
LAS MEDALLAS FIELDS

Sección a cargo de

Leovigildo Alonso Tarrío y Ana Jeremías López

La obra de Steve Smale

por

Felipe Cucker y Martín Sambarino

En la mañana del viernes 26 de agosto de 1966, Stephen Smale ofreció una conferencia de prensa en las escaleras de la Universidad de Moscú —que en esos momentos albergaba el Congreso Internacional de Matemáticos— ante un grupo de periodistas soviéticos y americanos así como de varios matemáticos. En ella, Smale leyó una declaración corta que llevaba manuscrita en un par de hojas de papel al cabo de la cual respondió preguntas de los periodistas. La declaración criticaba la intervención americana en Vietnam al tiempo que la comparaba con la represión soviética en Hungría en 1956. Las autoridades locales tomaron medidas inmediatamente para evitar la extensión de estas declaraciones a otros posibles actos públicos ocupando el resto del día de Smale con actividades intrascendentes (para más detalles ver [6, cap. 7]). Smale partió a la mañana siguiente en un vuelo a Atenas donde lo esperaban su esposa, Clara, y sus hijos, Nat y Laura. También esa mañana la prensa americana, en particular el *New York Times* y el *Washington Post* reportaban (no sin cierta distorsión) los eventos del día anterior en Moscú.

La conferencia de prensa fue una idea inteligente de Smale para responder a la solicitud de la embajada vietnamita en Moscú, efectuada un par de días antes, de conceder una entrevista a un periodista vietnamita. Smale no quería verse limitado a responder preguntas planteadas por otros pero tampoco quería perder la oportunidad, generada por su reciente notoriedad, de manifestar públicamente sus opiniones sobre un tema que encontraba importante.

¿A qué se debía esa reciente notoriedad? Smale venía de recibir la Medalla Fields por «demostrar la conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 5$: toda variedad topológica n -dimensional, cerrada, homotópicamente equivalente a la n -esfera, es homeomorfa a la n -esfera».

1. LA CONJETURA DE POINCARÉ

Henri Poincaré es considerado uno de los fundadores de la topología algebraica. Entre sus contribuciones destacan la introducción de la homología y del grupo fundamental. Una motivación detrás de estas nociones era asociar a una variedad topológica un conjunto de invariantes (números o estructuras algebraicas) que caracterizaran a la variedad. Un ejemplo ya conocido a finales del siglo XIX es el hecho de que si una superficie S es conexa, cerrada¹ y tiene la propiedad de que todo lazo en S se puede deformar continuamente a un punto, entonces S es homeomorfa a una esfera. Un lazo en S es la imagen de $f : [0, 1] \rightarrow S$ continua y tal que $f(0) = f(1)$. Y por «deformar continuamente a un punto» entendemos la existencia de

$$\psi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S$$

continua y de un punto $x \in S$ tal que, para todo $s \in [0, 1]$, $\psi(0, s) = f(s)$ y $\psi(1, s) = x$. En términos de invariantes algebraicos, esta propiedad (que todo lazo se deforma a un punto) se expresa diciendo que el grupo fundamental de S es trivial. En términos topológicos modernos, que S es *simplemente conexa*.

La conjetura de Poincaré propone extender este resultado de dimensión 2 a dimensión 3. En lenguaje moderno: *toda variedad topológica 3-dimensional cerrada, conexa y con grupo fundamental trivial es homeomorfa a una 3-esfera*. Poincaré no la enunció en estos términos, pero hay consenso en que este era el problema. De hecho, tampoco enunció una conjetura sino que, más bien, propuso una pregunta sin inclinarse por la respuesta afirmativa.

Habrà de pasar un siglo hasta la llegada de esta respuesta². En 1961, inesperadamente, un teorema de Smale conmociona a la comunidad matemática. En el más de medio siglo desde los artículos de Poincaré, se consideraba habitualmente una generalización de la conjetura:

Toda variedad topológica n -dimensional cerrada con los mismos (es decir, isomorfos) grupos de homotopía que la n -esfera es homeomorfa a la n -esfera.

Esta generalización es natural, ya que esta es precisamente la situación en dimensiones 2 (donde el enunciado es cierto) y 3 (donde es solo conjetural). Además, y esto lo observa Smale en un artículo de divulgación muy posterior sobre las circunstancias alrededor de su resultado [51], admite un enunciado equivalente más elemental (en términos de homología en lugar de homotopía):

Toda variedad topológica n -dimensional cerrada y simplemente conexa con los mismos (es decir, isomorfos) grupos de homología que la n -esfera es homeomorfa a la n -esfera.

¹En nuestro contexto cerrada equivale a compacta y sin borde.

²La conjetura de Poincaré es demostrada en una serie de tres artículos en 2002-2003 por Grigori Perelman, a quien se le otorgan por ello la medalla Fields y el Clay Millenium Prize. Perelman rechaza ambas distinciones.

Puede que llevada por la idea de que en dimensiones superiores «las cosas se complican» la comunidad matemática se inclinase por la falsedad de esta generalización. El resultado de Smale [37], que la conjetura generalizada de Poincaré es cierta para $n \geq 5$, fue una sorpresa.

2. ALGUNOS APUNTES BIOGRÁFICOS

Stephen Smale nació el 15 de julio de 1930 en Flint, Michigan, hijo de Lawrence Albert Smale y Helen Morrow. Lawrence era «ateo y marxista» y era miembro del *Proletarian Party* (una escisión del partido comunista americano acaecida poco después de la fundación de este último en 1919) [6, págs. 8–9]. No es imposible que esta faceta del padre haya influido en que Smale no temiese expresar sus opiniones, sobre todo en la década de los 60, de lo cual la conferencia de prensa en las escaleras de la Universidad de Moscú en 1966 no es más que un ejemplo. A diferencia de lo que puede haber sido la actitud más común en el medio rural alrededor de Flint, Lawrence promovió activamente la curiosidad intelectual de Steve y de su hermana Judy. No es sorprendente que fuese el tercero de su clase al terminar el bachillerato, resultado que motivó la concesión de una beca para seguir con sus estudios durante cuatro años en la Universidad de Michigan en Ann Arbor. El talento de Steve, sin embargo, no debía de ser notorio pues el que había sido su profesor de física le sugirió que la más modesta Michigan State University podía ser una mejor opción para él [6, pág. 17]. Y, de hecho, Smale pasa los años de sus estudios de grado sin destacarse y lo mismo se puede decir de su primer año de estudios de posgrado.

El punto de inflexión en el desarrollo matemático de Steve se dio en 1953 cuando Raoul Bott comenzó a ofrecer un curso de posgrado de topología algebraica. Steve y dos estudiantes más (uno de ellos, James Munkres, también llegaría a ser un topólogo distinguido³) se matricularon en el curso. El resto de la audiencia era profesorado del departamento de matemáticas. Esto fue determinante en la elección del nivel al que Bott impartió el curso y en lo exigente que resultó para Smale (y, sin duda, para los otros dos estudiantes). El curso también fue determinante para que Smale le pidiese a Bott que dirigiese su tesis doctoral. Bott propuso a Smale un problema concreto (la clasificación, módulo homotopía, de curvas lisas en una variedad lisa arbitraria) y una manera de abordar el problema. Smale resolvió el problema usando un enfoque propio y se doctoró en 1956. En medio de este proceso, en 1954 conoció a Clara Davis y el 31 de enero de 1955 se casó con ella. Clara habría de acompañar a Steve hasta su fallecimiento en abril del 2011.

Steve Smale fue el primer estudiante de doctorado de Bott. No es sorprendente que no haya sido el único. Lo que sí lo es, es que entre sus otros estudiantes se encuentre Daniel Quillen [12], lo que da a Bott la rara distinción de haber supervisado las tesis de dos medallistas Fields.

³Ver https://es.wikipedia.org/wiki/James_Munkres.

3. EVERSIÓN DE LA ESFERA

El primer puesto académico de Smale fue en el *College* de la Universidad de Chicago. El hecho de que no fuese en el departamento de matemáticas es evidencia de que la imagen de Smale en los medios académicos todavía no era muy brillante. Esto cambia radicalmente cuando Smale publica un artículo [35] en 1958 demostrando que es posible evertir la esfera. Esto es, la existencia de una homotopía regular entre la inmersión estándar $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ de la esfera en el espacio euclídeo y la inmersión resultante de la reflexión respecto al plano del ecuador (que intercambia los hemisferios sur y norte). En términos informales pero, esperemos, ilustrativos, esto se traduce en una deformación continua de la esfera que intercambia su «cara interior» con su «cara exterior». Aunque se permite que la esfera se autointerseque (los estadios intermedios no necesitan ser homeomorfos a la esfera), la deformación debe ser regular, es decir, las tangentes deben cambiar continuamente.

