionando dos áreas aparentemente inconexas de las matemáticas: la teoría de categorías y la teoría de espacios métricos.

Utilizaremos una noción ligeramente más general de espacio métrico que no requiere de simetría y cuya distancia puede tomar el valor infinito, aunque, si el lector lo desea, siempre puede restringir nuestra discusión a los espacios métricos en el sentido más habitual. Un *espacio métrico generalizado* es un par (X,d) donde X es un conjunto y $d\colon X\times X\to[0,+\infty]$ es una aplicación que cumple las siguientes condiciones:

(i) $d(x,x)=0$ para todo $x\in X$,

(ii) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ para cualesquiera $x,y,z\in X$ (*desigualdad triangular*).

Las aplicaciones entre espacios métricos generalizados son las habituales *aplicaciones no expansivas*, es decir, las aplicaciones $f\colon X \to Y$ tales que

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x'),$$

para cada $x, x' \in X$. Espacios métricos generalizados y aplicaciones no expansivas forman una categoría que denotaremos como Met.

En este contexto, presentamos el resultado fundamental de esta sección:

TEOREMA 3.6. *Las categorías* $[0, +\infty]^{op}$*-enriquecidas son precisamente los espacios métricos generalizados. Además, los* $[0, +\infty]^{op}$*-funtores entre* $[0, +\infty]^{op}$*-categorías enriquecidas son precisamente las aplicaciones no expansivas. Por lo tanto, se tiene un isomorfismo de categorías*

$$\mathsf{Cat}([0, +\infty]^{op}) \cong \mathsf{Met}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que la estructura monoidal en $[0, +\infty]^{op}$ está dada por la suma de números reales, y que la unidad es el número real 0. Siguiendo la numeración de la definición 3.1, una categoría $[0, +\infty]^{op}$-enriquecida viene dada por (I) un conjunto X; (II) para cada dos elementos $x, y \in X$ un elemento $d(x, y)$ de $[0, +\infty]$; (III) para cada terna $x, y, z \in X$ un morfismo en $[0, +\infty]^{op}$,

$$d(y, z) + d(x, y) \to d(x, z)$$

(como el orden es dual, esto se traduce en la desigualdad $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$); y (IV) para todo $x \in X$ un morfismo $0 \to d(x, x)$ en $[0, +\infty]^{op}$ (como el orden es dual, esto se traduce en la desigualdad $d(x, x) \leq 0$). Los diagramas de asociatividad y unitalidad se cumplen trivialmente porque $[0, +\infty]^{op}$ es una categoría delgada. En otras palabras, una categoría $[0, +\infty]^{op}$-enriquecida es precisamente un espacio métrico generalizado.

Identifiquemos a continuación la noción de $[0, +\infty]^{op}$-funtor. Siguiendo la numeración de la definición 3.3, un $[0, +\infty]^{op}$-funtor $(X, d_X) \to (Y, d_Y)$ consta de (I) una aplicación $f\colon X \to Y$ y (II) para cada par de elementos $x, x' \in X$, un morfismo en $[0, +\infty]^{op}$, $d_X(x, x') \to d_Y(f(x), f(x'))$ (como el orden es dual, esto se traduce en la desigualdad $d_Y(f(x), f(x')) \leq d_X(x, x')$). Los diagramas (2) y (3) conmutan trivialmente. Por lo tanto, los $[0, +\infty]^{op}$-funtores coinciden con las aplicaciones no expansivas. □

En particular, *la teoría de espacios métricos es una rama de la teoría de categorías enriquecidas.*

Observación 3.7. Dado que $[0, +\infty]^{op}$ es un ejemplo de cuantal conmutativo unitario, cabe mencionar que las categorías enriquecidas sobre cuantales conmutativos unitarios presentan una estructura similar. Más concretamente, siguiendo el mismo razonamiento, si $\mathfrak{Q}$ es un cuantal conmutativo unitario, una categoría $\mathfrak{Q}$-enriquecida es simplemente: (I) un conjunto X, y (II) para cada par de elementos $x, y \in X$, un elemento $p(x, y) \in \mathfrak{Q}$ tal que

$$e \leq p(x, x), \quad p(y, z) * p(x, y) \leq p(x, z),$$

para cualesquiera $x, y, z \in X$. En resumen, una *categoría* $\mathfrak{Q}$*-enriquecida* es una dupla (X, p), donde X es un conjunto y $p\colon X \times X \to \mathfrak{Q}$ es un aplicación con las siguientes propiedades:

(Q1) $e \leq p(x, x)$ para todo $x \in X$,

(Q2) $p(y, z) * p(x, y) \leq p(x, z)$ para todo $x, y, z \in X$.

