

Métodos de análisis y modelización de estructuras tensadas en arquitectura

por

María Barbero, Eugenia Rosado y Sonia L. Rueda

RESUMEN. Las estructuras tensadas, que incluyen elementos como membranas, carpas y otras configuraciones arquitectónicas que dependen de la tensión, han cobrado gran relevancia en la arquitectura moderna debido a su estética y a su eficiencia material. El análisis de estas estructuras es esencial para garantizar su estabilidad y seguridad.

En este artículo presentamos las estructuras tensadas en arquitectura y tres de los métodos más destacados de análisis estructural: de la matriz de rigidez, de densidad de fuerzas y de relajación dinámica. Se muestra además el proceso de modelización arquitectónica de una estructura tensada utilizando el *plug in Kangaroo* de un problema de diseño geométrico asistido por ordenador.

1. INTRODUCCIÓN

«¿Cuánto pesa su edificio, señor Foster?» fue la inesperada pregunta que el arquitecto Buckminster Fuller formuló a un joven Norman Foster, y que en un primer momento se quedó sin responder. Al día siguiente, Foster sabía el peso aproximado de su edificio. Pesaba demasiado. A partir de entonces decidió trabajar con nuevas estructuras y materiales con el objetivo de aligerar sus obras. La pregunta, con el tiempo, daría título a un documental sobre la obra de Foster (véase [29]).

Construir con estructuras ligeras es tan antiguo como la existencia de pueblos nómadas que se veían obligados a transportar sus viviendas. Con el desarrollo industrial, se incorporó el acero como material de construcción de estructuras ligeras. Las torres y cubiertas a tracción del ingeniero y arquitecto ruso Vladimir G. Shukhov (1853-1939) son algunos de los primeros ejemplos de arquitectura ligera utilizando redes de cables. Shukhov, alumno de P. Chebyshev en el Colegio Técnico Imperial de Moscú, además de realizar una gran variedad de torres a base de hiperboloides hiperbólicos y cubiertas reticulares, conocidas como *gridshell* (véase la figura 1), desarrolló las matemáticas para el diseño y análisis de dichas estructuras.

Una cubierta formada por una red de cables de acero y considerada ligera puede llegar a pesar 30 kilogramos por metro cuadrado de superficie cubierta. Al reemplazar parte del cableado por una membrana, el peso de la estructura puede bajar hasta 10 kilogramos de peso por metro cuadrado cubierto (véase [31]). En lo que se conoce como arquitectura textil (véanse [9, 14, 19, 31]) se combinan las estructuras tensadas de cables con membranas de muy poco grosor. El arquitecto Frei Otto

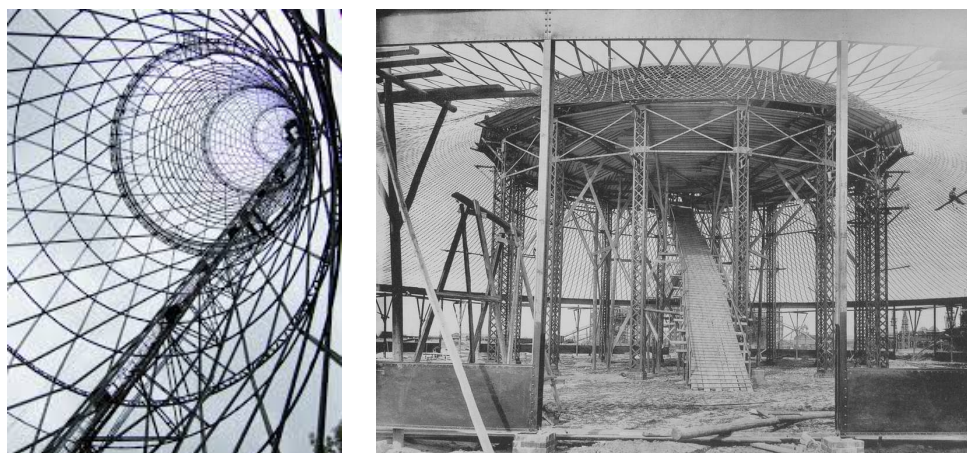


Figura 1: Torre y pabellón con cubierta *gridshell* de V. Shukhov. XVI Exposición Industrial y Artística Panrusa, 1896, en Nizhny Novgorod.



Figura 2: Estadio Olímpico de Múnich. F. Otto, 1972.

(1925-2015), premio Pritzker de Arquitectura 2015 y conocido por sus trabajos pioneros en estructuras de membrana y estructuras tensadas, es considerado el padre de la arquitecta textil (véanse [1, 31]).

En 1967, el estudio de arquitectura *Behnisch & Partner* ganó con un proyecto novedoso el concurso internacional para la realización de los campos de deporte para los Juegos Olímpicos de 1972 en Múnich (véase [3]). El proyecto consistía en reunir, bajo una misma cubierta flotante y continua, tanto las instalaciones deportivas (estadio, polideportivo y piscina), como los espacios de transición. La realización del proyecto fue posible gracias a la colaboración de Fritz Auer de *Behnisch* con profesionales externos al estudio como Frei Otto y Jörg Schlaich, ambos expertos en estructuras tensadas. El resultado final fue una estructura pretensada formada por una red de cables, soportada por unos mástiles sujetos al suelo mediante anclajes y cubierta con metacrilato poliméflico (véase la figura 2).

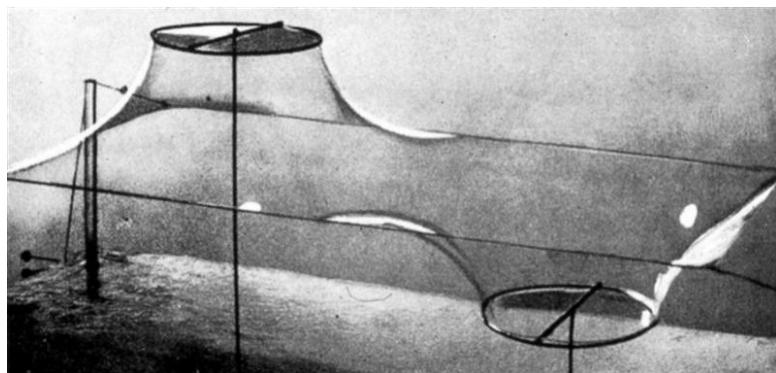


Figura 3: Maqueta de película jabonosa de F. Otto.¹

Para el diseño de la cubierta y el análisis del comportamiento estructural se utilizaron métodos computacionales y modelos a pequeña escala, como se observa en la figura 3. El Estadio Olímpico se considera un ejemplo pionero de arquitectura ligera y fue una de las primeras estructuras de gran tamaño en la que se utilizó tejido tensado como elemento principal de la cubierta [3].

