

Perplejidades sobre el conjunto vacío

por

Juan Antonio Navarro González

RESUMEN. Algunas definiciones que involucran conjuntos no están claras cuando uno de ellos es el conjunto vacío. Estudiamos qué convenios hay que adoptar en tal caso, de modo que las definiciones sean naturales y los teoremas generales sigan siendo válidos en ese caso particular.

El conjunto vacío, sin elemento alguno, a primera vista parece obvio y de poca importancia, y la introducción de un símbolo para denotarlo es más bien tardía. El primero que lo hace es George Boole [2, p. 21], que en 1847 lo denota 0, y el símbolo actual $\emptyset$ se introduce por primera vez en 1939 en el libro [3, p. 4] de Nicolas Bourbaki, seudónimo de un grupo de matemáticos franceses. André Weil dice en su autobiografía [17, p. 111] que él era el responsable de ese símbolo: «Mucho después, mi participación en esos debates me valió el respeto de mi hija Nicolette, cuando le dije que yo era personalmente responsable de que se adoptara el símbolo $\emptyset$ para el conjunto vacío, que ella acababa de aprender en el colegio. El símbolo $\emptyset$ pertenecía al alfabeto noruego y yo era el único que lo conocía en Bourbaki».

Sin embargo, a pesar de su insignificante apariencia, el conjunto vacío (al igual que el muy relacionado número 0) es de una fertilidad inimaginable: permite definir ya un conjunto con un elemento $\mathbf{1} := \{\emptyset\}$, un conjunto con dos elementos $\mathbf{2} := \{\emptyset, \mathbf{1}\}$, otro con tres $\mathbf{3} := \{\emptyset, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$, etc., y construir así los números naturales, a partir de los que podemos construir a su vez, con la axiomática adecuada, los números enteros, racionales, reales y complejos.

El conjunto vacío permite desarrollar la práctica totalidad de la matemática clásica; pero incluso cuando los conjuntos involucrados son finitos, a veces el significado de una definición no está claro en el caso del conjunto vacío. Así, dada una sucesión de números naturales $a_1, a_2, \dots$, el significado de la suma $\sum_{i \in I} a_i$ y el producto $\prod_{i \in I} a_i$ es claro para cualquier conjunto finito de índices $I \subset \{1, 2, \dots\}$, pero pueden surgir dudas cuando el conjunto de índices es $I = \emptyset$. Habrá quien dude si un espacio topológico vacío es conexo o no, y al hablar del álgebra $\mathcal{C}(K)$ de las funciones reales y continuas sobre un espacio compacto Hausdorff K , no esté seguro de su significado en el caso $K = \emptyset$. El propósito de este artículo es clarificar cuál ha de ser el significado razonable de muchas definiciones en el caso del conjunto vacío.

1. OPERACIONES BINARIAS

A veces el teorema fundamental de la aritmética se enuncia «todo entero mayor que 1 es un número primo o bien un único producto de números primos» [1], porque

se entiende que cualquier producto ha de tener dos o más factores. Otras leemos «todo entero mayor que 1 es un único producto de números primos» [18], porque se entiende que un producto con un único factor es el propio número primo, mientras que en [6, p. 18] leemos «incluso podemos ir un paso más allá, y considerar el número 1 como un producto «vacío» de primos, adoptando el convenio de que el valor de un producto vacío es 1. Éste es un convenio que es útil no sólo aquí sino en todas las matemáticas, pues permite incluir en los teoremas generales algunos casos especiales que de otro modo habría que excluir, o exigirían un enunciado más complicado. Con este convenio, el enunciado general es que todo número natural es un único producto de primos».

En efecto, para definir la suma $\sum_{i \in I} a_i$ y el producto $\prod_{i \in I} a_i$, se procede por recursión: si $I_n = \{i_1, \dots, i_n\}$, entonces se define

$$\sum_{i \in I_n} a_i := a_{i_n} + \sum_{i \in I_{n-1}} a_i, \quad \prod_{i \in I_n} a_i := a_n \prod_{i \in I_{n-1}} a_i,$$

tomando como caso inicial $\sum_{i \in I_1} a_i = a_{i_1}$ y $\prod_{i \in I_1} a_i = a_{i_1}$.