Por otro lado, si (X, p) y (Y, q) son dos categorías $\mathfrak{Q}$-enriquecidas, un $\mathfrak{Q}$*-funtor* es una aplicación $f\colon X \to Y$ tal que

$$p(x, x') \leq q(f(x), f(x')),$$

para todo $x, x' \in X$.

En conclusión, el teorema 3.6 abre la puerta a estudiar la teoría de espacios métricos utilizando resultados más generales propios de la teoría de categorías (esta *especialización* no ha de infravalorarse: en la teoría de espacios métricos uno trabaja con conceptos como *sucesión*, *convergencia* o *límite*, mientras que en teoría de categorías uno desarrolla conceptos de manera diagramática abstracta, y no deja de ser sorprendente que todos estos conceptos y resultados sean interdefinibles pese a originarse desde puntos de vista muy diferentes). Y, viceversa, también se puede utilizar la teoría de espacios métricos como guía para desarrollar la teoría de categorías y extender resultados originales sobre espacios métricos a otras áreas de las matemáticas (por ejemplo, a contextos más algebraicos como el de las categorías preaditivas).

El resto de este artículo está dedicado a presentar un ejemplo concreto que ilustra esta transferencia de información. Veremos cómo la completitud de Cauchy (en el sentido habitual del análisis matemático) puede ser interpretada como la respuesta a una pregunta natural desde una perspectiva puramente categórica; y descubriremos el significado de esta noción cuando esta se traslada a categorías enriquecidas sobre otras bases.

4. Distribuidores adjuntos

Esta sección está dedicada a presentar el marco categórico que nos permitirá reinterpretar la convergencia de las sucesiones de Cauchy en espacios métricos generalizados. Más precisamente, veremos que dicho problema equivale a caracterizar funtores adjuntos en una nueva categoría que introduciremos a continuación: la categoría de distribuidores sobre un cuantal.

4.1. Distribuidores

Intuitivamente, un distribuidor es a un funtor entre categorías enriquecidas lo que una relación es a una aplicación entre conjuntos. Más precisamente, una relación de un conjunto A a un conjunto B se puede ver como una aplicación $A \times B \to \mathbf{2}$. Así, la siguiente definición[1] extiende esta idea a categorías enriquecidas reemplazando la base del enriquecimiento $\mathbf{2}$ por $\mathcal{V}$.

[1]Nótese que en la definición 4.1 el primer factor se dualiza (como en el ejemplo 3.5 (i)); esto es para que el funtor hom sea un distribuidor, véase el ejemplo 2.5 (iv).

DEFINICIÓN 4.1. Sea $\mathcal{V}$ una categoría monoidal simétrica cerrada y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías $\mathcal{V}$-enriquecidas. Un *$\mathcal{V}$-distribuidor* $\Phi\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ es un $\mathcal{V}$-funtor

$$\Phi\colon \mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{V},$$

donde $\mathcal{A}^{op} \otimes \mathcal{B}$ es la categoría $\mathcal{V}$-enriquecida producto (ver el ejemplo 3.5 (II)) y $\mathcal{V}$ está enriquecida sobre sí misma como en el ejemplo 3.5 (III).

Si expandimos esta definición, siguiendo la definición 3.3, vemos que un $\mathcal{V}$-distribuidor consta de: (I) una familia de objetos $\Phi(A, B)$ de $\mathcal{V}$ indicada por los pares (A, B) con $A \in \mathsf{Ob}(A)$ y $B \in \mathsf{Ob}(\mathcal{B})$, y (II) un $\mathcal{V}$-morfismo

$$\mathcal{A}(A', A) \otimes \mathcal{B}(B, B') \to [\Phi(A, B), \Phi(A', B')],$$

para cada par de objetos $(A, B), (A', B')$ de $\mathsf{Ob}(A^{op} \otimes B)$, que verifican las condiciones dadas por los diagramas (2) y (3). Es decir, *deshaciendo la adjunción*, un $\mathcal{V}$-distribuidor es una colección de $\mathcal{V}$-morfismos

$$\underline{\mathcal{B}}(B, B') \otimes \Phi(A, B) \otimes \underline{\mathcal{A}}(A', A) \to \Phi(A', B')$$

sujeta a la conmutatividad de los diagramas apropiados en $\mathcal{V}$.