Las membranas y las redes de cables permiten la construcción de estructuras impresionantes, y al mismo tiempo ligeras, con pocos elementos estructurales de soporte. Una característica fundamental de tales diseños es la particular transferencia de carga, ya que esta es absorbida solo por fuerzas de tracción (que producen alargamiento), sin fuerzas de compresión (que acortan los elementos estructurales), ni fuerzas de flexión (que pueden doblarlos) [9]. Esta propiedad da como resultado una relación estrecha entre la forma y comportamiento de la estructura, dando lugar a diseños de grandes luces.

La búsqueda de forma, denominada *form finding* [15, 18, 21], se convierte en una parte esencial del proceso de diseño. Ejemplos pioneros de búsqueda de forma de estructuras, en las que la gravedad determina la forma, son las maquetas de cadenas colgantes del arquitecto catalán Antoni Gaudí (1852-1926) y las membranas colgantes del ingeniero civil suizo Heinz Isler (1926-2009) (véase la figura 4). Estas formas se corresponden con superficies de curvatura de Gauss positiva, en contraposición a lo que ocurre con las estructuras tensadas, que generan superficies de curvatura de Gauss negativa.

Desde los años sesenta, el proceso de búsqueda de forma se ha utilizado para determinar un estado de equilibrio en una superficie pretensada y con condiciones de contorno fijas (véase [15]). El funcionamiento de las estructuras tensadas se basa en la teoría de la elasticidad (véase [10]), y el material utilizado en su construcción también juega un papel esencial. El objetivo al construir estas estructuras es encontrar una forma que estará en equilibrio para un estado de tensiones internas predefinido.

¹Fuente: <https://architectontour.wordpress.com/2017/05/24/catch-of-the-week-freio-otto-spanning-the-future/>.

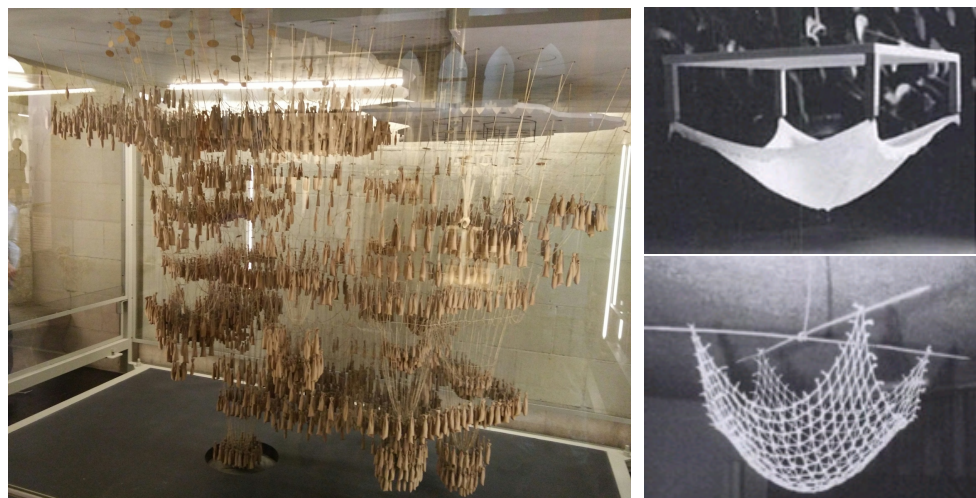


Figura 4: Maquetas de A. Gaudí y H. Isler.²

Las condiciones mecánicas y geométricas deben considerarse de manera simultánea, como se explica en la sección 3.

Desde la realización de las primeras estructuras tensadas, la investigación se ha centrado en implementar métodos numéricos para el cálculo estructural, aplicados inicialmente a cubiertas de redes de cables [4]. Actualmente, los procesos de búsqueda de forma se han incorporado a programas de diseño asistido por ordenador o CAD (*Computer Aided Design*) [21], como es el caso del componente *Kangaroo Physics* de *Grasshopper* (<https://www.grasshopper3d.com/>) diseñado por Daniel Piker. En el caso de las estructuras tensadas, los métodos de búsqueda de forma han sido incorporados en programas de cálculo de estructuras, como por ejemplo *WinTess* (<https://www.wintess.com/es/>) desarrollado inicialmente por Ramon Sastre [25].

La oferta de cursos de grado y máster sobre diseño geométrico asistido por ordenador, utilizando *Grasshopper*, es una realidad a nivel mundial en el ámbito del diseño paramétrico. Nuestra contribución, desde el Departamento de Matemática Aplicada en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Madrid, consiste en introducir las nociones de curvas y superficies de forma libre para que los estudiantes puedan modelar paramétricamente obras arquitectónicas ([22, 23]). Ofertamos dos asignaturas optativas en el grado en Fundamentos de la Arquitectura y una en el máster en Arquitectura, que están dando lugar a la dirección de trabajos fin de grado (<https://dma.aq.upm.es/tfgs-2024.php>).

En este artículo plantearemos el problema de la búsqueda de forma en la sección 2. Explicaremos en la sección 3 los tres métodos de análisis de estructuras tensadas originales: el método de densidad de fuerzas, el de relajación dinámica, y el de la matriz de rigidez [17]. Estos métodos ideados a finales del siglo XX son la base de

²Fuentes: <https://w.wiki/EBWw>, <https://blog.build11c.com/2009/04/heinz-isler-a-few-important-things/>, respectivamente.

los que se han desarrollado posteriormente [32]. Concluimos este trabajo con un ejemplo de modelización arquitectónica realizado con *Grasshopper* y *Kangaroo* en la sección 4.

2. EL PROBLEMA DE LA BÚSQUEDA DE FORMA

El objetivo de la búsqueda de forma, en relación al modelado computacional de estructuras tensadas, es encontrar una superficie que cumpla ciertas condiciones de equilibrio estático. El problema de la búsqueda de forma se puede plantear como [17]:

1. Encontrar una superficie mínima estable, la forma óptima de una membrana tensada, o
2. calcular una superficie que aproxime una membrana tensada en equilibrio estático.

La primera es una solución ideal y, a pesar de ser fuente de constante inspiración, no refleja las condiciones materiales reales. La segunda es la definición de búsqueda de forma generalmente aceptada, aunque existen definiciones más amplias [32]. En la práctica, la superficie en equilibrio se obtiene a partir de un proceso iterativo de ajuste geométrico [16, 17]. Se parte de una configuración inicial determinada a partir de una forma ideal o de un proceso de modelado arquitectónico. Estos aspectos se desarrollan en la sección 3.