La imposibilidad de hacer algo similar para el círculo S^1 en el plano $\mathbb{R}^2$ había sido demostrada por Whitney en 1937. Debido a ello, nadie esperaba que fuese posible para S^2 . El resultado de Smale tomó por sorpresa a la comunidad académica, y cimentó su reputación. La demostración de Smale es teórica, no constructiva, es decir, prueba que *existe* una eversión de la esfera pero no dice *cómo* es. Pasaron algunos años antes de poder visualizar la eversión de la esfera. William Thurston [22] fue uno de los que propusieron un método para conseguir esta visualización⁴.

Smale aprovechó esta circunstancia para solicitar financiación de la NSF para una pasantía de dos años en el Institute for Advanced Studies en Princeton. De esos dos años solo estuvo un año y medio en el IAS. El último medio año lo pasa en el IMPA⁵, en Río de Janeiro. Es allí donde demuestra el grueso de la conjetura generalizada de Poincaré y es también allí donde comienza su obra en sistemas dinámicos.

4. CAOS Y ESTABILIDAD ESTRUCTURAL

En el año 1958, durante su estadía en el IAS, Smale conoció a Mauricio Peixoto, un matemático brasileño que realizaba una pasantía en la Universidad de Princeton bajo la supervisión de Solomon Lefschetz, quien lo indujo a trabajar en el problema de la estabilidad estructural de sistemas dinámicos.

La noción de estabilidad estructural fue introducida por Andronov y Pontryagin en la década de 1930, en el contexto de campos (flujos) en el disco $\mathbb{D}^2$. Esta idea jugaría un papel fundamental en la teoría de sistemas dinámicos desarrollada por Smale. Un *sistema dinámico diferenciable a tiempo discreto* sobre una variedad diferenciable M está dado por un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$. Las *órbitas* del sistema son los conjuntos $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ para $x \in M$. Cuando $f(x) = x$ decimos que x es un *punto fijo*, y si $f^n(x) = x$ para algún $n > 0$, decimos que x es un *punto periódico* y su órbita correspondiente es *periódica*. De manera similar, un *sistema dinámico diferenciable*

⁴Se pueden encontrar vídeos explicativos de la eversión de la esfera en YouTube, por ejemplo: *Outside In – How to turn a sphere inside out*, <https://www.youtube.com/watch?v=0I-To1eUtuU>

⁵Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

a tiempo continuo sobre M está dado por un campo diferenciable $X : M \rightarrow TM$ donde TM denota el fibrado tangente a M . Las órbitas del sistema son ahora los conjuntos, para $x \in M$, $\mathcal{O}^X(x) = \{\varphi_t^X(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ donde $\varphi_t^X(x)$ denota el flujo o las soluciones (curvas integrales) del campo. Cuando $X(x) = 0$ decimos que x es una singularidad y si $\varphi_t^X(x) = x$ para algún $t > 0$, decimos que x es un punto periódico y su órbita correspondiente es periódica.

El objetivo es describir cualitativamente el comportamiento asintótico de las órbitas, es decir, comprender cómo se comporta, desde el punto de vista topológico, $f^n(x)$ (caso discreto) o $\varphi_t^X(x)$ (caso continuo) cuando el tiempo (n o t según corresponda) tiende a infinito. Más precisamente, se trata de describir, para cada $x \in M$, el conjunto definido por

$$\omega(x) = \{y \in M : \text{existe una sucesión } n_k \rightarrow +\infty \text{ con } f^{n_k}(x) \rightarrow y\},$$

al que llamamos conjunto ω -límite del punto x . Cuando consideramos el tiempo hacia el pasado, se llama conjunto α -límite y se denota por $\alpha(x)$. Es importante observar que cuando un punto fijo p es hiperbólico, es decir, cuando $Df_p : T_p M \rightarrow T_p M$ no tiene valores propios de módulo uno, el conjunto $\mathcal{W}^s(p) = \{y \in M : \omega(y) = p\}$ es una subvariedad inmersa llamada variedad estable. De forma similar, considerando el tiempo hacia el pasado, $\mathcal{W}^u(p) = \{y \in M : \alpha(y) = p\}$ es una subvariedad inmersa llamada variedad inestable. Lo mismo puede decirse cuando en lugar de considerar un punto fijo se considera una órbita periódica⁶. Como observó Poincaré, describir la dinámica de todos los sistemas es imposible (en algún sentido) y la aspiración sería poder describir la dinámica de la mayoría de los sistemas (es decir, los contenidos en un subconjunto genérico; por ejemplo, un abierto denso en el conjunto de todos los sistemas dinámicos).

Las dinámicas «estables» forman de manera natural un conjunto grande (abierto) en el espacio de los sistemas. De manera informal, un sistema es estructuralmente estable si sistemas «cerca» (en el sentido de una topología en el espacio de sistemas) se comportan de forma similar, es decir, son iguales módulo un cambio continuo de coordenadas. Usualmente, se dice que dos sistemas están C^r -cerca si los correspondientes campos (o difeomorfismos en el caso discreto) están C^r -cerca. Más formalmente, un campo $X : M \rightarrow TM$ (o un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$) es C^r -estructuralmente estable si, para cualquier campo Y (o difeomorfismo g , respectivamente) que esté suficientemente C^r -cerca de X , existe un homeomorfismo de la variedad $h : M \rightarrow M$ tal que $h(\mathcal{O}^X(x)) = \mathcal{O}^Y(h(x))$ para todo $x \in M$ (o $h \circ f = g \circ h$ en el caso discreto). Como consecuencia de la definición resulta que los sistemas estructuralmente estables forman efectivamente un abierto en el conjunto de los sistemas dinámicos.

El teorema de Mauricio Peixoto, que tanto entusiasmó a Smale, establece que los campos en una superficie compacta S que son estructuralmente estables forman un

⁶Para sistemas dinámicos a tiempo continuo, los conjuntos ω y α -límite se definen de la misma forma. Una singularidad p de un campo es hiperbólica si DX_p no tiene valores propios con parte real nula, y una órbita periódica de un campo es hiperbólica si es un punto fijo hiperbólico de la función de retorno a una sección transversal. En estos casos $\mathcal{W}^s(\mathcal{O}(p))$ y $\mathcal{W}^u(\mathcal{O}(p))$ también son subvariedades inmersas.

abierto denso y se caracterizan por: (a) tener una cantidad finita de singularidades y órbitas periódicas, todas ellas hiperbólicas; (b) no hay conexión de sillan⁷; y (c) los conjuntos α -límite y ω -límite de cualquier punto están formados por una singularidad o una órbita periódica [26, 27]. La importancia de este resultado radica en dos puntos esenciales: por un lado *caracteriza* los campos que son estructuralmente estables, y por otro muestra la *densidad* de los mismos en el conjunto de los campos en superficies.

¿Cuál podría ser la versión en dimensiones arbitrarias de los sistemas que satisfacen (a), (b) y (c) en superficies? Con la confianza derivada de sus conocimientos en topología, Smale define una posible versión de esta clase de sistemas en dimensiones arbitrarias. Estos sistemas: (a') tienen una cantidad finita de singularidades y de órbitas periódicas, todas ellas hiperbólicas; (b') las variedades estables e inestables de las órbitas que aparecen en (a') se intersecan transversalmente; y (c') los conjuntos α -límite y ω -límite de cualquier punto están formados por una singularidad o una órbita periódica. Los sistemas en esta clase fueron posteriormente bautizados por René Thom como *sistemas de Morse-Smale*. Smale demuestra en [36, 38] que todo sistema de tipo gradiente (es decir, un sistema cuyo campo es el gradiente de una función $h : M \rightarrow \mathbb{R}$) puede ser aproximado por un sistema de Morse-Smale. Cabe señalar que esta clase de sistemas proporcionó una forma de descomponer la variedad M que fue el punto de partida para atacar la conjetura de Poincaré en dimensión mayor o igual que 5.

Este entusiasmo lleva a Smale a proponer que los sistemas de Morse-Smale son estructuralmente estables (lo cual demostró posteriormente junto a uno de sus alumnos, Jacob Palis [24]) y que podrían formar un conjunto denso en el espacio de sistemas dinámicos [36]. Esta última idea fue cuestionada por varios matemáticos de la época. De hecho, Smale confiesa en una cita posterior [45]:

*If I had been at all familiar with the literature (Poincaré, Birkhoff, Cartwright-Littlewood), I would have seen how crazy this idea was.*⁸

Mas allá de esta ingenuidad, la propuesta es una muestra de la osadía de Smale.