En particular, si la base del enriquecimiento es un cuantal conmutativo unitario $\mathfrak{Q}$, al ser esta una categoría delgada esos diagramas conmutan de manera trivial, y un $\mathfrak{Q}$-distribuidor $\varphi\colon (X, p) \nrightarrow (Y, q)$ es simplemente una aplicación $\varphi\colon X \times Y \to \mathfrak{Q}$ que satisface

$$q(y, y') * \varphi(x, y) * p(x', x) \leq \varphi(x', y') \tag{5}$$

para cualesquiera $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$.

Por simplicidad, a partir de aquí nos restringimos al caso donde la base del enriquecimiento es un cuantal conmutativo unitario.

Igual que las relaciones se representan mediante matrices binarias, un $\mathfrak{Q}$-distribuidor se puede representar mediante una matriz con entradas en $\mathfrak{Q}$, cuyas columnas corresponden a los elementos de X y cuyas filas corresponden a los elementos de Y. Esta representación motiva la definición de la composición de distribuidores basándose en el producto matricial, es decir, dados $\mathfrak{Q}$-distribuidores $\varphi\colon (X, p) \nrightarrow (Y, q)$ y $\psi\colon (Y, q) \nrightarrow (Z, r)$ se define una aplicación $\psi \circ \varphi\colon X \times Z \to \mathfrak{Q}$

$$(\psi \circ \varphi)(x, z) = \bigvee_{y \in Y} \psi(y, z) * \varphi(x, y). \tag{6}$$

Queda como ejercicio al lector verificar que $\psi \circ \varphi\colon (X, p) \nrightarrow (Z, r)$ es en efecto un distribuidor y que esta operación es asociativa.

Además, si (X, p) es una categoría $\mathfrak{Q}$-enriquecida, como p cumple (Q2), se verifica la ecuación (5) y puede ser visto como distribuidor:

LEMA 4.2. *Sea (X, p) una categoría $\mathfrak{Q}$-enriquecida. Entonces, p es un $\mathfrak{Q}$-distribuidor $p\colon (X, p) \nrightarrow (X, p)$.*

Además, el conjunto de los distribuidores entre (X, p) e (Y, q) es un conjunto parcialmente ordenado con el orden puntual, y es fácil verificar que la desigualdad (5) es equivalente a las desigualdades

$$\begin{cases} q \circ \varphi \leq \varphi \\ \varphi \circ p \leq \varphi. \end{cases} \tag{7}$$

Observación 4.3. En realidad las desigualdades de (7) son igualdades, ya que

$$\varphi(x, y) \leq \varphi(x, y) * p(x, x) \leq \bigvee_{x' \in X} \varphi(x', y) * p(x, x') = (\varphi \circ p)(x, y),$$

y de manera similar para la segunda desigualdad. En otras palabras, si (X, p) es una $\mathfrak{Q}$-categoría enriquecida, entonces $p\colon (X, p) \nrightarrow (X, p)$ actúa como identidad con respecto a la composición de distribuidores.

Resumiendo, podemos considerar la categoría cuyos objetos son las categorías $\mathfrak{Q}$-enriquecidas y los morfismos entre ellas son los $\mathfrak{Q}$-distribuidores, donde la composición entre $\mathfrak{Q}$-distribuidores está dada por (6); y de acuerdo a la observación 4.3 esta composición posee identidades. Denotaremos la *categoría de $\mathfrak{Q}$-distribuidores* como $\mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$.

4.2. El grafo de un funtor

Hemos definido las categorías $\mathsf{Cat}(\mathfrak{Q})$ de categorías $\mathfrak{Q}$-enriquecidas, y $\mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$ de $\mathfrak{Q}$-distribuidores. Ambas categorías tienen los mismos objetos. Veamos ahora cómo construir un funtor $\mathsf{Cat}(\mathfrak{Q}) \to \mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$.