Nos centramos a continuación en las superficies que aparecen en los experimentos con películas jabonosas, ya que se encuentran en equilibrio estable.

2.1. SUPERFICIES MÍNIMAS

Las superficies mínimas son soluciones del conocido problema de Plateau (1801-1883):

Sobre toda curva cerrada trazada en el espacio, ¿queda tendida al menos una superficie de área mínima?

Las superficies de área mínima también son superficies de mínima energía potencial, puesto que el área es proporcional a la energía potencial [13, 17].

Describimos a continuación la caracterización geométrica de las superficies definidas como grafos de funciones que son solución del problema de Plateau [5]. Una superficie $\mathcal{S}$ definida como grafo de una función $z = z(x, y)$ sobre un dominio D de $\mathbb{R}^2$ es solución del problema de Plateau si $z(x, y)$ minimiza el área de la superficie dada por

$$A = \iint_D F(z_x, z_y) dx dy,$$

siendo

$$F(z_x, z_y) = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2},$$

donde z_x y z_y denotan las derivadas parciales de z con respecto a x e y , respectivamente.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional planteado nos dan la condición necesaria para que $\mathcal{S}$ sea una superficie de área mínima, que es la siguiente ecuación en derivadas parciales de segundo orden, cuasilineal y elíptica:

$$(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy} = 0. \tag{1}$$

En 1776, Jean B. Meusnier (1754-1793) obtuvo la siguiente expresión de la curvatura media H de una superficie $\mathcal{S}$ definida como grafo de una función $z = z(x, y)$:

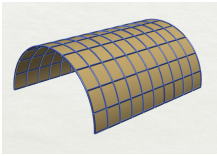
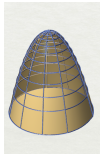
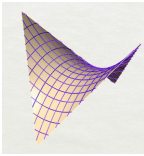
$$H = \frac{(1 + z_y^2)z_{xx} - 2z_xz_yz_{xy} + (1 + z_x^2)z_{yy}}{2(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

De (1) y (2), se deduce la condición geométrica que caracteriza las superficies de área mínima como aquellas superficies con curvatura media cero en todos sus puntos.

Teniendo en cuenta que la curvatura de Gauss K_G es el producto de las curvaturas principales (k_1, k_2) y la curvatura media es la semisuma, de la condición $H = 0$ se deduce que las superficies mínimas tienen curvatura de Gauss negativa o cero en todos sus puntos. El caso de superficies mínimas con curvatura de Gauss cero corresponde a una superficie plana.

Enlazando con el primer planteamiento del problema de búsqueda de forma mencionado al comienzo de esta sección, la forma de partida será una superficie, no necesariamente mínima, pero sí con curvatura de Gauss negativa en todos sus puntos con el objetivo de converger, durante el proceso, a una superficie mínima. En arquitectura, las superficies con curvatura de Gauss negativa se denominan anticlásticas.

Hacemos un inciso en el cuadro 1 para establecer un puente entre la nomenclatura en el ámbito arquitectónico y el matemático en relación a la clasificación de superficies en función de la curvatura de Gauss K_G .

Curvatura simple: $K_G = 0$ $k_1 = 0, k_2 \neq 0$	Curvatura doble: $K_G \neq 0$ $k_1, k_2 \neq 0$	
	$K_G > 0$ sinclástica	$K_G < 0$ anticlástica
		

Cuadro 1: Relación entre las denominaciones arquitectónicas y la curvatura de Gauss.

2.2. ANÁLISIS DE TENSIONES EN LAS PELÍCULAS JABONOSAS

Presentamos a continuación una caracterización física de las superficies mínimas [13, 17]. Partimos de una superficie elástica o membrana que se deforma ante

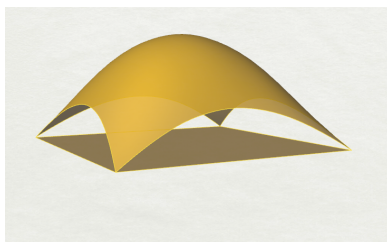


Figura 5: Estructura hinchable realizada en *Grasshopper*.

un esfuerzo exterior. En el estudio de la elasticidad de la membrana es de crucial importancia la fuerza por unidad de área.

La ley de Young-Laplace relaciona el cambio de presiones en una membrana que separa dos medios de distinta naturaleza con las fuerzas debidas a los efectos moleculares de la membrana y la geometría de la misma. Suponiendo que la superficie separa dos medios y está sometida a ambos lados por presiones P_1 y P_2 , en cada punto de la superficie se debe cumplir que:

$$P_1 - P_2 = \sigma(k_1 + k_2),$$

siendo k_1 y k_2 las curvaturas principales y σ el coeficiente de tensión superficial. El valor de la tensión superficial depende directamente del material de la membrana. La ecuación anterior se reescribe como sigue:

$$P_1 - P_2 = 2\sigma H.$$

Por tanto, si las presiones son constantes, la curvatura media es constante. En el caso de presiones iguales, $P_1 = P_2$, entonces la curvatura media es cero, obteniendo una *membrana o estructura tensada* por el perímetro de la misma, como es el caso de las películas jabonosas, figura 3. Si las dos curvaturas principales son estrictamente positivas, el resultado es una *estructura hinchada*, que tiene un comportamiento similar a una pompa de jabón, en la que la presión del aire en el interior es mayor que la presión del exterior tal y como se muestra en la figura 5 o en las imágenes de la derecha de la figura 4.

Las películas jabonosas, a pesar de su inestabilidad, son una herramienta útil para realizar maquetas que modelan membranas tensadas como las realizadas por F. Otto, figura 3.

3. ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS TENSADAS

El Estadio Olímpico de Múnich fue el primer proyecto de estructura tensada de gran envergadura. Para encontrar la forma inicial y deformada de la red de cables, se construyeron pequeños modelos de alambre en el *Institute of Lightweight Structures*, fundado por F. Otto. Por la complejidad del proyecto, ni los análisis sobre las maquetas físicas ni los métodos de fotogrametría fueron suficientes para

determinar la cubierta. Para obtener la forma óptima de la cubierta del estadio fue clave el método de densidad de fuerzas FDM (*Force Density Method*) ideado en 1969 por el ingeniero K. Linkwitz junto con su estudiante de doctorado, el matemático H. J. Schek (véanse [12, 17, 18, 26, 11]).

