# La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

**María Gaspar**

## XXXVI Olimpiada Matemática Española

La sede de la Olimpiada ha sido, en el año 2000, la Universidad de las Islas Baleares. Se celebró entre el miércoles 29 de marzo y el domingo 2 de abril, con un día más de duración de lo habitual. Debemos agradecérselo a Miguel Amengual, responsable de la organización local, que supo coseguir para su financiación la colaboración del Gobierno y la Universidad de las Islas Baleares y la de los Ayuntamientos de Palma y de Valldemossa, además de la habitual del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Y, a pesar de la insularidad, los 108 alumnos seleccionados en los Distritos acudieron, junto con 38 profesores acompañantes, a la cita anual. Este año, únicamente nueve alumnos de cursos anteriores al preuniversitario (cuatro de 3ºde BUP y cinco de 1ºde Bachillerato) llegaron a la fase Nacional de la Olimpiada.

Todos los participantes visitaron, el jueves por la mañana, el Castillo de Bellver, donde asistieron a la recepción ofrecida por el Ayuntamiento de Palma. En esa misma mañana y en la Escuela de Hostelería y Turismo, tuvo lugar el acto institucional de inauguración de la Olimpiada, que contó con la presencia del Presidente del Gobierno de las Islas Baleares y del Rector de la Universidad. Tras una exquisita comida, preparada y servida por los alumnos de la Escuela, comenzó la primera sesión de problemas, mientras que la segunda se llevó a cabo al día siguiente por la mañana. El Ayuntamiento de Valldemossa ofreció la comida del viernes, ocasión que pudo aprovecharse para visitar la Cartuja. Por la tarde, de nuevo en la Universidad, tuvo lugar el Acto de entrega de Premios correspondientes a la Fase de Distrito, dotados con 50.000 pesetas, 35.000 pesetas y 25.000 pesetas para los primeros, segundos y terceros clasificados respectivamente.

Y, mientras los miembros del Tribunal calificador terminaban su trabajo, los alumnos visitaron, en la mañana del sábado, el Acuario de Marineland, para acudir a continuación al Pueblo Español, donde tendría lugar la comida de clausura. Allí mismo se realizó la proclamación de ganadores y entrega de los premios de esta fase nacional de la Olimpiada.

Estos son los problemas propuestos:

**Primera sesión**
**jueves, 30 de marzo de 2000**

**Problema 1**
Sean los polinomios

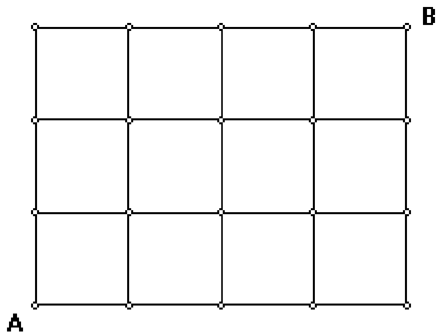
$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1;$$
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales $a, b$ y $c$ $(a \neq c)$, para que $P(x)$ y $Q(x)$ tengan dos raíces comunes, y resuelve en este caso las ecuaciones $P(x) = 0; Q(x) = 0$.

**Problema 2**
La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona $P$ va desde $A$ hasta $B$, y otra $Q$ desde $B$ hasta $A$.

Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con dos direcciones a tomar, ambas tienen la misma probabilidad.

Halla la probabilidad de que se crucen.




**Problema 3**
Dos circunferencias $C_1$ y $C_2$ de radios $r_1$ y $r_2$ se cortan en los puntos $A$ y $B$. Por $B$ se traza una recta $r$ variable que corta de nuevo a $C_1$ y $C_2$ en dos puntos $P_r$ y $Q_r$ respectivamente.

Demuestra que las mediatrices de los segmentos $P_rQ_r$ pasa por un punto fijo.

**Segunda sesión**
**viernes, 31 de marzo de 2000**

**Problema 4**
Encuentra el mayor número entero $N$ que cumple las siguientes condiciones:

a) $E(\frac{N}{3})$ tiene sus tres cifras iguales, y

b) $E(\frac{N}{3})$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural $n$ tal que $e(N) = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$

Nota: $E(x)$ es la parte entera de $x$.

**Problema 5**
Tomemos cuatro puntos situados en el interior o en el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

**Problema 6**
Demuestra que no existe ninguna función $f : N \to N$ que cumpla :

$$f(f(n)) = n + 1$$

Y estas son las soluciones escritas por algunos de los alumnos participantes durante la prueba:

**Problema 1** (Solución de Virginia García Madurga, Zaragoza)
Las raíces comunes a ambos polinomios serán raíces de la diferencia:

$$P(x) - Q(x) = (a-c)x^3 + (c-a)x$$

Resolvemos la ecuación $P(x) - Q(x) = 0$, sacando primero $x$ factor común:

$$x[(a-c)x^2 + (c-a)] = 0$$

Las tres raíces son 0,1 y $-1$; entre ellas tienen que estar las raíces comunes

Como 0 no es raíz ni de $P(x)$ ni de $Q(x)$, las dos raíces comunes tienen que ser 1 y $-1$.

Sustituyendo estos valores en $P(x)$ y $Q(x)$ obtenemos el sistema:

$$2 + a + b + c = 0$$
$$2 - a + b - c = 0$$

que nos da las condiciones $b = -2; a = -c$. Los polinomios quedan en la forma:

$$P(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1$$
$$Q(x) = x^4 - ax^3 - 2x^2 + ax + 1$$

Para resolver las ecuaciones $P(x) = 0, Q(x) = 0$, separamos por Ruffini las raíces conocidas 1 y $-1$, y quedan ecuaciones de la forma

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x^2 + ax - 1) = 0$$
$$Q(x) = (x+1)(x-1)(x^2 - ax - 1) = 0$$

Resolviendo las ecuaciones de segundo grado queda finalmente: soluciones de $P(x) = 0 : x = 1, x = -1$; soluciones de $Q(x) = 0 : x = 1, x = -1$

**Problema 2** (Solución de Fernando Cruz Robledillo, Madrid)

Definamos un sistema de coordenadas con origen en $A$ y unidad el lado del cuadrado.