Ahora, si se considera el caso del vacío $I_0 = \emptyset$, la fórmula de recursión

$$\sum_{i \in I_1} a_i := a_{i_1} + \sum_{i \in \emptyset} a_i, \quad \prod_{i \in I_1} a_i := a_{i_1} \prod_{i \in \emptyset} a_i,$$

muestra que

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0, \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

La igualdad $\log(\prod_{i \in I} a_i) = \sum_{i \in I} \log a_i$ se satisface incluso cuando $I = \emptyset$, y para cualesquiera conjuntos finitos de índices I, J se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in J} a_i &= \sum_{i \in I \cup J} a_i + \sum_{i \in I \cap J} a_i, \\ \prod_{i \in I} a_i \cdot \prod_{i \in J} a_i &= \prod_{i \in I \cup J} a_i \cdot \prod_{i \in I \cap J} a_i. \end{aligned}$$

En un conjunto con una operación binaria que admita elemento neutro, este argumento muestra que lo razonable es suponer que el resultado de la operación sobre la familia vacía de elementos es justamente el neutro.

Así, al considerar uniones de subconjuntos de un conjunto dado X (el neutro es el vacío) e intersecciones (el neutro es X),

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \emptyset} X_i &= \{x \in X : x \in X_i, \exists i \in \emptyset\} = \emptyset, \\ \bigcap_{i \in \emptyset} X_i &= \{x \in X : x \in X_i, \forall i \in \emptyset\} = X. \end{aligned}$$

Además, en la teoría axiomática de conjuntos, la unión disjunta $\coprod_{i \in I} X_i$ es un subconjunto de $I \times (\bigcup_{i \in I} X_i)$, el producto directo $\prod_{i \in I} X_i$ es un conjunto de aplicaciones $I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$, y se cumple

$$\prod_{i \in \emptyset} X_i = \emptyset, \quad \prod_{i \in \emptyset} X_i = \mathbf{1} = \{\emptyset\},$$

lo que concuerda con que el conjunto vacío $\emptyset$ y el conjunto con un único elemento $\mathbf{1}$ sean neutros para estas operaciones: $X \sqcup \emptyset = X$, $X \times \mathbf{1} = X$.

Por tanto, en una categoría $\mathbf{C}$, las propiedades universales del coproducto $\coprod_{i \in \emptyset} X_i$ y del producto $\prod_{i \in \emptyset} X_i$ de una familia vacía de objetos

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{C}} \left(\prod_{i \in \emptyset} X_i, Y \right) &= \prod_{i \in \emptyset} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X_i, Y) = \mathbf{1}, \\ \text{Hom}_{\mathbf{C}} \left(Y, \prod_{i \in \emptyset} X_i \right) &= \prod_{i \in \emptyset} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X_i) = \mathbf{1}, \end{aligned}$$

afirman que son un objeto inicial y final de $\mathbf{C}$ respectivamente, y una categoría con coproductos (resp. productos) finitos tiene objeto inicial (resp. final).

Así, en el caso de los espacios vectoriales sobre un cuerpo (el objeto inicial y final es el espacio vectorial nulo)

$$\bigoplus_{i \in \emptyset} E_i = \prod_{i \in \emptyset} E_i = 0,$$

y concuerda con el convenio usual $k^0 = 0$. Igualmente, el grupo abeliano libre $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ sobre un conjunto con $n = 0$ elementos es $\mathbb{Z}^0 = 0$.

He aquí algunos usos de estos convenios:

1. *Morfismos de anillos.* Una aplicación $f: A \rightarrow A'$ entre anillos con unidad suele decirse que es morfismo de anillos cuando

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f(b), & \text{para todo } a, b \in A, \\ f(ab) &= f(a)f(b), & \text{para todo } a, b \in A, \\ f(1) &= 1, \end{aligned}$$

y la condición $f(0) = 0$ se omite porque se sigue directamente de la primera condición. Ahora bien, la segunda condición implica que

$$f(a_1 \dots a_n) = f(a_1) \dots f(a_n), \quad \text{para todo } a_1, \dots, a_n \in A,$$

y si se supone que esta igualdad se cumple incluso para una familia vacía de elementos de A , entonces $f(1) = 1$. Por tanto, un morfismo de anillos es justamente una aplicación que conserva sumas y productos finitos (eventualmente vacíos).

Análogamente, todo functor covariante que conserve coproductos (resp. productos) finitos también conserva el objeto inicial (resp. final).