Prácticamente contemporáneos al método de densidad de fuerzas son otros métodos numéricos que aparecieron para determinar estructuras tensadas. Presentamos en esta sección los tres métodos numéricos más comunes: de densidad de fuerzas, de la matriz de rigidez y de relajación dinámica [2, 7].

Los pasos del proceso de diseño de una estructura tensada [17] son:

1. Creación de una superficie/membrana de partida anticlástica o plana.
2. Modelización de la membrana como red de cables. En términos geométricos, consiste en discretizar la superficie inicial mediante una malla definida por nodos/vértices y cables/aristas.
3. Imposición de las condiciones físicas a la red de cables: cargas ejercidas sobre los nodos y fuerzas elásticas ejercidas en los cables.
4. Planteamiento y resolución de las ecuaciones de equilibrio con el objetivo de obtener la posición final de los vértices de la malla.

El cuadro 2 resume las analogías entre la nomenclatura matemática y física al modelizar estructuras tensadas.

	Continua	Discreta
Matemática	Superficie	Malla (vértices/aristas)
Física	Membrana	Red de cables (nodos/cables)

Cuadro 2: Relación entre terminología matemática y física.

Consideramos a continuación el ejemplo más sencillo de red de cables formada por tres nodos $[N_1, N_2, N_3]$ y dos cables $[b_1, b_2]$. Tal y como muestra la figura 6, los nodos N_2 y N_3 están anclados y el nodo N_1 está sometido a una carga vertical $\mathbf{P} = (0, -P)^T$ que se corresponde con la gravedad. Sobre cada arista actúan las fuerzas internas o de tracción denotadas por $\mathbf{t}_1$ y $\mathbf{t}_2$.

La ecuación vectorial de equilibrio de la red de cables descrita es la siguiente:

$$\mathbf{P} + \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 = \mathbf{0}, \quad (3)$$

con

$$\begin{cases} \mathbf{t}_1 = \frac{\|\mathbf{t}_1\|}{\|\overrightarrow{N_1 N_2}\|} \overrightarrow{N_1 N_2}, \\ \mathbf{t}_2 = \frac{\|\mathbf{t}_2\|}{\|\overrightarrow{N_1 N_3}\|} \overrightarrow{N_1 N_3}. \end{cases}$$

La clave del método consiste en suponer constantes las densidades de fuerzas q_1, q_2 :

$$q_1 = \frac{\|\mathbf{t}_1\|}{\|\overrightarrow{N_1 N_2}\|}, \quad q_2 = \frac{\|\mathbf{t}_2\|}{\|\overrightarrow{N_1 N_3}\|}.$$

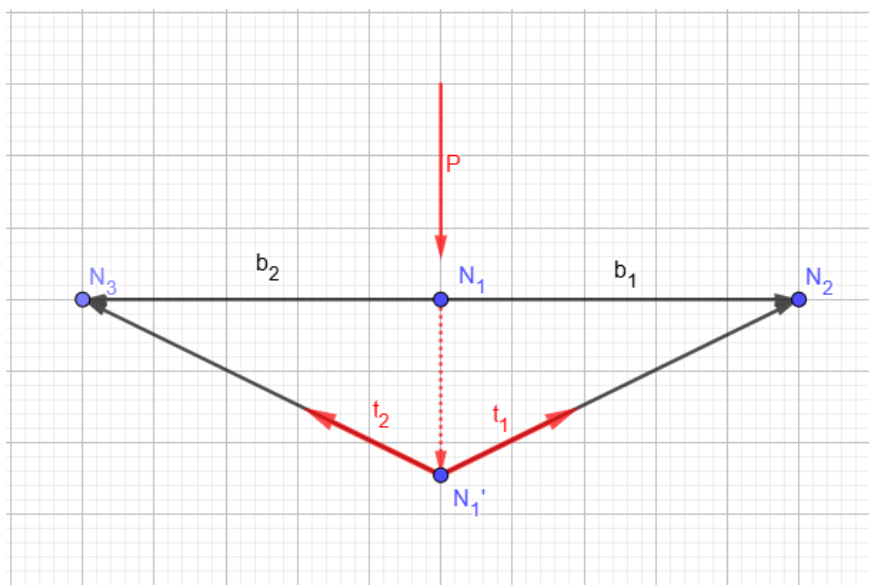


Figura 6: Esquema de fuerzas de una red de cables con dos puntos anclados.

La ecuación de equilibrio (3) se reescribe:

$$\mathbf{P} = -q_1 \overrightarrow{N_1 N_2} - q_2 \overrightarrow{N_1 N_3} \iff \mathbf{P} = (q_1 \quad q_2) \begin{pmatrix} \overrightarrow{N_2 N_1} \\ \overrightarrow{N_3 N_1} \end{pmatrix}.$$

Considerando los nodos con coordenadas $N_1 = (x_1, y_1)$, $N_2 = (x_2, 0)$ y $N_3 = (x_3, 0)$, se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{cases} 0 = q_1 (x_1 - x_2) + q_2 (x_1 - x_3), \\ -P = q_1 y_1 + q_2 y_1. \end{cases}$$

La posición de equilibrio del nodo N_1 en el caso en el que $q_1 = q_2 = q$ es:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \\ y_1 = -\frac{P}{2q}. \end{cases}$$

Este ejemplo sencillo ilustra el método de densidad de fuerzas que se describe en la sección 3.1. Al analizar las estructuras tensadas, objeto de estudio de este artículo, la red de cables está sometida solo a fuerzas de tracción debidas a la elasticidad del material que la componen. Las cargas gravitatorias no se consideran porque son estructuras autoportantes.

La figura 7 muestra las configuraciones inicial y final de una red de cables sometida solo a fuerzas de tracción. Concretamente, esta red consta de nueve nodos, los

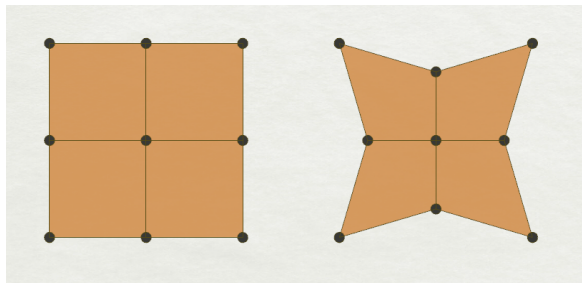


Figura 7: Representación de una red de cables plana con cuatro puntos anclados: configuración inicial (izquierda) y final (derecha).

cuatro de las esquinas anclados, y doce cables. Puesto que la configuración inicial es una superficie plana, el resultado final de la red de cables genera una superficie plana porque solo actúan fuerzas de tracción.