Para ello, dado un $\mathfrak{Q}$-funtor $f\colon (X, p) \to (Y, q)$, es fácil comprobar que las asignaciones

$$f_\bullet\colon (X, p) \nrightarrow (Y, q), \quad \text{donde} \quad f_\bullet(x, y) = q(f(x), y),$$

y

$$f^\bullet\colon (Y, q) \nrightarrow (X, p), \quad \text{donde} \quad f^\bullet(y, x) = q(y, f(x)),$$

determinan $\mathfrak{Q}$-distribuidores, el *grafo* y el *cografo* de f, respectivamente. La asignación $f \mapsto f_\bullet$ (resp. $f \mapsto f^\bullet$), junto con la identidad en los objetos, define un funtor de $\mathsf{Cat}(\mathfrak{Q})$ a $\mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$.

A continuación describimos la relación entre el grafo y cografo de un $\mathfrak{Q}$-funtor. Recordemos que la categoría $\mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$ tiene la propiedad de que el conjunto de morfismos entre dos objetos está parcialmente ordenado (bajo el orden puntual) y que la composición es monótona en cada variable. Las categorías que cumplen esta propiedad se denominan *localmente ordenadas* (en realidad, estas son otro ejemplo de categoría enriquecida; dejamos como ejercicio al lector comprobar que las categorías localmente ordenadas son precisamente las categorías Ord-enriquecidas). Si $\mathcal{C}$ es una categoría localmente ordenada, y $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ son dos morfismos, existe una noción natural de adjunción entre f y g inspirada por las ecuaciones (1). Se dice que f es *adjunto por la izquierda* de g (o que g es *adjunto por la derecha* de f), denotado como $f \dashv g$, si

$$f \circ g \leq 1_B \quad \text{y} \quad 1_A \leq g \circ f.$$

Es fácil comprobar que el adjunto por la izquierda (o por la derecha) de un morfismo es necesariamente único. En esta situación, tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea $f\colon (X,p) \to (Y,q)$ un $\mathfrak{Q}$-funtor. Entonces, se tiene la adjunción $f_\bullet \dashv f^\bullet$ en $\mathsf{Dist}(\mathfrak{Q})$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que $f_\bullet \circ f^\bullet \leq q$, ya que la otra desigualdad se demuestra de la misma manera. Como

$$f_\bullet \circ f^\bullet(y,y') = \bigvee_{x \in X} f_\bullet(x,y') * f^\bullet(y,x),$$

basta ver que

$$f_\bullet(x,y') * f^\bullet(y,x) \leq q(y,y')$$

para cualesquiera $x \in X$ e $y, y' \in X$. Es decir,

$$q(f(x),y') * q(y,f(x)) \leq q(y,y')$$

para todo $x \in X$ e $y, y' \in X$, y esto se cumple por la propiedad (Q2) de q. $\square$

Una cuestión categórica natural que surge de la última proposición es determinar cuándo se cumple su recíproco: *dados $\varphi \dashv \psi$ dos $\mathfrak{Q}$-distribuidores adjuntos, ¿cuándo existe un $\mathfrak{Q}$-funtor f tal que $\varphi = f_\bullet$ y $\psi = f^\bullet$?*

Como veremos a continuación, la respuesta a esta pregunta nos permitirá caracterizar la completitud de Cauchy tal y como anunciamos al principio de esta sección.

5. COMPLETITUD DE CAUCHY

En está sección demostraremos el resultado principal del artículo, y para ello trabajaremos con espacios métricos generalizados, es decir, categorías enriquecidas sobre el cuantal $[0,+\infty]^{op}$. En este contexto podemos reproducir las definiciones clásicas de sucesión de Cauchy o sucesión convergente de los espacios métricos. Así, dado un espacio métrico generalizado (Y,d), una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon \in (0,+\infty)$ existe un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $n, m \geq n(\varepsilon)$ se tiene

$$d(y_n, y_m) < \varepsilon.$$

La sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* al *punto límite* $y \in Y$ si para todo $\varepsilon \in (0,+\infty)$ existe un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(\varepsilon)$, se tiene

$$d(y_n, y) < \varepsilon \quad \text{y} \quad d(y, y_n) < \varepsilon.$$

Utilizando la desigualdad triangular se prueba fácilmente que las sucesiones convergentes son de Cauchy, y un espacio métrico generalizado es *Cauchy completo* cuando toda sucesión de Cauchy es convergente.