2. *Números primos.* A veces [6, 13] los números primos se definen¹ por alguna propiedad natural que también satisface el número 1, que se excluye por razones de conveniencia;² situación nada satisfactoria para un concepto tan crucial. Sin embargo, Euclides ya señalaba (libro VII prop. 30) que si un número primo divide a un producto $\prod_{i \in I} a_i$ de enteros positivos, entonces divide a algún factor, y —con el anterior convenio— la unidad 1 no cumple esta propiedad cuando $I = \emptyset$, porque el 1 divide a $1 = \prod_{i \in \emptyset} a_i$ y no divide a ningún factor (no hay factor alguno).
3. *Ideales primos.* Normalmente se dice que un ideal $\mathfrak{p}$ de un anillo con unidad A es primo cuando $\mathfrak{p} \neq A$ y $ab \in \mathfrak{p} \Rightarrow a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, de modo que cuando un producto finito $\prod_{i \in I} a_i$ está en $\mathfrak{p}$, se cumple que $a_i \in \mathfrak{p}$ para algún índice i . Pero esta última condición, cuando $I = \emptyset$, muestra que $1 \notin \mathfrak{p}$, de modo que la condición $\mathfrak{p} \neq A$ es redundante si se admite el producto de la familia vacía de elementos como un producto finito.
4. *Espacios topológicos.* El anterior convenio es usado por Bourbaki [4] al definir un espacio topológico como un conjunto X con una familia $\mathfrak{R}$ de subconjuntos de X (llamados abiertos) tal que
 - a) toda unión de subconjuntos en $\mathfrak{R}$ también está en $\mathfrak{R}$,
 - b) toda intersección finita de subconjuntos en $\mathfrak{R}$ también está en $\mathfrak{R}$,
 y señalar a continuación que estos axiomas, cuando se aplican a la familia vacía de elementos de $\mathfrak{R}$, implican que $\emptyset$ y X están en $\mathfrak{R}$.
5. *Recubrimientos del espacio vacío.* Una familia $(U_i)_{i \in I}$ de subconjuntos abiertos es un recubrimiento abierto de X cuando $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. El espacio topológico vacío tiene dos recubrimientos abiertos muy diferentes: un recubrimiento abierto con un subconjunto abierto ($I = \{1\}$ y $U_1 = \emptyset$), y un recubrimiento abierto sin subconjunto abierto alguno ($I = \emptyset$).
6. *Haces.* Dar un prehaz de conjuntos $\mathcal{P}$ sobre un espacio topológico X es dar un conjunto $\mathcal{P}(U)$ para cada subconjunto abierto $U \subseteq X$ y una aplicación $r_V^U: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(V)$ para todo par de subconjuntos abiertos $V \subseteq U$ (llamada aplicación de restricción, y $r_V^U(s)$ se denota $s|_V$), de modo que se cumpla $(s|_V)|_W = s|_W$, cuando $W \subseteq V \subseteq U$, y $s|_U = s$, para todo $s \in \mathcal{P}(U)$. En el primer libro dedicado a la teoría de haces [9], se dice que un prehaz $\mathcal{F}$ es un haz cuando cumple las dos condiciones siguientes:
 - a) Sea $(U_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de X , sea U la unión de $(U_i)_{i \in I}$ y sean s', s'' dos elementos de $\mathcal{F}(U)$. Si las restricciones de s' y s'' a cualquier U_i coinciden, entonces tenemos que $s' = s''$.

¹En [6] leemos «Hay algunos números que no admiten ningún factor propio, y se llaman números primos. Si el 1 ha de considerarse primo o no es un convenio, pero es más sencillo considerar que el 1 no es primo»; en [13] «Se dice que un número p es primo si $p > 1$ y p no tiene divisores positivos salvo 1 y p »; y en el libro VII de Euclides «Un número ($\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$) es una multiplicidad compuesta de unidades» (de modo que la unidad no es un número) y «Un número primo ($\pi\rho\tau\omicron\varsigma$ $\alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\varsigma$) es aquél que sólo es medido por la unidad».

²Por ejemplo, si se considera que el 1 es primo, se pierde la unicidad de la representación de los enteros positivos en producto de primos.

- b) Sea $(U_i)_{i \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de X , con unión U , y supongamos que tenemos unos $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tales que, para todo $i, j \in I$, las restricciones de s_i y s_j a $U_i \cap U_j$ coinciden, entonces existe algún $s \in \mathcal{F}(U)$ cuya restricción a U_i es s_i para todo $i \in I$.