Queda entonces planteada la cuestión de la existencia de un sistema con infinitos puntos periódicos y que esta propiedad se conserve por pequeñas perturbaciones. En las playas de Río de Janeiro, mientras visitaba el IMPA, Smale formuló lo que se conoce como la *herradura de Smale* [52], una transformación f del plano sobre sí mismo que tiene una cantidad infinita de puntos periódicos y tal que cualquier perturbación C^1 -cercana también posee esta propiedad [39]. Esta aplicación transforma un cuadrado R en su imagen $f(R)$ según la figura 1(a). La acción de la aplicación puede entenderse así: primero el cuadrado se contrae en la dirección horizontal y se estira en la dirección vertical de manera afín; luego, se dobla como una herradura y se coloca sobre el cuadrado, como se muestra en la figura. En la región del cuadrado cuya imagen cae dentro del mismo cuadrado, la función es afín, preservando las direcciones horizontales y verticales, pero con la primera contraída y la segunda

⁷Es decir, no hay órbitas que unan dos singularidades de tipo silla.

⁸Si hubiera estado algo familiarizado con la literatura (Poincaré, Birkhoff, Cartwright-Littlewood), yo habría visto lo descabellada que era esta idea.

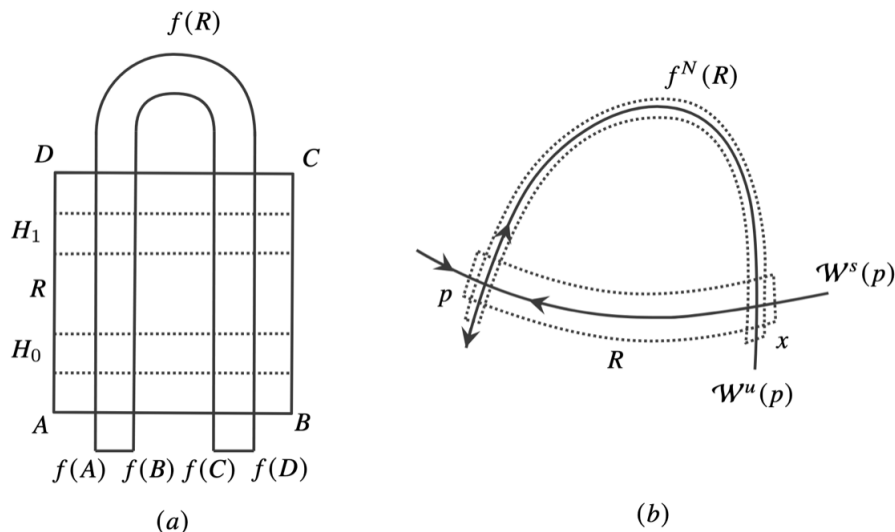


Figura 1: (a) Herradura de Smale. Las franjas punteadas H_0, H_1 se transforman en las franjas verticales dentro del rectángulo R de forma afín. La equivalencia con el *desplazamiento a la izquierda* se realiza por medio del itinerario: a $x \in \cap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(R)$ le corresponde la palabra $\mathbf{a}_x$ donde $\mathbf{a}_x(n) = j$ si $f^n(x) \in H_j, j = 0, 1$. (b) Herradura en la presencia de un punto homoclínico x asociado a un punto fijo p . Existe un «rectángulo» R que se transforma en $f^N(R)$ para algún $N > 0$.

expandida, capturando en esencia lo que después se llamaría *hiperbolicidad*. Este ejemplo tiene la particularidad de que la dinámica de los puntos cuya órbita (futura y pasada) se mantiene dentro del cuadrado R puede ser modelada (es decir, equivalente por conjugación) con el *desplazamiento a la izquierda* en el espacio $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ de las sucesiones biinfinitas de ceros y unos, donde si $a \in \Sigma$ y $a(n)$ denota el n -ésimo término de la sucesión, entonces $\sigma(a)(n) = a(n+1)$. La topología de Σ es la topología producto considerando $\{0, 1\}$ con la topología discreta, lo que hace de este espacio un conjunto de Cantor.

Smale demostró que, cuando un punto fijo hiperbólico tiene un punto homoclínico transversal asociado (es decir, una intersección transversal entre las variedades estable e inestable del punto), se puede encontrar una herradura (ver figura 1(b)). No deja de ser curioso que Poincaré, considerado el fundador de la teoría cualitativa de sistemas dinámicos, al encontrarse con la forma de las variedades estables e inestables de un punto fijo en la presencia de un punto homoclínico manifestara:

*On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer.*⁹

⁹Uno se sorprenderá de la complejidad de esta figura, que ni siquiera intento dibujar.

Hoy, con la ayuda de la herradura de Smale, se comprenden la geometría y topología de estas curvas.

A partir de ese momento, la presencia de una herradura se convirtió en una característica asociada al caos en los sistemas dinámicos. Smale también mostró que la herradura puede verse como una transformación de la esfera $\mathbb{S}^2$ en sí misma con un punto fijo repulsor en el infinito. Este fue el primer ejemplo de un sistema estructuralmente estable con una cantidad infinita de puntos periódicos.

En 1961, Smale dictó una conferencia en el *Symposium on nonlinear oscillations* en la ciudad de Kiev sobre este ejemplo y propuso como problema la estabilidad estructural de otros dos casos: el flujo geodésico en curvatura negativa y los automorfismos hiperbólicos del toro (este último sugerido por René Thom, quien propuso el famoso ejemplo en el toro $\mathbb{T}^2$ conocido como *Arnold's cat map*, generado por la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$). Entre los asistentes a esta conferencia se encontraba Dmitrii Anosov, quien demostró un año después que Smale estaba en lo cierto. Estos sistemas fueron posteriormente conocidos como *sistemas de Anosov*. Esto fue el inicio de la teoría hiperbólica en sistemas dinámicos.

4.1. LA ESCUELA DE BERKELEY

Durante la década de 1960, Smale continuó desarrollando la teoría de sistemas dinámicos en base a la hiperbolicidad y a la estabilidad. En 1960 Smale obtiene un puesto en la Universidad de Berkeley, donde se establece en 1964 después de un paréntesis de un par de años en Columbia, y fue en ese contexto donde la teoría hiperbólica toma cuerpo y forma. Algunos de sus doctorandos, como Nancy Kopell, Michael Shub, John Franks, Jacob Palis, Sheldon Newhouse, Zbigniew Nitecki, Rufus Bowen, John Guckenheimer, y Robert Devaney entre otros, tuvieron una gran influencia en el posterior desarrollo de esta teoría.

En 1967 Smale publicó su artículo fundamental *Differentiable dynamical systems* [41], en el que asentó los conceptos, ejemplos, ideas, objetivos fundamentales y problemas de la teoría. En particular, introdujo el concepto de difeomorfismo *Axioma A*, donde el conjunto no errante¹⁰ es hiperbólico y los puntos periódicos son densos en este. Además, demostró un teorema de estructura de estos difeomorfismos, conocido como *descomposición espectral*.

En julio de 1968 se celebró un gran congreso en la Universidad de Berkeley: *Global Analysis, Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society*. Para tener una idea del impacto en el área de sistemas dinámicos basta ver las contribuciones que aparecen en los *Proceedings* [13]. En particular, en [24] se enuncia un problema fundamental: la *conjetura de estabilidad* (ver también [42]) que afirma que un difeomorfismo es estructuralmente estable si y solamente si es Axioma A y verifica la condición de transversalidad¹¹. Por otra parte, fue el propio Smale quien mostró que su visión original de describir la mayoría de los sistemas por

¹⁰Un punto $x \in M$ es *errante* si existe un entorno U de x tal que $f^n(U) \cap U = \emptyset$ para todo $n \geq 1$. El complemento de estos se llama *conjunto no errante*.

¹¹Las variedades estables e inestables de cualquier par de puntos se intersecan transversalmente.

medio de sistemas estables estaba errada: demostró que hay abiertos en el espacio de sistemas dinámicos donde *ninguno* de ellos es estable [1, 40].

La obra de Smale en sistemas dinámicos tuvo un gran impacto y desarrollo en Latinoamérica, especialmente a través de la escuela de Jacob Palis en el IMPA. El matemático uruguayo Ricardo Mañé, que también trabajaba en el IMPA, demostró en la década de 1980 el recíproco de la conjetura de estabilidad [23] (es decir, que si un sistema es estable, necesariamente debe ser Axioma A), considerado un hito en la teoría de sistemas dinámicos. Además, Palis formula una conjetura en [25] que retoma la idea primigenia de describir la mayoría de los sistemas dinámicos por medio de propiedades dinámicas.

5. LA DIFÍCIL BÚSQUEDA DE EQUILIBRIOS

El proceso de ajuste de precios en una economía de mercado, con factores como la oferta y la demanda de mercancías que cambian con el tiempo en función de las condiciones del mercado es, o puede ser visto como, un ejemplo notable de sistema dinámico. Si a ello sumamos la presencia de Gérard Debreu (quien en 1983 habría de recibir el Nobel de Economía) en Berkeley, no es de extrañar que Smale se interesara por este tema.