Observamos que en el caso de espacios métricos clásicos todas estas nociones se corresponden con las usuales. Sin embargo, en la definición de sucesión convergente hay que tomar ambas desigualdades, ya que en los espacios métricos generalizados la métrica no tiene por qué cumplir el axioma de simetría.

Antes de demostrar el resultado principal, probaremos un lema técnico que nos permitirá restringirnos al espacio métrico trivial $\mathbf{1} = \{*\}$ de un solo elemento.

Lema 5.1. *Sean (X, d') e (Y, d) espacios métricos generalizados, $\mathbf{1}$ el espacio métrico trivial y*

$$\begin{tikzcd} (X,d') \arrow[r, shift left=1.5, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (Y,d) \arrow[l, shift left=1.5, "\psi"] \end{tikzcd}$$

un par de $[0,+\infty]^{op}$-distribuidores adjuntos. Supongamos que para todo par

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, shift left=1.5, "\bar{\varphi}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (Y,d) \arrow[l, shift left=1.5, "\bar{\psi}"] \end{tikzcd}$$

de $[0,+\infty]^{op}$-distribuidores adjuntos existe un $[0,+\infty]^{op}$-funtor $\bar{f}\colon \mathbf{1} \to Y$ tal que $\bar{\varphi} = \bar{f}_\bullet$ y $\bar{\psi} = \bar{f}^\bullet$. Entonces existe un $[0,+\infty]^{op}$-funtor $f\colon X \to Y$ tal que $\varphi = f_\bullet$ y $\psi = f^\bullet$.

Demostración. Dado un elemento $x \in X$ definimos el par de $[0,+\infty]^{op}$-distribuidores adjuntos

$$\begin{tikzcd} \mathbf{1} \arrow[r, shift left=1.5, "\varphi_x"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (Y,d) \arrow[l, shift left=1.5, "\psi_x"] \end{tikzcd}$$

donde $\varphi_x(*, y) = \varphi(x, y)$ y $\psi_x(*, y) = \psi(y, x)$. Entonces, por hipótesis, existe un $[0,+\infty]^{op}$-funtor $f_x\colon \mathbf{1} \to Y$ tal que $(f_x)_\bullet = \varphi_x$ y $(f_x)^\bullet = \psi_x$. Definamos

$$f\colon X \to Y,\ x \mapsto f_x(*).$$

Esta aplicación es un $[0,+\infty]^{op}$-funtor, ya que

$$\begin{aligned} d'(x', x) &= d(f(x), f(x)) + d'(x', x) = d(f_x(*), f(x)) + d'(x', x) \\ &= \varphi(x, f(x)) + d'(x', x) \leq_{op} \varphi(x', f(x)) = d(f(x'), f(x)), \end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad (7) en la desigualdad. Además,

$$f_\bullet(x, y) = d(f(x), y) = d(f_x(*), y) = \varphi_x(*, y) = \varphi(x, y),$$

y

$$f^\bullet(y, x) = d(y, f(x)) = d(y, f_x(*)) = \psi_x(y, *) = \psi(y, x). \qquad \square$$

Concluimos nuestra exposición demostrando el teorema principal:

Teorema 5.2 ([9, p. 163]). *Sea (Y, d) un espacio métrico generalizado. Entonces Y es Cauchy completo si, y solo si, para todo par de $[0,+\infty]^{op}$-distribuidores adjuntos*

$$\begin{tikzcd} (X,d') \arrow[r, shift left=1.5, "\varphi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & (Y,d) \arrow[l, shift left=1.5, "\psi"] \end{tikzcd}$$

existe un funtor $[0,+\infty]^{op}$-enriquecido $f\colon X \to Y$ tal que $f_\bullet = \varphi$ y $f^\bullet = \psi$.

DEMOSTRACIÓN. Advertimos al lector de que trabajaremos con el orden dual en $[0,+\infty]^{op}$, por lo que durante la demostración los supremos son en realidad los ínfimos de los números reales correspondientes con el orden habitual.