A continuación el autor señala «cuando I es el conjunto vacío, la condición (b) implica que $\mathcal{F}(\emptyset)$ es un conjunto con un elemento (salvo que los conjuntos $\mathcal{F}(U)$ sean todos vacíos, un caso trivial que generalmente excluiríamos)». Esta observación me parece algo confusa, pero en cualquier caso es claro que el autor considera que el caso trivial $\mathcal{F}(U) = \emptyset$ (para cualquier subconjunto abierto U) cumple las dos condiciones anteriores, aunque generalmente se excluya por convenio. Ahora bien, esas dos condiciones afirman que, dado cualquier recubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ de un subconjunto abierto U , tenemos una sucesión exacta de conjuntos

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{s \mapsto (s|_{U_i})} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \xrightleftharpoons[(s_i) \mapsto (s_j|_{U_i \cap U_j})]{(s_i) \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j})} \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

en el sentido de que

- a) la aplicación de la izquierda es inyectiva,
- b) su imagen es el subconjunto de $\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ donde coinciden las dos aplicaciones de la derecha.

En el caso del recubrimiento abierto de $U = \emptyset$ con un único subconjunto abierto $U_1 = \emptyset$, esta sucesión exacta afirma que la aplicación de restricción $\mathcal{F}(\emptyset) \rightarrow \mathcal{F}(\emptyset)$ es biyectiva, lo que es cierto para todo prehaz; pero en el caso del recubrimiento abierto de $U = \emptyset$ con ningún subconjunto abierto, $I = \emptyset$, tenemos una sucesión exacta

$$\mathcal{F}(\emptyset) \longrightarrow \mathbf{1} \rightrightarrows \mathbf{1}$$

y obtenemos una biyección $\mathcal{F}(\emptyset) \rightarrow \mathbf{1}$ para todo haz $\mathcal{F}$. Por tanto el prehaz $\mathcal{P}(U) = \emptyset$ para todo subconjunto abierto U no es un haz, y queda excluido por la propia definición de haz (no es un caso trivial que cumple la definición y se excluye por convenio).

7. *Bases del espacio vectorial nulo.* Toda familia de vectores $e_1, \dots, e_n$ de un k -espacio vectorial E define una aplicación k -lineal $k^n \rightarrow E$, que es biyectiva si y sólo si los vectores $e_1, \dots, e_n$ forman una base de E ; así que la familia de vectores vacía define una base del espacio vectorial nulo, el único espacio vectorial de dimensión 0.

2. APLICACIONES

En la teoría axiomática de conjuntos, cada aplicación $f: Y \rightarrow X$ se identifica (por definición) con su gráfica $\Gamma = \{(y, f(y))\}_{y \in Y} \subseteq Y \times X$, y las aplicaciones

$Y \rightarrow X$ con los subconjuntos $\Gamma \subseteq Y \times X$ en que la primera proyección $p_1: \Gamma \rightarrow Y$ es biyectiva. Cuando $Y = \emptyset$, el único subconjunto que cumple tal condición es $\Gamma = \emptyset$,

$$X^\emptyset = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(\emptyset, X) = \mathbf{1},$$

donde $X^Y = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, X)$ denota el conjunto formado por todas las aplicaciones $Y \rightarrow X$. El conjunto vacío $\emptyset$ es el objeto inicial en la categoría de conjuntos, y el conjunto $\mathbf{1}$ con un único elemento es el objeto final, pues hay una única aplicación $Y \rightarrow \mathbf{1}$ incluso cuando $Y = \emptyset$.

Cuando $X = \emptyset$, no existe $\Gamma \subseteq Y \times \emptyset = \emptyset$ tal que $p_1: \Gamma \rightarrow Y$ sea biyectiva, salvo cuando $Y = \emptyset$, caso en que podemos tomar $\Gamma = \emptyset$; luego

$$\emptyset^Y = \text{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, \emptyset) = \begin{cases} \emptyset & \text{cuando } Y \neq \emptyset, \\ \mathbf{1} & \text{cuando } Y = \emptyset, \end{cases}$$

y la única aplicación $\emptyset \rightarrow \emptyset$ es la identidad, que es biyectiva.

He aquí algunos usos de estos convenios:

1. En aritmética tenemos que $0^n = 0$ y $n^0 = 1$ para cualquier entero positivo n y, cuando $n = 0$, el convenio razonable es $0^0 := 1$. En efecto, si $|X|$ denota el cardinal de un conjunto X , tenemos que $|X^Y| = |X|^{|Y|}$ y

$$0^0 = |\emptyset|^{|\emptyset|} = |\emptyset^\emptyset| = |\mathbf{1}| = 1.$$

Además concuerda con que un producto sin factores es 1, y con que el límite de la sucesión $(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = 1/\sqrt[n]{n}$, cuando $n \rightarrow \infty$, es justamente 1.