Pasar por alto los trabajos de Smale en economía matemática sería una grave omisión en esta reseña. Pero describirlos en detalle está fuera de lugar, tanto por el espacio que se necesitaría para una descripción detallada del tema como por la falta de competencia de los autores para esta tarea. En consecuencia, lo que sigue es una presentación extremadamente simplificada.

Una *economía de intercambio* supone un conjunto de n consumidores y ℓ mercancías, $n, \ell \in \mathbb{N}$. Las tuplas $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ son paquetes de mercancías llamados *planes de consumo*. Un x_k positivo indica una compra y uno negativo indica una venta. Para cada $i = 1, \dots, n$, el i -ésimo consumidor tiene un conjunto P^i de posibles planes de consumo y unas *preferencias* entre ellos. Estas preferencias definen un preorden total $\succeq^i$ en P^i (no se trata de un orden puesto que la propiedad anti-simétrica no se da: un consumidor puede ser indiferente ante dos planes distintos). Los preórdenes $\succeq^i$ definen un preorden $\succeq$, no necesariamente total, en el *conjunto de estados* $\mathcal{P} := P^1 \times \dots \times P^n$ mediante

$$\mathbf{x} \succeq \mathbf{z} \quad \text{sii} \quad \mathbf{x}^i \succeq^i \mathbf{z}^i \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

No todo estado $(\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^n) \in \mathcal{P}$ es *factible*. En un momento determinado, para cada una de las mercancías hay una cantidad específica disponible y la suma $\sum_{i=1}^n x_k^i$ debe igualar la cantidad disponible $e_k \in (0, +\infty)$ de la k -ésima mercancía, para $k = 1, \dots, \ell$. Además, para todo i, k , debemos tener $|x_k^i| \leq e_k$. Si escribimos $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_\ell)$, el conjunto de estados *factibles* es entonces

$$\mathcal{F} := \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{P} \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{x}^i = \mathbf{e} \text{ y } |x_k^i| \leq e_k \text{ para } i = 1, \dots, n \text{ y } k = 1, \dots, \ell \right\}.$$

Un *óptimo de Pareto* es un estado $(x^1, \dots, x^n) \in \mathcal{F}$ que es un máximo en el preorden $\succeq$. En otras palabras, dentro de $\mathcal{F}$, ningún consumidor puede remplazar su plan por uno mejor sin que ello implique que otro consumidor deba remplazar el suyo por uno peor. Esta optimalidad refiere a un aspecto de eficiencia más que a uno de justicia. Un ejemplo sencillo para entender esto es el reparto de una torta entre dos personas. Cualquier par (r_1, r_2) de proporciones es Pareto óptimo si $r_1 + r_2 = 1$ (repartimos el total de la torta). Pero, por ejemplo, los pares $(0, 1)$ y $(1, 0)$ distan mucho de ser justos (es decir, equitativos).

Un *vector de precios* es cualquier $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell$. Diremos que $x^i \in P^i$ está *en equilibrio* respecto a p si no existe $x' \in P^i$ tal que $\langle p, x' \rangle < \langle p, x^i \rangle$ y $x' \succeq^i x^i$. El i -ésimo consumidor no puede encontrar un plan de consumo preferible a x^i sin pagar por él más de lo que le cuesta x^i . Diremos que $x \in \mathcal{P}$ está *en equilibrio* respecto a p cuando cada x^i lo está. Un problema fundamental en economías de intercambio es el siguiente:

Encontrar condiciones bajo las cuales para todo $x \in \mathcal{P}$ con x Pareto óptimo existe un vector de precios p tal que x está en equilibrio respecto a p .

La importancia de esta cuestión deriva de la posibilidad (bajo las condiciones buscadas) de considerar los vectores de precios como mecanismos para alcanzar óptimos de Pareto (y con ellos una optimalidad en términos de eficiencia en la asignación de mercancías).

La existencia de estas condiciones fue intuita por Pareto a inicios del siglo pasado y demostrada por, entre otros, Oskar Lange y Maurice Allais a inicios de la década de 1940 usando herramientas de cálculo diferencial. En los años 50, Kenneth Arrow y Gérard Debreu extendieron el dominio de validez de los resultados de Lange y Allais vía métodos de análisis convexo. Allais, Arrow y Debreu fueron reconocidos por estos trabajos con el Premio Nobel de Economía.

En los años 70 Smale vuelve a introducir herramientas de cálculo diferencial en la teoría del equilibrio, pero ahora se trata de cálculo en variedades¹², un área de las matemáticas que experimenta un fuerte empuje y al que Smale dedica un artículo de divulgación [43]. Entre 1973 y 1981 Smale publica varios artículos dedicados a la teoría del equilibrio en economía. En lo que sigue, describimos con cierto detalle un resultado en un contexto particular.

Bajo ciertas hipótesis, el preorden $\succeq^i$ puede ser representado por una *función de utilidad* $u^i : P^i \rightarrow [0, 1]$ que satisface la propiedad

$$\forall x, x' \quad u^i(x) \geq u^i(x') \iff x \succeq^i x'.$$

Smale asume sistemáticamente que se satisfacen las hipótesis necesarias y utiliza la correspondiente representación.

Supongamos que P^i es el interior de $\mathbb{R}_+^\ell$, el ortante positivo abierto, y que la función de utilidad $u_i : P^i \rightarrow [0, 1]$ es $\mathcal{C}^2$ sin puntos críticos. La *superficie de*

¹²También conocido como análisis global.

indiferencia $\mathcal{S}_i(\mathbf{x}) \subset P^i$ de $\mathbf{x} \in P^i$ para el i -ésimo consumidor es $u_i^{-1}(c)$, donde $c = u_i(\mathbf{x})$. Sea

$$g_i(\mathbf{x}) := \frac{\nabla u_i(\mathbf{x})}{\|\nabla u_i(\mathbf{x})\|}$$

el vector unitario normal a $\mathcal{S}_i(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}$ y supongamos las siguientes hipótesis:

- (I) para todo i y $\mathbf{x} \in P^i$, $g_i(\mathbf{x}) > 0$,
- (II) para todo $\mathbf{x} \in P^i$ la restricción de $D^2 u_i(\mathbf{x})$ al plano tangente a $\mathcal{S}_i(\mathbf{x})$ en $\mathbf{x}$ es definida negativa, y
- (III) las superficies de indiferencia son cerrados de $\mathbb{R}^\ell$.

Bajo estas hipótesis Smale demuestra que, para todo $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$, las tres condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) $\mathbf{x}$ es un óptimo de Pareto local,
- (b) $\mathbf{x}$ es un óptimo de Pareto estricto, y
- (c) $g_i(\mathbf{x}^i)$ es independiente de i .

El valor común $\mathbf{p}$ de los vectores $g_i(\mathbf{x}^i)$ es un vector de precios respecto al cual $\mathbf{x}$ está en equilibrio¹³.

De esta equivalencia, Smale extrae varias consecuencias, entre ellas las siguientes:

- (A) Sea θ el subconjunto de $\mathcal{F}$ de n -tuplas de planes de consumo que satisfacen (a), (b) o (c). Se tiene que θ es una subvariedad $\mathcal{C}^1$ de $\mathcal{F}$ de dimensión $n - 1$.
- (B) Sea

$$\Lambda := \{(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in \mathcal{F} \times \mathbb{S}^{\ell-1} \mid \mathbf{x} \text{ está en equilibrio respecto a } \mathbf{p}\}.$$

La proyección $\Lambda \rightarrow \mathcal{F}$ dada por $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{x}$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$.

El modelo de economía de intercambio se extiende a modelos más complejos donde, por ejemplo, las mercancías son elaboradas por m productores, el j -ésimo de ellos eligiendo en un conjunto Q^j de posibles planes de producción $\mathbf{y}^j = (y_1^j, \dots, y_\ell^j)$ donde $y_k^j < 0$ indica la necesidad de comprar $-y_k^j$ de la k -ésima mercancía (por ejemplo, para producir una cantidad positiva de otra mercancía). Los productores no tienen preferencias; su único objetivo es maximizar beneficios. Otra extensión posible es la de una economía de propiedad privada donde cada productor es una empresa y los consumidores poseen esas empresas. Si α_j^i denota la proporción de la j -ésima empresa en manos del i -ésimo consumidor, se tiene $\sum_{i=1}^n \alpha_j^i = 1$ para todo $j \leq m$. Otras extensiones posibles relajan algunas de las condiciones que hemos considerado.

Los resultados de Smale son válidos en muchas de estas extensiones. Además, Smale provee condiciones bajo las cuales existen equilibrios así como condiciones bajo las cuales estos equilibrios son genéricamente (fuera de un subconjunto de medida cero) localmente únicos. El artículo [15], al cual nuestra exposición debe mucho, describe con más detalle estos resultados.