Para el *solo si*, supongamos que (Y,d) es Cauchy completo. De acuerdo con el lema 5.1 podemos asumir que $X=\mathbf{1}$. Por un lado,

$$0=\bigvee_{y\in Y}\psi(y,*)+\varphi(*,y),$$

luego existe una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\psi(y_n,*)+\varphi(*,y_n)\geq_{op}\frac{1}{n}. \tag{8}$$

Por otro lado,

$$d(y,y')\geq_{op}(\varphi\circ\psi)(y,y')=\varphi(*,y')+\psi(y,*);$$

en particular, para cualesquiera $n,m\in\mathbb{N}$ tenemos

$$d(y_n,y_m)\geq_{op}\varphi(*,y_m)+\psi(y_n,*)\geq_{op}\frac{1}{n}+\frac{1}{m},$$

luego $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, definimos el funtor $f\colon\mathbf{1}\to Y$ dado por $f(*)=y_0$, donde y_0 es el límite de dicha sucesión. En particular, de (8) y (5) se deduce que

$$\frac{2}{n}\leq_{op}d(y_n,y_0)+\varphi(*,y_n)\leq_{op}\varphi(*,y_0),$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, es decir, $\varphi(*,y_0)=0$; y del mismo modo $\psi(y_0,*)=0$. Por consiguiente,

$$f_\bullet(*,y)=d(y_0,y)\geq_{op}\varphi(*,y)+\psi(y_0,*)=\varphi(*,y)$$

y, por otro lado, en vista de (7) tenemos

$$f_\bullet(*,y)=d(y_0,y)=d(y_0,y)+\varphi(*,y_0)\leq_{op}(d\circ\varphi)(*,y)\leq_{op}\varphi(*,y).$$

Igualmente, $f^\bullet(y,*)=\psi(y,*)$.

Para demostrar el *si*, sea $(y_n)_{\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y definamos distribuidores $\varphi\colon\mathbf{1}\looparrowright(Y,d)$ y $\psi\colon(Y,d)\looparrowright\mathbf{1}$ dados por

$$\varphi(*,y)=\lim_{n\to+\infty}d(y_n,y)\quad\text{y}\quad\psi(y,*)=\lim_{n\to+\infty}d(y,y_n).$$

Notemos que por la propiedad (Q2), si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces para cada elemento $y\in Y$, $(d(y_n,y))_{n\in\mathbb{N}}$ y $(d(y,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también son sucesiones de Cauchy en $[0,+\infty]$ con su métrica usual, por lo que ambos límites existen, y φ y ψ están bien definidos.

Demostremos primero que φ es un $[0,+\infty]^{op}$-distribuidor. Si $y, y' \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} d(y,y') + \varphi(*,y) &= d(y,y') + \lim_{n\to+\infty} d(y_n,y) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(d(y,y') + d(y_n,y)) \leq_{op} \lim_{n\to+\infty} d(y_n,y') = \varphi(*,y'), \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de nuevo de la propiedad (Q2). Se puede comprobar análogamente que ψ es un $[0,+\infty]^{op}$-distribuidor.

Veamos ahora que φ y ψ son adjuntos entre sí. Si $y, y' \in Y$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)(y,y') &= \varphi(*,y') + \psi(y,*) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(d(y_n,y') + d(y,y_n)) \leq_{op} d(y,y'). \end{aligned}$$

Comprobemos ahora que $\psi \circ \varphi = 0$. Por definición,

$$(\psi \circ \varphi)(*,*) = \bigvee_{y\in Y} \lim_{n\to+\infty}(d(y,y_n) + d(y_n,y)).$$

Por ello, basta demostrar que para cada $\varepsilon > 0$ existe un elemento $y \in Y$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty}(d(y,y_n) + d(y_n,y)) < \varepsilon.$$

En efecto, como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe un natural N tal que para todo $n \geq N$ se tiene

$$d(y_N,y_n) < \varepsilon/3 \quad \text{y} \quad d(y_n,y_N) < \varepsilon/3,$$

por lo que $\lim_{n\to+\infty}(d(y,y_n) + d(y_n,y)) \leq 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.