2. Sea X_n un conjunto con n elementos. El factorial $n!$ de n es el número de biyecciones $X_n \rightarrow X_n$, y el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ es el número de subconjuntos de X_n con k elementos. Como sólo hay una biyección $\emptyset \rightarrow \emptyset$, y $\emptyset$ tiene un único subconjunto con 0 elementos,

$$0! = 1, \quad \binom{0}{0} = 1,$$

y la igualdad $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ se cumple incluso cuando $n = k = 0$.

3. Dados dos espacios topológicos X e Y , el conjunto de las aplicaciones continuas $Y \rightarrow X$ se denota $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X)$, de modo que $\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X) = \mathbf{1}$, y vemos que el anillo $\mathcal{C}(\emptyset) = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, \mathbb{R})$ de las funciones reales y continuas sobre $\emptyset$ es el anillo nulo 0, con un único elemento $0 = 1$.

Luego $\mathcal{C}(\emptyset)$ es el anillo final (hay un único morfismo de anillos $A \rightarrow 0$ cualquiera que sea el anillo A), y la bien conocida biyección (donde K y K' son espacios compactos Hausdorff)

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(K, K') \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-alg}}(\mathcal{C}(K'), \mathcal{C}(K)),$$

se tiene incluso cuando K o K' es el vacío, porque no hay ningún morfismo de anillos $0 \rightarrow A$ cuando $A \neq 0$ (al ser $0 \neq 1$ en A).

4. Con estos convenios, las propiedades universales de la unión disjunta $\coprod_{i \in I} X_i$ y el producto directo $\prod_{i \in I} X_i$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left(\prod_{i \in I} X_i, Y\right) &= \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(X_i, Y), \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}\left(Y, \prod_{i \in I} X_i\right) &= \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(Y, X_i),\end{aligned}$$

se cumplen incluso cuando el conjunto de índices I es el vacío, pues en tal caso los cuatro conjuntos tienen un único elemento.

3. ESPACIOS TOPOLÓGICOS

3.1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS CONEXOS

Como $\emptyset$ carece de subconjuntos no vacíos, el espacio topológico vacío es conexo de acuerdo con la definición usual [4]: *un espacio topológico es conexo cuando no es unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos y no vacíos.*

Sin embargo, en [12, p. 83], Grothendieck dice: «Si consideramos un espacio topológico arbitrario Z , tenemos una aplicación

$$\prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z, X_i) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(Z, \prod_{i \in I} X_i\right). \quad (1)$$

Me pregunto si es biyectiva. Esto significa que toda aplicación continua $Z \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ puede factorizarse de modo único a través de uno de los X_i , es decir, existe un único índice $i \in I$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & \prod_{i \in I} X_i \\ \downarrow & \nearrow & \\ X_i & & \end{array}$$

conmuta. Ahora bien, eso es cierto cuando Z es conexo» (subrayado en el original).³

Pero si se considera que el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z, -)$ conserva uniones disjuntas cuando Z es conexo, entonces el vacío no es conexo porque la aplicación (1) no siempre es inyectiva, ya que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X_1) \sqcup \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X_2) = \mathbf{1} \sqcup \mathbf{1}, \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X_1 \sqcup X_2) = \mathbf{1},$$

³F. Gaeta añade a continuación en [12] un comentario con una definición categorial de conexión: «Recordando que $\emptyset$ es un objeto inicial en $\mathbf{Sets}$, tenemos la siguiente generalización en una categoría arbitraria $\mathbf{C}$. Se dice que un objeto $X \in \mathrm{Ob} \mathbf{C}$ es conexo si y sólo si cuando X se escribe como suma de dos objetos $X', X'' \in \mathrm{Ob} \mathbf{C}$:

$$X = X' \sqcup X'',$$

eso implica que X' (o X'') es un objeto inicial de $\mathbf{C}$ ». Pero con tal definición, también introducida en [10], [14] y [7], el vacío es conexo en la categoría $\mathbf{Top}$.

ni es siempre sobreyectiva, ya que

$$\coprod_{i \in \emptyset} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X_i) = \emptyset, \quad \text{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(\emptyset, \coprod_{i \in \emptyset} X_i\right) = 1.$$

¿Qué definición es más razonable?