Dentro de la gran variedad de métodos para la resolución de las ecuaciones de equilibrio de una red de cables [32], destacamos tres de ellos por ser pioneros en el área: el método de densidad de fuerzas, el método de la matriz de rigidez y el método de relajación dinámica. Mientras que los dos primeros utilizan métodos de resolución de ecuaciones lineales aplicados a las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas, el tercero discretiza las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de la red de cables mediante la segunda Ley de Newton.

3.1. MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS

El método de densidad de fuerzas FDM (*Force Density Method*) permite calcular la posición de los nodos de una red de cables en equilibrio, suponiendo constante la densidad de fuerzas de cada cable. Se trata de un problema directo, a diferencia de los otros dos métodos que describiremos después, que son métodos iterativos.

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO. Consideremos una red de cables formada por n nodos, $N = [N_1, \dots, N_n]$, y m cables, $B = [b_1, \dots, b_m]$. Generalizando el ejemplo de la figura 6, suponemos el nodo i -ésimo N_i conectado con r nodos de la red $N_{i_1}, \dots, N_{i_r}$ y sometido a una fuerza externa $\mathbf{P}_i$. La ecuación de equilibrio del nodo i -ésimo es:

$$(q_{i_1} \dots q_{i_r}) \begin{pmatrix} \overrightarrow{N_{i_1} N_i} \\ \vdots \\ \overrightarrow{N_{i_r} N_i} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_i, \quad (4)$$

siendo $q_{i_j} = t_{i_j}/l_{i_j}$, $1 \leq j \leq r$, la densidad de fuerzas en el cable que conecta los nodos N_i y N_{i_j} , donde t_{i_j} es la fuerza de tracción y l_{i_j} es la longitud del cable.

Bajo la hipótesis de que las densidades de fuerzas son constantes, las ecuaciones de equilibrio en cada nodo son lineales.

FORMULACIÓN MATRICIAL DEL MÉTODO DE DENSIDAD DE FUERZAS. Una red de cables con n nodos, $[N_1, \dots, N_n]$, y m cables, $[b_1, \dots, b_m]$, se puede modelizar como un grafo dirigido con *matriz de incidencia* o *conectividad* $C = (c_{kj}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$, con m filas y n columnas, donde

$$c_{kj} = \begin{cases} 0 & \text{si } b_k \text{ no conecta ningún } N_i \text{ con } N_j, \\ 1 & \text{si existe } N_i \text{ tal que } b_k \text{ conecta } N_j \text{ con } N_i, \\ -1 & \text{si existe } N_i \text{ tal que } b_k \text{ conecta } N_i \text{ con } N_j. \end{cases}$$

Para la formulación matricial de las ecuaciones de equilibrio es conveniente escribir las densidades de fuerzas q_k , $1 \leq k \leq m$, en una matriz diagonal

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times m}.$$

Se reordena la lista de nodos $\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_f$, de manera que los h primeros tienen posición a determinar, *unknown*, y los $n - h$ restantes son nodos de anclaje cuyas posiciones son conocidas, *fixed*. Matricialmente, escribiremos

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 3}.$$

La matriz de incidencia se puede reescribir como una matriz de dos bloques $C = (C_u \ C_f)$, siendo $C_u \in \mathcal{M}_{m \times h}$ y $C_f \in \mathcal{M}_{m \times n-h}$.

Matricialmente, las ecuaciones de equilibrio para la red de cables, $C_u^T Q C \mathbf{N} = \mathbf{P}_u$, donde $\mathbf{P}_u$ es el vector de fuerzas sobre los nodos incógnita, se escriben como sigue:

$$(C_u^T Q C_u \quad C_u^T Q C_f) \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_f \end{pmatrix} = \mathbf{P}_u. \quad (5)$$

En las estructuras tensadas los esfuerzos son de tracción, es decir, $q_k > 0$, $1 \leq k \leq m$. Por lo tanto, la matriz $C_u^T Q C_u$ es definida positiva e invertible. De (5) se obtiene:

$$\mathbf{N}_u = -(C_u^T Q C_u)^{-1} (\mathbf{P}_u - C_u^T Q C_f \mathbf{N}_f).$$

Incluso para redes de cables pequeñas, la matriz $C_u^T Q C_u$ es de tamaño muy grande y, además, dispersa; por lo tanto es más eficiente resolver el sistema (5) utilizando métodos numéricos como, por ejemplo, el método del *gradiente conjugado*.

En el ejemplo de la figura 6, en el que el único nodo incógnita es el primero, la matriz de conectividad es

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array} \right),$$

y el sistema (5) se escribe como sigue:

$$\left((1 \ 1) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| (1 \ 1) \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1.$$

De ahí se recupera el sistema de ecuaciones del ejemplo, así como la ecuación (4):

$$(q \quad -q \quad -q) \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1 \iff (q \quad q) \begin{pmatrix} \overrightarrow{N_2 N_1} \\ \overrightarrow{N_3 N_1} \end{pmatrix} = \mathbf{P}_1.$$

3.2. MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ

Al igual que el método de densidad de fuerzas, el método de la matriz de rigidez SMM (*Stiffness Matrix Method*) utiliza la hipótesis de que, para desplazamientos pequeños, la relación entre carga y desplazamiento es lineal [17, sección 3.1]. En el caso de tres nodos y dos cables de la figura 6, teniendo en cuenta la ley de Hooke, la ecuación de equilibrio es

$$K\delta + \mathcal{O}(\delta^2) = P,$$

siendo δ el desplazamiento del nodo N_1 , véase la figura 6, y K la rigidez elástica de la barra, determinada por el módulo de Young, el área seccional y la longitud inicial de la barra.