Entonces, como $\varphi \dashv \psi$, existe un $[0,+\infty]^{op}$-funtor $f\colon \mathbf{1} \to Y$ tal que $\varphi = f_\bullet$ y $\psi = f^\bullet$. Finalmente, definamos y_0 como $f(*)$. De las igualdades

$$\lim_{n\to+\infty} d(y_n,y_0) = \varphi(*,y_0) = f_\bullet(*,y_0) = d(f(*),y_0) = d(y_0,y_0) = 0,$$

$$\lim_{n\to+\infty} d(y_0,y_n) = \psi(y_0,*) = f^\bullet(y_0,*) = d(y_0,f(*)) = q(y_0,y_0) = 0,$$

obtenemos que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y_0. □

Agradecimientos.

Agradecemos al revisor la lectura y el detallado informe sobre el artículo. Sus sugerencias han mejorado notablemente la exposición y contenido del mismo. El primer autor agradece un contrato postdoctoral POS-2022-1-0015 del Gobierno Vasco. La segunda autora agradece la ayuda del proyecto PID2020-117281GB-I00 del Gobierno de España, parcialmente financiado por el Fondo Europeo de Desarrollo Regional. Durante la redacción de este artículo, el primer autor pertenecía a la Universidad de Birmingham (Reino Unido), la segunda autora a la Universidad de Vanderbilt (Estados Unidos) y el tercero a la Universidad de Liubliana (Eslovenia). En dicho periodo, el tercer autor estuvo financiado por los programas P1-0222, P1-0294 y los proyectos J1-50001, J1-4351 y N1-0216 de la Agencia de Investigación e Innovación de Eslovenia (ARIS).

Referencias

[1] J. C. Baez y J. Dolan, Categorification, en *Higher category theory*, editores E. Getzler y M. Kapranov, Contemp. Math. **230**, 1–36, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1998.

[2] J. Bénabou, Catégories avec multiplication, *C. R. Acad. Sci. Paris* **256** (1963), 1887–1890.

[3] M. M. Clementino, E. Colebunders, y W. Tholen, Lax algebras as spaces, en *Monoidal topology. A categorical approach to order, metric and topology*, Encyclopedia Math. Appl. **153**, 375–465, Cambridge University Press, 2014.

[4] B. A. Davey y H. A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge Mathematical Textbooks, 2.ª ed., Cambridge University Press, 2002.

[5] S. Eilenberg y G. M. Kelly, Closed categories, *Proc. Conf. Categorical Algebra* (La Jolla, Calif., 1965), 421–562, Springer-Verlag, Nueva York, 1966.

[6] P. Eklund, J. Gutiérrez García, U. Höhle y J. Kortelainen, *Semigroups in complete lattices. Quantales, modules and related topics*, Dev. Math. **54**, Springer, 2018.

[7] P. J. Freyd, Abelian categories, *Repr. Theory Appl. Categ.* **3** (2003), 1–164 (originalmente publicado por *Harper and Row*, 1964). Disponible en `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/3/tr3-21.pdf`.

[8] G. M. Kelly, Basic concepts of enriched category theory, *Repr. Theory Appl. Categ.* **10** (2005), 1–136 (originalmente publicado por *Cambridge University Press*, 1982). Disponible en `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10.pdf`.

[9] F. W. Lawvere, Metric spaces, generalized logic, and closed categories, *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano* **43** (1973), 135–166.

[10] F. E. J. Linton, Autonomous categories and duality of funtors, *J. Algebra* **2** (1965), 315–349.

[11] S. MacLane, Natural associativity and commutativity, *Rice Univ. Stud.* **49** (1963), 28–46.

Igor Arrieta, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, España

Correo electrónico: `igor.arrieta@ehu.eus`

Página web: `http://igorarrieta.eus`

Jone Lopez de Gamiz Zearra, Departamento de Métodos Cuantitativos, Facultad de Economía y Empresa (Bilbao–Sarriko), Universidad del País Vasco UPV/EHU, Bilbao, España

Correo electrónico: `jone.lopezdegamiz@ehu.eus`

Página web: `https://sites.google.com/view/joneldg/inicio`

Andoni Zozaya, Departamento de Estadística, Informática y Matemáticas, Instituto de Materiales Avanzados y Matemáticas (INAMAT), Universidad Pública de Navarra (UPNA), Pamplona, España

Correo electrónico: `andoni.zozaya@unavarra.es`

Página web: `https://sites.google.com/view/andonizozaya/orrialdea`