La perplejidad se debe a la suposición implícita de que todo espacio ha de ser conexo o desconectar, cuando, al considerar los abiertos cerrados de un espacio topológico Z , hay tres posibilidades muy distintas:

1. Tiene un único abierto cerrado, a saber $Z = \emptyset$.
2. Tiene exactamente dos abiertos cerrados, a saber Z y $\emptyset \neq Z$.
3. Existe algún abierto cerrado no trivial $U \neq \emptyset, Z$.

Los espacios conexos son los del segundo caso, y los espacios desconectados son los del tercer caso; mientras que el espacio vacío ni es conexo ni desconecta. Aquí la situación es muy similar a la que tenemos al estudiar los divisores de un entero positivo n : tiene un único divisor (a saber, $n = 1$), tiene exactamente dos divisores (a saber, n y $1 \neq n$), o existe algún divisor no trivial $d \neq 1, n$; de modo que el número 1 no es un número primo (números con 2 divisores) ni un número compuesto (números con más divisores).

Por tanto, la definición razonable es decir que un espacio topológico Z es conexo cuando la aplicación natural

$$\coprod_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z, X_i) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(Z, \coprod_{i \in I} X_i\right)$$

es biyectiva para toda familia finita $\{X_i\}_{i \in I}$ de espacios topológicos⁴.

He aquí algunos usos de este convenio:

1. Las componentes conexas de un espacio topológico son los subespacios conexos maximales. El espacio vacío carece de componentes conexas; pero todo espacio topológico X es la unión $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ de sus componentes conexas incluso cuando $X = \emptyset$, caso en que $I = \emptyset$ y $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} C_i$.
2. Si $\pi_0(X)$ denota el conjunto de las componentes conexas de un espacio topológico X , entonces $\pi_0(\emptyset) = \emptyset$, y se cumple que

$$\pi_0(X \sqcup Y) = \pi_0(X) \sqcup \pi_0(Y),$$

de modo que el número de componentes conexas es una función aditiva:

$$|\pi_0(X \sqcup Y)| = |\pi_0(X)| + |\pi_0(Y)|.$$

⁴En una categoría $\mathbf{C}$ con coproductos finitos, la definición razonable de objeto conexo Z es requerir que el functor $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, -): \mathbf{C} \rightsquigarrow \mathbf{Sets}$ conserve coproductos finitos; en particular $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, \coprod_{i \in \emptyset} X_i) = \emptyset$, donde $\coprod_{i \in \emptyset} X_i$ es el objeto inicial de $\mathbf{C}$.

3. La fórmula clásica $H_0(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{|\pi_0(X)|}$, donde X es una variedad compacta, se cumple cuando $X = \emptyset$, porque $|\pi_0(\emptyset)| = 0$. De hecho, como no hay ninguna aplicación del n -símplice standard a $\emptyset$, el grupo de las n -cadenas singulares $C_n(\emptyset, \mathbb{Z})$ es el grupo abeliano libre sobre un conjunto con 0 elementos, $C_n(\emptyset, \mathbb{Z}) = 0$, y el complejo de cadenas singulares $C_\bullet(\emptyset, \mathbb{Z})$ es el complejo nulo, y $H_0(\emptyset, \mathbb{Z}) = 0 = \mathbb{Z}^0$.
4. Al estudiar los revestimientos de una variedad conexa X , se establece que la categoría de revestimientos de X es equivalente a la categoría de conjuntos dotados de una acción del grupo fundamental $\pi_1(X, p)$. Por lo tanto, la aplicación $\emptyset \rightarrow X$ debe considerarse como un revestimiento de X (aunque a veces se excluya [8]), pues se corresponde con el $\pi_1(X, p)$ -conjunto vacío. Por otra parte, también se establece que los revestimientos conexos de X se corresponden con las clases de conjugación de subgrupos de $\pi_1(X, p)$; éstos definen revestimientos no vacíos de X , así que $\emptyset \rightarrow X$ no debe considerarse un revestimiento conexo de X .

NOTA (variación de [7, Remark 5.13]). Vamos a ver que la noción de conexión puede definirse en una categoría $\mathbf{C}$ de varias maneras razonables, que son equivalentes bajo hipótesis adecuadas.