¹³Restringir los vectores de precios a puntos en $\mathbb{S}^{\ell-1}$ tiene sentido económico ya que los planes de consumo escalan bien con los precios.

6. CÁLCULO DE ÓPTIMOS Y DE CEROS

Los trabajos en teoría del equilibrio general llevan a Smale a considerar, de manera natural, el cálculo efectivo de soluciones a problemas de optimización —por ejemplo, la optimización simultánea de varias funciones [44]— y de resolución de ecuaciones algebraicas [19, 46]. Y es justamente en el contexto de optimización donde se dan los primeros trabajos de Smale en complejidad.

El algoritmo del *simplex* creado por George Dantzig a finales de los 40 calcula optimizadores para problemas de programación lineal. Recordemos que, en su forma estándar, este consiste en, dada la terna $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, resolver

$$\begin{aligned} &\text{mín } c \cdot x \\ &\text{t.q. } Ax = b \\ &\quad x \geq 0. \end{aligned}$$

En la práctica, el *simplex* es muy eficiente. Sin embargo, en 1972, Klee y Minty [20] demuestran que, para algunas entradas, el número de iteraciones realizadas por el algoritmo es exponencial en la dimensión n de la entrada. En 1979, L. G. Khachian, en la Unión Soviética, diseña un algoritmo (el método del elipsoide) que resuelve problemas de programación lineal en tiempo polinomial en n y m . El *New York Times*, en la portada de su edición del 7 de noviembre de 1979 se hace eco de la preocupación que esto despierta en varias agencias de defensa estadounidenses.

Las ejecuciones del *simplex* y del método del elipsoide en problemas reales indican, sin embargo, que el *simplex* es más rápido. Este desajuste entre teoría y práctica en un problema tan fundamental despierta el interés de Smale. En 1983 Smale considera el número de iteraciones para una terna (A, b, c) aleatoria (esencialmente, tomada de una gaussiana estándar) y demuestra que, para m constante, la esperanza del número de iteraciones es lineal en n [47]. Este resultado proporciona una explicación teórica de la eficiencia del *simplex* en la práctica.

7. TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN (PARA CÁLCULOS CONTINUOS)

La década de los 70 es escenario del impresionante desarrollo de la informática teórica. El diseño y análisis de algoritmos es omnipresente en lo que son los primeros departamentos de informática. Una característica de estos algoritmos es que, casi invariablemente, tratan con problemas discretos, cuyas entradas, salidas y datos intermedios se pueden codificar como secuencias finitas de ceros y unos. Esto es debido a que en aquel momento los problemas de este tipo estaban directamente relacionados con el diseño de aplicaciones (compiladores, editores...) que debían hacer del computador una herramienta de «uso general» y estas aplicaciones tenían (y todavía tienen) un carácter discreto por naturaleza: el computador digital no hace otra cosa que manipular ceros y unos. Ejemplos de problemas y algoritmos que centraron la investigación son la ordenación de datos (con algoritmos como *quicksort*, *merge sort*, *bubble sort*, *heap sort*, entre muchos otros), el diseño de estructuras de datos, y varios tipos de búsquedas en esas estructuras.

Independientemente de este desarrollo, existe una tradición de algoritmos «continuos» que suponen (puede que implícitamente) que el algoritmo manipula (mediante operaciones aritméticas y comparaciones) números reales. Ejemplos notables son la eliminación gaussiana para resolver sistemas de ecuaciones lineales, el método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias, o el método de Newton para calcular ceros de funciones. Pero estos algoritmos son usuarios del computador, no arquitectos del mismo. Y para ellos los argumentos relativos a la complejidad son *ad hoc*, no se desarrolla una teoría de complejidad.

A comienzos de los años 80 Smale comienza a publicar una serie de artículos [46, 48, 49, 50] que exploran diversos aspectos teóricos de la computación continua. La década culmina con un artículo [10] en el que Smale, junto a Lenore Blum y Michael Shub, desarrollan una teoría de complejidad para este tipo de algoritmos. Esta teoría es natural. El costo $\text{cost}_{\mathcal{A}}(x)$ de un algoritmo $\mathcal{A}$ para una entrada específica $x \in \mathbb{R}^n$ es el número de operaciones aritméticas y comparaciones realizadas por el algoritmo con entrada x , y la complejidad (caso peor) del algoritmo es la función

$$n \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{cost}_{\mathcal{A}}(x).$$

Sobre esta base se definen fácilmente las clases $P_{\mathbb{R}}$, $NP_{\mathbb{R}}$ y $EXP_{\mathbb{R}}$ de los problemas (decisionales, con respuesta SI o NO) resolubles en tiempo polinomial, no determinista polinomial, y exponencial, respectivamente y se demuestra la existencia de problemas naturales $NP_{\mathbb{R}}$ -completos¹⁴. De hecho, el problema de decidir si un sistema de igualdades y desigualdades polinomiales tiene una solución es $NP_{\mathbb{R}}$ -completo, como lo son los problemas (aparentemente) más sencillos de decidir si existe una solución para un sistema de ecuaciones cuadráticas o para una ecuación de grado 4. Estas «clases de complejidad» satisfacen las inclusiones

$$P_{\mathbb{R}} \subseteq NP_{\mathbb{R}} \subseteq EXP_{\mathbb{R}}$$

análogas a las que soportan la teoría de complejidad discreta [17], $P \subseteq NP \subseteq EXP$. La segunda inclusión sin embargo, a diferencia de la situación en el caso discreto, re-

¹⁴La idea de problema resoluble en tiempo no determinista polinomial es, a grandes rasgos, la de problema cuya respuesta positiva admite una demostración corta. Por ejemplo, la pregunta ¿es 61 117 643 un número compuesto? admite una tal demostración: simplemente, multiplicar 7759 por 7877. Se puede realizar a mano en unos pocos minutos. Pero ello no significa que la respuesta a la pregunta se pueda calcular igual de rápido. Sin conocer los dos factores 7759 y 7877 (que son ambos primos) uno puede estar mucho tiempo antes de encontrar la factorización. *Que una demostración sea corta no implica que sea fácil encontrarla.* Tiempo polinomial quiere decir que se puede encontrar la demostración rápidamente. Tiempo no determinista polinomial, que la demostración es corta, pero que puede necesitar datos que, a priori, no tenemos. La clases NP (cálculos discretos) y $NP_{\mathbb{R}}$ (cálculos continuos) admiten una relación de preorden parcial $\preceq$ que describe que un problema S sea «no más difícil» que un problema U (se dice que S reduce a U). Los elementos maximales para $\preceq$ son los problemas NP-completos ($NP_{\mathbb{R}}$ -completos en el caso continuo).

La pregunta $P \stackrel{?}{=} NP$ es entonces equivalente a la existencia, o no, de un problema NP-completo en P (similarmente para $NP_{\mathbb{R}}$ y $P_{\mathbb{R}}$). Su origen parece remontarse a una carta de Gödel a Von Neumann [18]. Una observación final: para el problema de decidir si un número es compuesto se ha demostrado recientemente [2] su pertenencia a P . Su uso para ilustrar la clase NP se debe a su sencillez.

quiere una demostración sofisticada [28] y, también en contraste con el caso discreto, puede demostrarse que es estricta [14].

La pregunta $P_{\mathbb{R}} \stackrel{?}{=} NP_{\mathbb{R}}$, que a la luz de los resultados en [10] se traduce como «¿Es posible decidir la existencia de soluciones para sistemas de ecuaciones e inecuaciones polinomiales en tiempo polinomial en el tamaño del sistema?», sigue abierta. Eso no debería causar sorpresa. Se trata de un problema que no parece ser más fácil que su versión discreta y esta última es notoria por su dificultad tanto como por su relevancia. Prueba de ello es su inclusión en la lista de los problemas del milenio¹⁵.

8. DE «PROBLEM SOLVER» A «PROBLEM POSER»

Con el tercer milenio remplazado por el vigésimo primer siglo, el año 2000 vio a la imprenta de la American Mathematical Society publicar un libro [3] sobre las perspectivas de las matemáticas en el siglo que nacía. El libro, comisionado por la *International Mathematical Union* (cuyo presidente en esos momentos era Jacob Palis, a quien nos hemos referido en la sección 4), incluía artículos de matemáticos notables y comienza el prólogo enunciando que está

*inspired by the famous list of problems that Hilbert proposed 100 years ago, but it has the more general purpose of describing the state of mathematics at the end of the 20th century.*¹⁶

Tres de los veintinueve artículos son listas de problemas abiertos. Sus autores son tres medallistas Fields, Vaughan Jones (véase [4]), Steve Smale y Shing-Tung Yau (véase [16]). Con este artículo, Smale evoluciona de resolver problemas (la conjetura de Poincaré en dimensión mayor o igual que 5) a proponerlos, desarrollando entre ambos estadios una actividad intensa como constructor de teorías.