Suponiendo desplazamientos pequeños de los nodos, la ecuación de equilibrio para una estructura con un número de nodos y barras arbitrario está dada por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{K}\delta = \mathbf{P}, \tag{6}$$

siendo δ el vector de desplazamientos nodales, $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez global y $\mathbf{P}$ el vector de cargas. La condición de equilibrio estático, que representa la ecuación matricial (6), no se puede aplicar directamente a estructuras que presentan desplazamientos grandes o que tienen un comportamiento geométrico no lineal. El método de la matriz de rigidez, SMM, resuelve la ecuación (6) mediante un proceso iterativo que en cada iteración actualiza la matriz de rigidez. Denotando por $\mathbf{K}_h$ la matriz de rigidez en la iteración h -ésima, el vector de desplazamiento δ_{h+1} y la posición de los nodos $\mathbf{N}_{h+1}$, el proceso iterativo viene dado por:

$$\begin{aligned} \delta_{h+1} &= \mathbf{K}_h^{-1} \mathbf{P}, \\ \mathbf{N}_{h+1} &= \mathbf{N}_h + \delta_{h+1}. \end{aligned}$$

Las nuevas posiciones de los nodos $\mathbf{N}_{h+1}$ determinan una nueva matriz de rigidez que permite actualizar las fuerzas internas $\mathbf{P}_{h+1}^{\text{int}} = \mathbf{K}_{h+1} \delta_{h+1}$, que deben equilibrarse de nuevo con las cargas externas $\mathbf{P}$ aplicadas a la estructura. El vector residual de cargas

$$\mathbf{R}_{h+1} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_{h+1}^{\text{int}}$$

determina el incremento del vector de desplazamiento

$$\Delta\delta_{h+1} = \mathbf{K}_{h+1}^{-1} \mathbf{R}_{h+1} = \delta_{h+2} - \mathbf{K}_{h+1}^{-1} \mathbf{P}_{h+1}^{\text{int}}.$$

El proceso termina cuando el vector residual de las cargas $\mathbf{R}_{h+1}$ se aproxima a cero y, en consecuencia, $\Delta\delta_{h+1}$ también, alcanzando así el estado de equilibrio de

la estructura. Obsérvese que es necesario calcular la inversa de una matriz de gran tamaño, para lo que es conveniente utilizar métodos numéricos apropiados.

El programa WinTess [33] tiene implementados los tres métodos descritos en este artículo para resolver el cálculo de estructuras tensadas, siendo el método de la matriz de rigidez el más utilizado por su eficiencia computacional.

3.3. MÉTODO DE RELAJACIÓN DINÁMICA

El método de relajación dinámica DRM (*Dynamic Relaxation Method*) tiene su origen en los métodos iterativos de relajación para resolver ecuaciones en derivadas parciales diseñados por Sir Richard V. Southwell (1888-1970) [28]. En los años 70, el método de relajación dinámica se aplica por primera vez en redes de cables [2, 7].

Este método parte de las ecuaciones diferenciales del movimiento de los nodos en lugar de concentrarse en el equilibrio estático de los mismos [17]. En particular, la ecuación del movimiento del nodo j -ésimo, suponiendo la existencia de amortiguamiento viscoso, es:

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{K}\delta_j + M_j\ddot{\delta}_j + C\dot{\delta}_j,$$

siendo $\mathbf{P}_j$ el vector de cargas externas del nodo j , δ_j (resp. $\dot{\delta}_j, \ddot{\delta}_j$) el vector desplazamiento (resp. velocidad, aceleración) del nodo j , $\mathbf{K}$ la matriz de rigidez, M_j la masa del nodo y C el coeficiente de amortiguamiento viscoso. Considerando la fuerza residual nodal $\mathbf{R}_j = \mathbf{P}_j - \mathbf{K}\delta_j$, el movimiento del nodo j -ésimo queda descrito por la siguiente ecuación:

$$\mathbf{R}_j = M_j\ddot{\delta}_j + C\dot{\delta}_j. \quad (7)$$

La ecuación (7) se reinterpreta como una ecuación diferencial de primer orden para $\dot{\delta}_j$ y se resuelve numéricamente mediante la discretización del punto medio o diferencias finitas centradas:

$$\dot{\delta}_j = \frac{\dot{\delta}_j^{n+\frac{1}{2}} + \dot{\delta}_j^{n-\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{y} \quad \ddot{\delta}_j = \frac{\dot{\delta}_j^{n+\frac{1}{2}} - \dot{\delta}_j^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}.$$

Esto describe un proceso iterativo para la variación de desplazamiento que continúa hasta que o bien las fuerzas residuales tienden a cero, o el vector residual se reduce un 0,1 % del valor original.

Este método permite realizar los cálculos para cada nodo de forma independiente puesto que no se actualiza la matriz de rigidez como en el SMM de la sección 3.2.

Habitualmente se utiliza el método de densidad de fuerzas o el de la matriz de rigidez para determinar la posición inicial de la estructura tensada a partir de la cual arranca el método de relajación dinámica. El programa *Kangaroo* tiene implementado el método de relajación dinámica para simular estructuras tensadas, tal y como se menciona en [6].

4. MODELIZACIÓN ARQUITECTÓNICA

En esta sección describimos los pasos a seguir para modelizar una estructura tensada con *Kangaroo* a partir de una malla diseñada en *Grasshopper*.

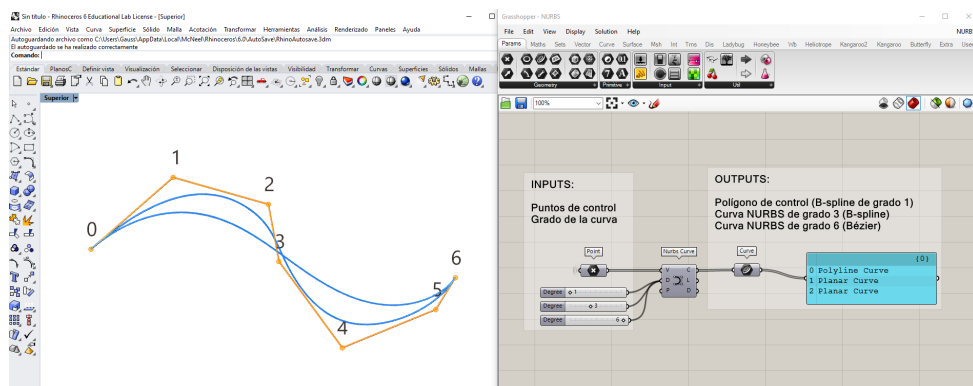


Figura 8: Captura de *Grasshopper* con la ventana de *Rhinoceros* a la izquierda.

En 2012 la *Association for Computer Aided Design in Architecture* otorga al arquitecto David Rutten el primer premio en la categoría de investigación novedosa por la creación de *Grasshopper*. Este paquete del programa de diseño asistido por ordenador, *Rhinoceros*, ha revolucionado el diseño paramétrico [24, 30], proporcionando un entorno accesible de programación de gran utilidad tanto en diseño industrial como en diseño arquitectónico.