Sea $\mathbf{C}$ una categoría con coproductos finitos (luego con objeto inicial), productos fibrados finitos y que cumple las siguientes condiciones (a) y (b):

(a) El objeto inicial $\emptyset$ es «vacío»⁵, y los coproductos finitos $X = \coprod_k X_k$ son disjuntos⁶.

De esta condición se sigue fácilmente que la aplicación natural

$$\prod_k \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(Z, X_k) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}\left(Z, \prod_k X_k\right), \quad \phi_k \mapsto \phi_k \circ i_k \quad (2)$$

es inyectiva para todo objeto $Z \neq \emptyset$.

(b) Los coproductos finitos conmutan con el producto fibrado⁷.

Bajo estas hipótesis se tienen tres formas equivalentes de definir objeto conexo:

TEOREMA. *Para todo objeto Z de $\mathbf{C}$ son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. El funtor $\mathrm{Hom}(Z, -)$ preserva coproductos finitos.
2. Todo morfismo $Z \rightarrow \coprod_k X_k$ en un coproducto finito factoriza a través de algún X_k , es decir, la aplicación (2) es sobreyectiva.
3. $Z \neq \emptyset$ y, si $Z = Z' \sqcup Z''$, entonces $Z' = \emptyset$ o $Z'' = \emptyset$.

⁵Es decir, el objeto inicial $\emptyset$ cumple que todo morfismo $T \rightarrow \emptyset$ es un isomorfismo.

⁶Es decir, los morfismos diagonales $X_k \rightarrow X_k \times_X X_k$ son isomorfismos (los morfismos naturales $i_k: X_k \rightarrow \prod_j X_j$ son monomorfismos), y $X_j \times_X X_k = \emptyset$ cuando $j \neq k$.

⁷Es decir, el morfismo natural $\prod_i (X_i \times_S T) \rightarrow (\prod_i X_i) \times_S T$ es un isomorfismo para cualesquiera morfismos $\prod_i X_i \rightarrow S$, $T \rightarrow S$.

3.2. ESPACIOS TOPOLÓGICOS IRREDUCIBLES

Un espacio topológico es irreducible *si no se puede escribir como unión finita de subespacios cerrados propios*, y a veces se considera que el espacio topológico vacío es irreducible [15], mientras que otras se supone que los espacios irreducibles no son vacíos [11]. ¿Qué convenio es más razonable?

Un espacio topológico Z es irreducible cuando para todo recubrimiento cerrado finito $Z = \bigcup_{i \in I} A_i$ se cumple que $A_i = Z$ para algún índice i , de modo que, para todo recubrimiento cerrado finito $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ de un espacio topológico X , se cumple

$$\bigcup_{i \in I} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(Z, X_i) = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}\left(Z, \bigcup_{i \in I} X_i\right).$$

Ahora bien, al considerar familias finitas, es razonable incluir la familia vacía; y si la igualdad anterior ha de cumplirse incluso cuando el conjunto de índices I es vacío, entonces el espacio vacío $Z = \emptyset$ no es irreducible:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \emptyset} \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, X_i) &= \emptyset, \\ \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, \bigcup_{i \in \emptyset} X_i) &= \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, \emptyset) = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Las componentes irreducibles de un espacio topológico X son los subespacios irreducibles maximales, y con este convenio el espacio vacío no tiene ninguna componente irreducible; pero la descomposición de un espacio topológico $X = \bigcup_{i \in I} C_i$ como unión de sus componentes irreducibles se cumple cuando $X = \emptyset$, caso en que tenemos $I = \emptyset$ y $\emptyset = \bigcup_{i \in \emptyset} C_i$.

3.3. ESPACIOS SOBRIOS

El cierre $\bar{x}$ de cualquier punto x de un espacio topológico X siempre es un subespacio cerrado e irreducible de X , y se dice que X es *sobrio* [11] cuando todo cerrado irreducible de X es el cierre de un único punto de X . Es difícil imaginar que un espacio T_0 que no sea sobrio (¿borracho?) pueda jugar algún papel importante en alguna rama de las matemáticas. Quizás salvo las variedades algebraicas introducidas por Serre en el influente FAC [16], que casi nunca son sobrias, pero que rápidamente fueron reemplazadas por los espacios sobrios asociados en la teoría más general y natural de esquemas [11].