El artículo de Smale aparece primero en el *Mathematical Intelligencer* [53] y es reimpresso (y ligeramente expandido) en [3]. De los 18 problemas propuestos por Smale, los tres primeros —la hipótesis de Riemann, la conjetura de Poincaré (en dimensión 3), y el problema $P \stackrel{?}{=} NP$ — son, en su opinión, los más importantes. El hecho de que 7 de los 18 problemas (3, 4, 5, 7, 9, 17 y 18) incluyan un aspecto computacional y que uno de los tres más importantes sea el problema central en informática teórica nos muestra hasta qué punto Smale ha integrado los fundamentos de la computación en el panorama matemático. Smale describe el problema $P \stackrel{?}{=} NP$ como «a gift to mathematics from computer science» y explica el porqué de esa imagen a partir de la conjetura de Poincaré:

A reason that Poincaré's conjecture is fundamental in the history of mathematics is that it helped give focus to a manifold as an object of study. In this way, Poincaré influenced much of 20th-century mathematics with its attention to geometric objects, including eventually algebraic varieties, Riemannian manifolds, etc.

¹⁵<https://www.claymath.org/millennium-problems/>

¹⁶Inspirado en la famosa lista de problemas que Hilbert propuso hace 100 años, pero tiene el propósito más general de describir el estado de las matemáticas a finales del siglo xx.

I hold the conviction that there is a comparable phenomenon today in the notion of a «polynomial-time algorithm». Algorithms are becoming worthy of analysis in their own right, not merely as a means to solve other problems.¹⁷

De los 18 problemas de la lista, vale la pena detenerse en el 17, por lo menos, porque es el que ha encontrado un mayor encaje en las matemáticas españolas. Para entender el contexto, recordemos que el problema de decidir si un sistema de ecuaciones polinomiales con coeficientes reales tiene un cero real es $\text{NP}_{\mathbb{R}}$ -completo. Lo mismo sucede sobre $\mathbb{C}$. Se demuestra en [10] que el problema de decidir si un sistema de ecuaciones polinomiales con coeficientes complejos tiene un cero complejo es $\text{NP}_{\mathbb{C}}$ -completo. Y la pregunta $\text{P}_{\mathbb{C}} \stackrel{?}{=} \text{NP}_{\mathbb{C}}$, aunque previsiblemente más sencilla que su versión real, está igualmente abierta.

A diferencia del caso real, sobre $\mathbb{C}$ existe una situación altamente relevante en la que la existencia de ceros es conocida. Sean $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{C}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ homogéneos de grado $d_1, d_2, \dots, d_n$, respectivamente. Una vez fijados $n, d_1, \dots, d_n$, las tuplas $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ forman un espacio vectorial $\mathcal{H}$ sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $N := \sum_{i=1}^n \binom{n+d_i}{d_i}$. Genéricamente, es decir, fuera de un subconjunto algebraico de dimensión menor que N , los sistemas $\mathbf{f} = 0$ para $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ tienen un conjunto finito de soluciones en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{P}^n$ de dimensión n . De hecho, contadas con su multiplicidad, el teorema de Bézout asegura que estos sistemas tienen exactamente $\mathcal{D} := \prod_{i=1}^n d_i$ soluciones. En el caso particular de un sistema de cuádricas ($d_1 = d_2 = \dots = d_n = 2$) el tamaño N del sistema (nótese que este es el número de coeficientes que se debe proporcionar como entrada al algoritmo para especificar el sistema $\mathbf{f}$) es del orden de n^3 , mientras que $\mathcal{D} = 2^n$. Calcular todos los ceros del sistema tendrá, por fuerza, un costo exponencial en el tamaño de la entrada. Lo que nos lleva a la pregunta: ¿es posible calcular de manera eficiente *un* cero del sistema?

Traducir esta pregunta a términos precisos no es difícil pero requiere hacer elecciones entre varias posibilidades. Comencemos por «calcular un cero». Sabemos desde Galois que no es posible, en general, expresar ceros de polinomios en términos de los coeficientes usando operaciones aritméticas y toma de raíces. Cualquier algoritmo deberá retornar algún tipo de aproximación de ese cero. Smale propone una idea, muy original, para evitar que la definición de aproximación dependa de un ε . Un *cero aproximado* (à la Smale) de $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ es un punto z para el que existe ζ , el *cero asociado*, con $\mathbf{f}(\zeta) = 0$ y tal que la sucesión de iteraciones de Newton $z_k := N_{\mathbf{f}}^k(z)$, $k = 1, 2, \dots$, converge cuadráticamente a ζ , es decir

$$\text{dist}_{\mathbb{P}}(z_k, \zeta) \leq 2^{1-2^k} \text{dist}_{\mathbb{P}}(z, \zeta).$$

¹⁷Una razón por la que la conjetura de Poincaré es fundamental en la historia de las matemáticas es que ayudó a considerar la noción de variedad como objeto de estudio. De esta manera, Poincaré influyó en gran parte de las matemáticas del siglo XX con su atención a los objetos geométricos, incluyendo con el tiempo las variedades algebraicas, las variedades riemannianas, etc. Estoy convencido de que hoy en día existe un fenómeno comparable en la noción de un «algoritmo de tiempo polinomial». Los algoritmos se están volviendo dignos de análisis por sí mismos, no solo como un medio para resolver otros problemas.

Aquí $\text{dist}_{\mathbb{P}}$ es la distancia en $\mathbb{P}^n$. El segundo concepto a esclarecer es el de «cálculo eficiente». En esto Smale adopta la idea clásica de complejidad media (que ya había seguido en su trabajo sobre programación lineal). Para ello, dota al espacio lineal $\mathcal{H}$ de la medida de probabilidad de Weyl (esencialmente, una gaussiana estándar sobre la base de $\mathcal{H}$ formada por monomios ponderados con una elección particular de los pesos que hace que el producto hermítico asociado sea invariante bajo transformaciones unitarias de $\mathbb{C}^{n+1}$) y define «eficiente» como polinomial en promedio. El problema 17, entonces, puede enunciarse de la siguiente manera:

¿Existe algún algoritmo que con entrada $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ retorne un cero aproximado de $\mathbf{f}$ (o caiga en bucle indefinidamente) con costo promedio $N^{\mathcal{O}(1)}$ cuando $\mathbf{f}$ es tomado al azar en $\mathcal{H}$ con la medida de Weyl?

La medida de costo es la implícita en el modelo Blum-Shub-Smale de computación: número de operaciones aritméticas y comparaciones realizadas. El hecho de que el algoritmo pueda caer en bucle indefinidamente en algunas entradas arroja costo infinito para esas entradas, pero eso no es incompatible con una esperanza finita del costo; hará falta, eso sí, que ese costo infinito solo se dé en un subconjunto de $\mathcal{H}$ de medida cero.

El cálculo de ceros de funciones había ocupado a Smale intermitentemente desde, al menos, 1979 [19]. Pero es en la década de los 90 cuando, junto a Mike Shub, desarrolla el contexto del problema 17, en una serie de cinco artículos [30, 31, 32, 34, 33] conocidos como «la serie de Bézout», sin duda la contribución más importante de Smale en la década de los 90. Shub y Smale estudian en profundidad varios aspectos del problema relacionados con una idea algorítmica específica: los algoritmos de continuación homotópica. La idea es elegante.

Para calcular un cero de $\mathbf{f} \in \mathcal{H}$ se comienza con un sistema $\mathbf{g} \in \mathcal{H}$ y un cero ζ_0 de $\mathbf{g}$. Genéricamente, el segmento $\{\mathbf{f}_t := t\mathbf{f} + (1-t)\mathbf{g}\}_{t \in [0,1]}$ con $\mathbf{f}_0 := \mathbf{g}$ y $\mathbf{f}_1 := \mathbf{f}$ induce una única curva $\mathcal{C} := \{(\mathbf{f}_t, \zeta_t) \mid \mathbf{f}_t(\zeta_t) = 0\}_{t \in [0,1]}$ en $\mathcal{H} \times \mathbb{P}^n$. Luego se procede eligiendo una sucesión de reales $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ que induce una sucesión de tuplas $\mathbf{q}_i \in \mathcal{H}$, $\mathbf{q}_i := \mathbf{f}_{t_i}$, y otra de puntos en $\mathbb{P}^n$ mediante

$$z_0 := \zeta_0, \quad z_{i+1} := N_{\mathbf{q}_{i+1}}(z_i), \quad i = 0, \dots, k-1.$$

El punto z_0 es un cero aproximado (de hecho un cero auténtico) de $\mathbf{q}_0 = \mathbf{g}$ por hipótesis. Y una adecuada elección de los t_i asegura que z_i es un cero aproximado de $\mathbf{q}_i$ para $i = 1, \dots, k$. En particular, z_k es un cero aproximado de $\mathbf{q}_k = \mathbf{f}$. La figura 2 idealiza un paso de la homotopía.