La programación en *Grasshopper* se realiza a través de burbujas y cables que las conectan, visualizando el resultado en *Rhinoceros*. Mediante el uso de deslizadores se pueden implementar gran variedad de diseños paramétricos que incluyen, por ejemplo, estructuras plegables, fachadas cinéticas que cambian su configuración según la incidencia de los rayos solares, etc. Desde *Rhinoceros* se puede exportar la información para realizar una impresión 3D del modelo final. En la figura 8 se muestra un ejemplo de burbuja que genera una curva NURBS a partir de unos puntos de control y del grado de la curva [8].

Ilustramos a continuación un ejemplo de modelización de arquitectura textil inspirado en los toldos que se encuentran en el pabellón nuevo de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura (ETSAM) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM), y que han sido realizados en la asignatura optativa de Arquitectura Textil impartida en el grado en Fundamentos de la Arquitectura de la UPM.

Para modelar una estructura tensada en *Grasshopper* se utiliza el *plug-in Kangaroo*, mencionado anteriormente.

Siguiendo el flujo de trabajo descrito en la figura 10, hemos implementado en *Grasshopper* con la burbuja *Kangaroo Physics* el toldo de color naranja claro de la figura 9 que ocupa la posición central. Existen dos versiones de *Kangaroo* que permiten modelar estructuras tensadas [6]. En este ejemplo se utilizará la primera versión. Se toma como configuración inicial un paraboloide hiperbólico que es la superficie más clara en la imagen inferior de la figura 11. Tras discretizarla para formar una malla se imponen las condiciones físicas, que en este caso son la elasticidad de las aristas actuando como muelles y los cuatro puntos de anclaje de las esquinas. Como



Figura 9: Toldos del pabellón nuevo de la ETSAM.

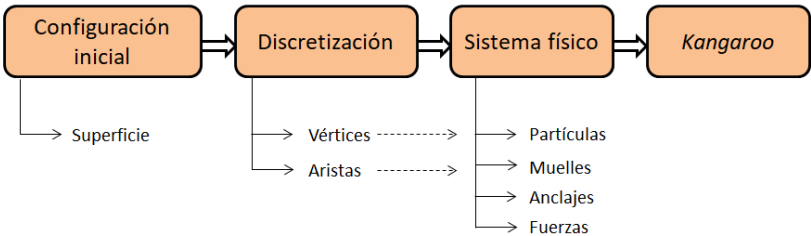


Figura 10: Flujo de trabajo para *Kangaroo*.

la estructura es autoportante se desprecia el efecto de la fuerza gravitatoria en las partículas/nodos.

A partir de la malla inicial al pulsar el botón *play* de *Kangaroo* el *plug-in* crea una sucesión de superficies a tiempo real que se estabilizan en la estructura tensada final, que aparece en color más oscuro en la imagen inferior de la figura 11. Los puntos de anclaje en la malla son las cuatro esquinas de la malla que están marcadas con una pequeña esfera.

De forma análoga se pueden modelar los cuatro primeros toldos que aparecen en la figura 9 tal y como se muestra en la figura 12.

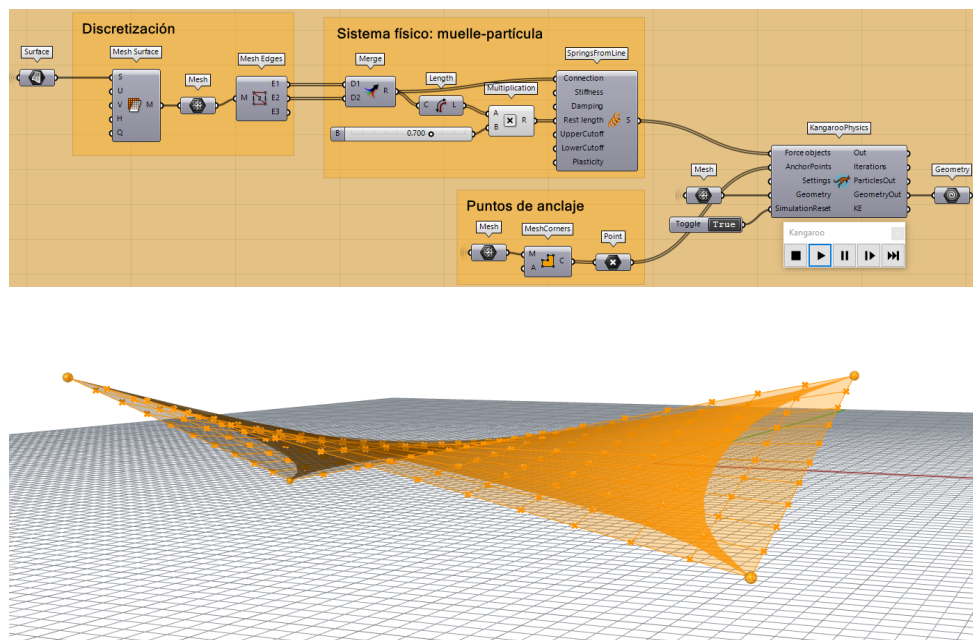


Figura 11: *Grasshopper*: Toldo naranja claro.

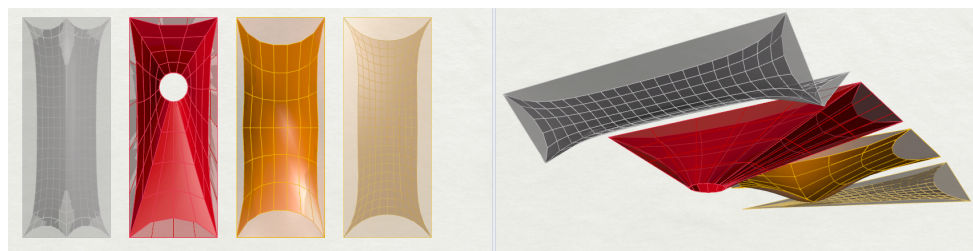


Figura 12: Modelización con *Grasshopper* de los cuatro primeros toldos del pabellón de la ETSAM, vista en planta y en perspectiva.

En la fase de patronaje [9, 27], las líneas geodésicas de la superficie resultante se calculan para determinar el corte de los patrones. Tanto en *Grasshopper* como en *Wintess* se pueden calcular las curvas de corte señalando los puntos extremos de las geodésicas.

5. CONCLUSIONES

Los proyectos de arquitectura textil son un claro ejemplo de cooperación entre profesionales de distintas disciplinas: arquitectura, ingeniería y matemáticas. Las

herramientas matemáticas y computacionales son esenciales tanto para el proceso de búsqueda de forma como para el análisis estructural.