De hecho, todo espacio topológico X tiene asociado un espacio sobrio X^s , dotado de una aplicación continua natural $j: X \rightarrow X^s$, tal que para cada espacio sobrio Y tenemos una biyección

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X^s, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, Y), \quad f \mapsto f \circ j.$$

En particular, para todo espacio sobrio Y ha de cumplirse que

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset^s, Y) = \text{Hom}_{\mathbf{Top}}(\emptyset, Y) = \mathbf{1},$$

y, cuando Y tiene dos puntos, vemos que $\emptyset^s = \emptyset$. Lo razonable es suponer que $\emptyset$ es sobrio: carece de puntos y de subespacios cerrados irreducibles.

ESCOLIO. En este artículo siempre ha estado presente la ambigüedad de si es más razonable decir «el conjunto vacío» o «un conjunto vacío» (en el caso de una categoría, «el objeto inicial o final» o «un objeto inicial o final»), de si todos los conjuntos vacíos son iguales o no, perplejidad que no sé resolver. Ya en 1952, en el Congreso *Croupion des Vosges* de Bourbaki [5, p. 1], «les logiciens veillaient: ils apprirent à Grothendieck que, si tous les ensembles vides sont égaux, certains du moins sont plus égaux que d'autres; le pauvre en devint fou furieux, et rentra à Nancy par le premier train»⁸.

AGRADECIMIENTOS. Mi gratitud a mis amigos Juan y Ricardo con el recuerdo de las interminables horas de discusión sobre lo divino y lo humano ante una taza de café. Juan me indicó la definición correcta de conexión, y Ricardo me preguntaba sin descanso por qué el número 1 no es primo.

REFERENCIAS

- [1] K. H. BOO, A. SHARDA ET AL., *Fundamental Theorem of Arithmetic*, <https://brilliant.org/wiki/fundamental-theorem-of-arithmetic/>
- [2] G. BOOLE, *The Mathematical Analysis of Logic*, Macmillan, Barclay & Macmillan, Cambridge, 1847.
- [3] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles. (Fascicule de résultats)*, Act. Scient. et Ind. **846**, Hermann, 1939.
- [4] N. BOURBAKI, *Topologie Générale*, Act. Scient. et Ind. **1142**, Hermann, 1951.
- [5] N. BOURBAKI, Compte rendu du Congrès croupion des Vosges, Celles-sur-Plaine (8-16 mars 1952), *La Tribu*, n.º **27** (1952), <https://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/104>
- [6] H. DAVENPORT, *The Higher Arithmetic*, Sixth edition, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [7] E.J. DUBUC Y C.S. DE LA VEGA, On the Galois Theory of Grothendieck, *Bol. Acad. Nac. Cienc. Cordoba* **65**, 2000. Disponible en <https://arxiv.org/abs/math/0009145>
- [8] C. GODBILLON, *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, 1971.
- [9] R. GODEMENT, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Act. Scient. et Ind. **1252**, Hermann, 1958.
- [10] A. GROTHENDIECK, *Revêtements Etales et Groupe Fondamental, SGA 1*, Lect. Notes in Math. **224**, Springer Verlag, 1971.

⁸ «Los lógicos velaban: explicaron a Grothendieck que, si bien todos los conjuntos vacíos son iguales, al menos algunos son más iguales que otros; el pobre se puso furioso y regresó a Nancy en el primer tren».

- [11] A. GROTHENDIECK Y J.A. DIEUDONNÉ, *Éléments de Géométrie Algébrique I (2nd ed.)*, Grund. Math. Wiss. **166**, Springer Verlag, 1971.
- [12] A. GROTHENDIECK, *Introduction to Functorial Algebraic Geometry*, Summer course SUNY at Buffalo (Lecture notes written by F. Gaeta), 1973.
- [13] G.H. HARDY Y E.M. WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Univ. Press, 1938.
- [14] O. LEROY, *Groupe fondamentale et Théorème de Van Kampen en Théorie des Topos*, Cahiers Math. **17**, Montpellier, 1979.
- [15] M. MANETTI, *Topology*, Unitext **91**, Springer Verlag, 2015.
- [16] J.P. SERRE, Faisceaux Algébriques Cohérents, *Annals of Math.* **61** (2), 1955, 197–278.
- [17] A. WEIL, *Memorias de Aprendizaje*, Ciencia Abierta **6**, Nivola, 2002.
- [18] WIKIPEDIA, Fundamental theorem of arithmetic, https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_theorem_of_arithmetic

JUAN ANTONIO NAVARRO GONZÁLEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA

Correo electrónico: navarro@unex.es

Página web: <https://matematicas.unex.es/~navarro/>