Cada iteración tiene un costo $\mathcal{O}(N)$. El problema radica en demostrar que la esperanza del número k de iteraciones (que depende de la terna $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \zeta)$) está acotada por $N^{\mathcal{O}(1)}$.

Es difícil transmitir la magnitud de los resultados obtenidos en la serie de Bézout. Baste decir que el mayor obstáculo para demostrar que $\mathbb{E}_{\mathbf{f}} k = N^{\mathcal{O}(1)}$ resultó ser la elección del par inicial $(\mathbf{g}, \zeta)$. Es muy fácil producir un par $(\mathbf{g}, \zeta)$ con $\mathbf{g}(\zeta) = 0$ pero es difícil en la misma medida producir uno que resulte en $\mathbb{E}_{\mathbf{f}} k = N^{\mathcal{O}(1)}$. Llegado a este punto, Smale abandona el problema y lo incluye en su lista.

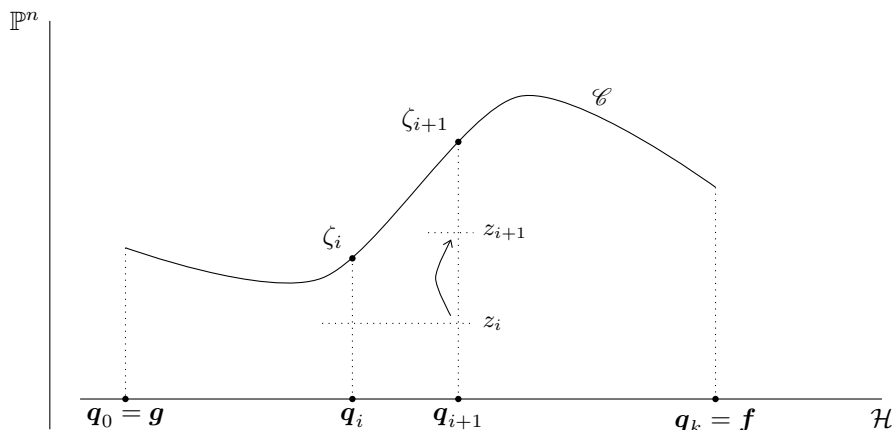


Figura 2: Cálculo del par (q_{i+1}, z_{i+1}) .

Habrá de pasar más de una década para ver algún avance significativo en el problema 17. Este avance llega con los trabajos de Carlos Beltrán y Luis Miguel Pardo [7, 8, 9] e introduce una idea singular: tirar al azar el par (g, ζ) . Para ello suponen que el algoritmo puede producir números aleatorios. Más concretamente, números reales extraídos de una normal estándar. Y con esa capacidad adicional (muy usada en la práctica) diseñan una rutina que produce un par (g, ζ) extraído de la siguiente distribución de probabilidades:

- g sigue la medida de Weyl (descrita más arriba),
- ζ es uniforme entre los $\mathcal{D}$ ceros de g (que tiene $\mathcal{D}$ ceros con probabilidad 1).

Una vez en posesión del par (g, ζ) , se aplica la continuación homot pica y se demuestra que $\mathbb{E}_{(f, g, \zeta)} k = \mathcal{O}(D^{3/2}nN)$, donde $D := \max_{i \leq n} d_i$. Esto resulta en un costo promedio total de $\mathcal{O}(D^{3/2}nN^2)$, que es ciertamente $N^{\mathcal{O}(1)}$, pero no constituye una solución al problema 17 porque el algoritmo es probabilista, no determinista.

En un avance posterior [11] se demuestra la existencia de un algoritmo determinista (el par (g, ζ) no se extrae al azar) que para todo $\varepsilon \in (0, 1)$ tiene costo promedio $N^{\mathcal{O}(1)}$ siempre que $D \notin (n^{1-\varepsilon}, n^{1+\varepsilon})$ y que, en caso contrario, tiene costo promedio $N^{\mathcal{O}(\log \log n)}$.

Finalmente, Pierre Lairez [21] utiliza (de manera muy creativa) la aleatoriedad de f para extraer a partir de f el par (g, ζ) . Esencialmente, trunca los f_i para obtener $f_i = \tilde{f}_i + e_i$ con $\tilde{f}_i \approx f_i$ y $e_i \approx 0$. Los *residuos* e_i se usan para producir (g, ζ) usando la rutina de Beltrán-Pardo. Y la aproximación $\tilde{f}$ reemplaza a f como objetivo de la continuación homot pica. En principio, uno espera que un cero aproximado de $\tilde{f}$ lo será también de f , pero ello no es necesariamente cierto. En caso de que el intento falle, el algoritmo repite el proceso con una aproximación $\tilde{f}$ más precisa. Lairez demuestra que el costo promedio, ahora solo en f , es $N^{\mathcal{O}(1)}$ y resuelve finalmente el problema 17.

Los problemas 2 (conjetura de Poincaré) y 14 (decidir si las propiedades del atractor de Lorenz son las de un atractor extraño) también han sido resueltos, ambos con respuesta positiva. Otros (el 6, 8, 10, 11 y 12) exhiben progresos parciales.

9. FoCM

La influencia de Smale en las matemáticas contemporáneas no se confina a la resolución de problemas existentes y al planteamiento de otros nuevos, en ambos casos con el acompañamiento de un repertorio de ideas originales. Esa influencia incluye también la creación de espacios que promueven el intercambio de ideas. El ejemplo más claro es la sociedad *Foundations of Computational Mathematics* (FoCM).

En 1995, Smale organiza un congreso de cuatro semanas de duración en Park City, Utah, alrededor de los aspectos fundamentales del solapamiento entre matemáticas y computación. El formato del congreso incluyó charlas plenarias por las mañanas y lo que Smale describió como un «mercado» de charlas por las tardes, agrupadas en diferentes *workshops* temáticos de una semana de duración. En total, se organizaron doce *workshops*. Las charlas plenarias cubrían todos los temas de los *workshops*. Para hacerse una idea de los temas tratados, las cerca de mil páginas de las actas del congreso [29] pueden ser útiles.

Mucho antes del fin del congreso, el éxito del mismo es evidente y la decisión de continuarlo periódicamente sucede naturalmente. Para ello, se crea una sociedad (FoCM) que continúa organizando los congresos con el mismo formato y un número creciente de *workshops*. A Park City siguen Río de Janeiro (1997), Oxford (1999), Minneapolis (2002), Santander (2005), Hong Kong (2008), Budapest (2011), Montevideo (2014), Barcelona (2017) y París (2023)¹⁸. La sociedad, además, publica en la actualidad una revista sobre los fundamentos de la matemática computacional (posiblemente la revista más influyente sobre la relación entre matemáticas y computación) y otorga un premio cada tres años para «reconocer el trabajo de matemáticos jóvenes en las áreas de interés de la sociedad». Naturalmente, el premio lleva el nombre de Stephen Smale.

La entrada de Wikipedia sobre FoCM¹⁹ o la página web de la sociedad²⁰ contienen información adicional sobre sus objetivos, ámbito, órganos de gobierno e historia.

10. OBSERVACIONES FINALES

Desvarío laborioso y empobrecedor el de componer vastos libros; el de explayar en quinientas páginas una idea cuya perfecta exposición oral cabe en pocos minutos. Mejor procedimiento es simular que esos libros ya existen y ofrecer un resumen, un comentario.

J. L. Borges, *Ficciones*

¹⁸En 2020 debía haberse realizado en Vancouver pero se cancela debido a la pandemia.

¹⁹https://en.wikipedia.org/wiki/Foundations_of_Computational_Mathematics

²⁰<https://focm-society.org/>

En lo que antecede, hemos intentado ofrecer una imagen de las contribuciones de Smale en varios dominios de las matemáticas, así como de algunos aspectos de su vida ajenos a las matemáticas (como, por ejemplo, sus declaraciones de carácter político). Pero, por fuerza, hemos habido de omitir otros aspectos que no son menos interesantes. Por ejemplo, el hecho de que, junto a Clara, haya construido una impresionante colección de minerales (posiblemente la mayor en el mundo en lo que se refiere a minerales chinos) o su capacidad para timonear veleros (que lo llevó a comprar un velero de 43 pies y navegar con él de Berkeley a las islas Marquesas en 1987, acompañado de Charles Pugh y Welington de Melo, dos matemáticos cuya actividad en sistemas dinámicos era cercana a los intereses de Smale).