A lo largo de décadas de experiencia en la realización de estructuras tensadas de gran envergadura, tanto textiles como de redes de cables, se han desarrollado una gran variedad de métodos de diseño y de cálculo de estructuras tensadas, basados en los descritos en este artículo: método de densidad de fuerzas, método de la matriz de rigidez y método de relajación dinámica [20, 32].

En la práctica, cada estudio de arquitectura especializado en estructuras tensadas suele desarrollar su propio software para la realización de sus proyectos [25]. Sería interesante potenciar la colaboración entre arquitectos y matemáticos para impulsar el desarrollo de software libre que conecte el diseño geométrico asistido por ordenador con herramientas de análisis estructural.

REFERENCIAS

- [1] S. ADRIAENSENS, P. BLOCK, D. VEENENDAAL Y C. WILLIAMS, *Shell structures for architecture: form finding and optimization*, Routledge, 2014.
- [2] M. R. BARNES, *Form finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation*, tesis doctoral, City University London, 1977. <https://openaccess.city.ac.uk/id/eprint/11887/>
- [3] G. BOLLER Y J. SCHWARTZ, Modelling the form. Heinz Isler, Frei Otto and their approaches to form-finding, *Proceedings of Seventh Conf. Constr. Hist. Soc.*, 3-5 April 2020, 565–576, Cambridge, Reino Unido, 2020.
- [4] H. A. BUCHHOLDT, *An introduction to cable roof structures*, Thomas Telford Publishing, 1999.
- [5] T. H. COLDING Y W. P. MINICOZZI II, *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics **121**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [6] P. CUVILLIERS, *Optimization methods for inverse form-finding design*, tesis doctoral, Department of Architecture, Massachusetts Institute of Technology, 2020.
- [7] A. S. DAY, *An introduction to dynamic relaxation*, 219:218–221, The Engineer, 1965.
- [8] G. FARIN, *Curves and surfaces for CAD: a practical guide*, 5th ed., Elsevier Science & Technology, San Francisco, 2001.
- [9] B. FORSTER Y M. MOLLAERT, *Arquitectura textil: guía europea de diseño de las estructuras superficiales tensadas*, Munilla-Lería, 2009.
- [10] A. E. GREEN Y W. ZERNA, *Theoretical elasticity*, Dover, 1992.
- [11] L. GRUNDIG, E. MONCRIEFF, P. SINGER Y D. STROBEL, A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970-1999, *Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, IASS-IACM 2000, June 5-7, Chania-Crete, Greece*, 2000.

- [12] E. HERNÁNDEZ-MONTES, R. JURADO-PIÑA Y E. BAYO, Topological mapping for tension structures, *J. Struct. Eng.* **132** (6) (2006), 970–977.
- [13] S. HILDEBRANDT Y A. TROMBA, *Matemática y formas óptimas*, Prensa Científica, Barcelona, 1990.
- [14] S. KRÜGER, *Textile architecture*, Jovis Verlag, Berlín, Alemania, 2009.
- [15] C. LAN, X. TU, J. XUE, B. BRISEGHHELLA Y T. ZORDAN, Adaptive form-finding method for form-fixed spatial network structures, *Int. J. Adv. Struct. Eng.* **10** (2) (2018), 99–109.
- [16] J. W. LEONARD, *Tension structures: behavior and analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1988.
- [17] W. J. LEWIS, *Tension structures: form and behaviour*, Thomas Telford, Londres, 2003.
- [18] K. LINKWITZ, About formfinding of double-curved structures, *Eng. Struct.* **21** (8) (1999), 709–718.
- [19] S. V. LOMOV, G. HUYSMANS E I. VERPOEST, Hierarchy of textile structures and architecture of fabric geometric models, *Text. Res. J.* **71** (6) (2001), 534–543.
- [20] T. NOURI-BARANGER, Computational methods for tension-loaded structures, *Arch. Comput. Methods Eng.* **11** (2) (2004), 143.
- [21] T. OBERBICHLER Y K. U. BLETZINGER, CAD-integrated form-finding of structural membranes using extended Catmull-Clark subdivision surfaces, *Comput. Aided Des.* **151** (2022), 103360.
- [22] H. POTTMANN, A. ASPERL, M. HOFER Y M. KILIAN, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007. <http://hdl.handle.net/20.500.12708/22181>.
- [23] H. POTTMANN, M. EIGENSATZ, A. VAXMAN Y J. WALLNER, Architectural geometry, *Comput. Graph.* **47** (2015), 145–164, <https://doi.org/10.1016/j.cag.2014.11.002>.
- [24] I. RAJAA, *Essential algorithms and data structures for computational design*, Robert McNeel & Associates, 2020. <https://www.food4rhino.com/en/resource/essential-algorithms-and-data-structures-grasshopper-2nd-edition?lang=es>.
- [25] R. SASTRE, *Diseño y cálculo de estructuras de barras, totalmente articuladas, con grandes deformaciones*, tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, 1981.
- [26] H. J. SCHEK, The force density method for form finding and computation of general networks, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **3** (1) (1974), 115–134. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(74\)90045-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(74)90045-0).
- [27] M. SEIDEL, *Tensile surface structures. A practical guide to cable and membrane construction*, Ernst & Sohn, Berlín, 2009.
- [28] R. V. SOUTHWELL, *A treatise on approximate computation*, Oxford University Press, Londres, 1940.
- [29] D. SUDJIC, «¿Cuánto pesa su edificio, señor Foster?» *AV: Monografías* **143** (2010), 96–101.

- [30] A. TEDESCHI, *AAD Algorithms-aided design: parametric strategies using Grasshopper*, Le Penseur, 2014.
- [31] J. TEJERA PARRA, *Textile architecture*, Arquitectura Viva, 2015. <https://arquitecturaviva.com/articles/textile-architecture>.
- [32] D. VEENENDAAL Y P. BLOCK, An overview and comparison of structural form finding methods for general networks, *Int. J. Solids Struct.* **49**(26) (2012), 3741–3753.
- [33] WINTESS, *Software de análisis no lineal para estructuras de membrana*, <https://www.wintess.com/es/apoyo/manual/introduccion/wintess3/>.

MARÍA BARBERO, DPTO DE MATEMÁTICA APLICADA, E.T.S. ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Correo electrónico: m.barbero@upm.es

EUGENIA ROSADO, DPTO DE MATEMÁTICA APLICADA, E.T.S. ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Correo electrónico: eugenia.rosado@upm.es

SONIA L. RUEDA, DPTO DE MATEMÁTICA APLICADA, E.T.S. ARQUITECTURA, UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

Correo electrónico: sonialuisa.rueda@upm.es