Por fortuna, a diferencia de la situación descrita por Borges en el prólogo a sus *Ficciones*, no necesitamos simular que una biografía de Smale ya ha sido escrita y ofrecer un resumen de la misma. En el año 2000 Steve Batterson publicó esa biografía [5]. En aquel entonces Smale tenía 70 años y uno podría pensar que se trataba del buen momento para escribirla. Casi un cuarto de siglo después, Kate Springer añadió varios capítulos a esa biografía [6], constatando que la primera versión había sido prematura. Posiblemente, la mejor manera de cerrar estas páginas sea animando al lector a leer esta obra.

AGRADECIMIENTOS. Estamos en deuda con el anónimo corrector de LA GACETA cuyas sugerencias han mejorado de manera palpable la escritura de este artículo.

REFERENCIAS

- [1] R. ABRAHAM Y S. SMALE, Nongenericity of Ω -stability, *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, 5–8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.
- [2] M. AGRAWAL, N. KAYAL, Y N. SAXENA, PRIMES is in P, *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), 781–793.
- [3] V. ARNOLD, M. ATIYAH, P. LAX Y B. MAZUR, EDS., *Mathematics: frontiers and perspectives*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [4] E. ARTAL BARTOLO Y M. T. LOZANO IMÍZCOZ, Sir Vaughan Frederick Randal Jones, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **14** (2011) (3), 579–591.
- [5] S. BATTERSON, *Stephen Smale: the mathematician who broke the dimension barrier*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [6] S. BATTERSON Y K. SPRINGER, *Stephen Smale: reaching higher dimensions*, City University of Hong Kong Press, 2024. (Este libro es una extensión de [5] con material que cubre el período 2000-2024.)
- [7] C. BELTRÁN Y L. M. PARDO, On Smale’s 17th problem: a probabilistic positive solution, *Found. Comput. Math.* **8** (2008), 1–43.
- [8] C. BELTRÁN Y L. M. PARDO, Smale’s 17th problem: average polynomial time to compute affine and projective solutions, *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2) (2009), 363–385.

- [9] C. BELTRÁN Y L. M. PARDO, Fast linear homotopy to find approximate zeros of polynomial systems, *Found. Comput. Math.* **11** (1) (2011), 95–129.
- [10] L. BLUM, M. SHUB Y S. SMALE, On a theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness, recursive functions and universal machines, *Bull. Amer. Math. Soc.* **21** (1989), 1–46.
- [11] P. BÜRGISSER Y F. CUCKER, On a problem posed by Steve Smale, *Ann. of Math.* **174** (2011), 1785–1836.
- [12] N. CASTELLANA, La obra de Daniel G. Quillen, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **11** (2008) (3), 573–588.
- [13] S.-S. CHERN Y S. SMALE, EDS., *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. of the American Mathematical Society, U. of California, Berkeley, California, July 1-26, (1968)* **14**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.
- [14] F. CUCKER, $P_{\mathbb{R}} \neq NC_{\mathbb{R}}$, *J. Complexity* **8** (1992), 230–238.
- [15] G. DEBREU, Stephen Smale and the economic theory of general equilibrium, *The Collected Papers of Stephen Smale, (F. Cucker and R. Wong, eds.)*, vol. I, 243–258, Singapore University Press and World Scientific, 2000.
- [16] A. ENCISO, Shing-Tung Yau, un motor del Análisis Geométrico, *Gac. R. Soc. Mat. Esp.* **17** (2014) (1), 175–187.
- [17] M. GAREY Y D. S. JOHNSON, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Ser. Books Math. Sci., W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1979.
- [18] J. HARTMANIS, Gödel, von Neumann, and the P=NP problem, *Bull. EATCS* **38** (1989), 101–107.
- [19] M. W. HIRSCH Y S. SMALE, On algorithms for solving $f(x) = 0$, *Comm. Pure Appl. Math* **32** (1979), 281–312.
- [20] V. KLEE Y G. J. MINTY, How good is the simplex method, *Inequalities III, (O. Shisha ed.)*, 159–175, Academic Press, New York, 1972.
- [21] P. LAIREZ, A deterministic algorithm to compute approximate roots of polynomial systems in polynomial average time, *Found. Comput. Math* **17** (5) (2017), 1265–1292.
- [22] M. T. LOZANO IMÍZCOZ, William Thurston, medalla Fields, *Gac. R. Mat. Soc. Esp.* **3** (2000) (3), 549–555.
- [23] R. MAÑÉ, A proof of the C^1 stability conjecture, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **66** (1987), 161–210.
- [24] J. PALIS Y S. SMALE, Structural stability theorems, *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, 223–231, American Mathematical Society, Providence, RI, 1970.
- [25] J. PALIS Y F. TAKENS, *Hyperbolicity and sensitive chaotic dynamics at homoclinic bifurcations: Fractal dimensions and infinitely many attractors*, *Cambridge Stud. Adv. Math.* **35**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [26] M. PEIXOTO, On structural stability, *Ann. of Math. (2)* **69** (1959), 199–222.
- [27] M. PEIXOTO, Structural stability on two-dimensional manifolds, *Bol. Soc. Mat. Mexicana (2)* **5** (1960), 188–189.

- [28] J. RENEGAR, On the computational complexity and geometry of the first-order theory of the reals I. Introduction. Preliminaries. The geometry of semi-algebraic sets. The decision problem for the existential theory of the reals, *J. Symbolic Comput.* **13** (1992), 255–299.
- [29] J. RENEGAR, *The Mathematics of Numerical Analysis*, Lectures in Applied Mathematics (M. Shub, y S. Smale, eds.) **32**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [30] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout's theorem I. Geometric aspects, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 459–501.
- [31] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout's theorem II. Volumes and probabilities, *Progr. Math.* **109**, 267–285, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [32] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout's theorem III. Condition number and packing, *J. Complexity* **9** (1993) (1), 4–14.
- [33] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout's theorem V. Polynomial time, *Theoret. Comput. Sci.* **133** (1994), 141–164.
- [34] M. SHUB Y S. SMALE, Complexity of Bézout's theorem IV. Probability of success; extensions, *SIAM J. Numer. Anal.* **33** (1996), 128–148.
- [35] S. SMALE, A classification of immersions of the two-sphere, *Trans. Amer. Math. Soc.* **90** (1958), 281–290.
- [36] S. SMALE, Morse inequalities for a dynamical system, *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 43–49.
- [37] S. SMALE, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), 391–406.
- [38] S. SMALE, On gradient dynamical systems, *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), 199–206.
- [39] S. SMALE, Diffeomorphisms with many periodic points, *Differ. and Combinat. Topology, Sympos. Marston Morse*, 63–80, Princeton, NJ, 1965.
- [40] S. SMALE, Structurally stable systems are not dense, *Amer. J. Math.* **88** (1966), 491–496.
- [41] S. SMALE, Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 747–817.
- [42] S. SMALE, Global stability questions in dynamical systems, *Lecture Notes in Math* **103**, 150–158, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.
- [43] S. SMALE, What is global analysis? *Amer. Math. Monthly* **76** (1969), 4–9.
- [44] S. SMALE, Optimizing several functions, *Manifolds (Proc. Internat. Conf., Tokyo, 1973)*, 69–75, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1975.
- [45] S. SMALE, On how I got started in dynamical systems, 1959–1962, *The mathematics of time*, 147–151, Springer-Verlag, New York Inc., 1980.
- [46] S. SMALE, The fundamental theorem of algebra and complexity theory, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **4** (1981), 1–36.
- [47] S. SMALE, On the average number of steps of the simplex method of linear programming, *Math. Programming* **27** (1983), 241–262.

- [48] S. SMALE, On the efficiency of algorithms of analysis, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **13** (1985), 87–121.
- [49] S. SMALE, Algorithms for solving equations, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 172–195, American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.
- [50] S. SMALE, On the topology of algorithms I, *J. Complexity* **3** (1987), 81–89.
- [51] S. SMALE, The story of the higher-dimensional Poincaré conjecture (what actually happened on the beaches of Rio), *Math. Intelligencer* **12** (1990) (2), 44–51.
- [52] S. SMALE, Finding a horseshoe on the beaches of Rio, *Math. Intelligencer* **20** (1998), 39–44.
- [53] S. SMALE, Mathematical problems for the next century, *Math. Intelligencer* **20** (1998), 7–15.

FELIPE CUCKER, DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CITY UNIVERSITY OF HONG KONG

Correo electrónico: macucker@cityu.edu.hk

Página web: <https://www.cityu.edu.hk/ma/about-us/professors/Prof.FelipeCUCKER>

MARTÍN SAMBARINO, CENTRO DE MATEMÁTICAS, FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, URUGUAY

Correo electrónico: samba@cmat.edu.uy

Página web: <https://www.cmat.edu.uy/docentes/sambarino-martin>