Como $P$ y $Q$ recorren caminos de longitud mínima, $P$ y $Q$ sólo se podrán encontrar entre el 3ºy el 4ºmovimiento. Se han marcado en rojo todas las posibles posiciones de $P$ ((0,3), (1,2), (2,1) y (3,0) ) tras el tercer movimiento, y en verde las de $Q$.( (0,4), (3,1), (2,2) y (1,3) )

*Caso1*: $P$ llega a (0,3).

La probabilidad de que $P$ llegue a (0,3) es $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Sólo pudede cruzarse con $Q$ si éste está en (0,3), lo que sucede también con probabilidad $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. $P$ está obligado a pasar a (1,3), pero $Q$ pasa a (0,3) con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de que se crucen entre (0,3) y (1,3) es $\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$

*Caso 2*: $P$ llega a (1,2)

La probabilidad de que $P$ llegue a (1,2) es $3\ (\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$ (hay tres modos de llegar a (1,2))

Sólo se puede cruzar con $Q$ si éste está en (1,3) o en (2,2). Distingamos ambos casos :

a) $Q$ llega a (1,3) con probabilidad $\frac{1}{8}$, entonces se cruzarán entre (1,2) y (1,3) si $P$ se mueve hacia (1,3) y $Q$ hacia (1,2), ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$ La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$

b) $Q$ llega a (2,2) con probabilidad $\frac{3}{8}$, entonces se cruzarán entre (1,2) y (2,2) si $P$ se mueve hacia (2,2) y $Q$ hacia (1,2), ambos movimientos con probabilidad $\frac{1}{2}$. La probabilidad de cruzarse es $\frac{3}{8}\frac{3}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$

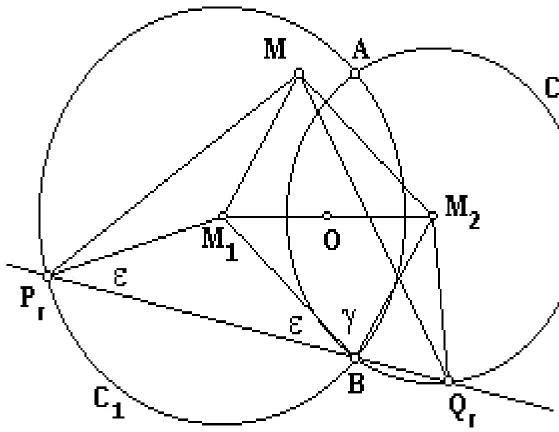
*Caso 3*: $P$ llega a (2,1). Procediendo de modo análogo, la probabilidad de cruzarse entre los puntos (2,1) y (2,2) $\frac{9}{2^8}$; y la de cruzarse entre (2,1) y (3,1) es $\frac{9}{2^8}$

*Caso 4:* $P$ llega a (3,0). La probabilidad de cruzarse entre (3,0) y (3,1) es $\frac{3}{2^8}$, y la de cruzarse entre (3,0) y (4,0) es $\frac{1}{2^7}$

La probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de todos los casos, resulta

$$\frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{9}{2^8} + \frac{3}{2^8} + \frac{1}{2^7} = \frac{37}{256}$$

**Problema 3** (Solución de Luis Emilio García Martínez, de Valencia)




Sea O el punto medio del segmento $M_1M_2$. Demostraré que todas las mediatrices de los segmentos $P_rQ_r$ pasan por el simétrico de $B$ respecto de $O$.

Sean $\varepsilon = \widehat{P_rBM_1}$; $\gamma = \widehat{M_1BM_2}$. Entonces

$\widehat{M_2BQ_r} = 180 - (\gamma + \varepsilon)$, y como el triángulo $M_2BQ_r$ es isósceles,

$$\widehat{BM_2Q_r} = 180^o - 2\widehat{M_2BQ_r} = 180^o - 2(\gamma + \varepsilon)$$

y por tanto

$$\widehat{MM_2Q_r} = 180 - \gamma + \widehat{BM_2Q_r} = 180 - \gamma - 180 + 2(\gamma + \varepsilon) = \gamma + \varepsilon$$

De modo análogo, por ser el triángulo $P_rM_1B$ isósceles, se tiene :$\widehat{P_rM_1B} = 180 - 2\varepsilon$, y

$$\widehat{P_rM_1M} = 360 - (\widehat{P_rM_1B} + 180 - \gamma) = 360 - 180 + 2\varepsilon - 180 + \gamma = 2\varepsilon + \gamma$$

Resulta que para cualquier posición de la recta variable, los triángulos $MM_1P_r$ y $MM_2Q_r$ son iguales, y por tanto $MP_r = MQ_r$, y $M$ está en la mediatriz de $P_rQ_r$. Como $M$ no depende de la recta variable, queda probada la propiedad del enunciado.

**Problema 4** (Solución de Roberto Alonso Pérez, País Vasco)

Condición a): $z = E(\frac{N}{3}) = 111k \quad k = 1, 2, 3..., 9$

Condición b): $z = E(\frac{N}{3}) = 1 + 2 + ... + n \Rightarrow z = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow n^2 + n - 2z = 0 \Rightarrow n = \frac{-1+\sqrt{1+8z}}{2}$ (la otra raíz es negativa)

Juntando las dos condiciones queda: $n = \frac{-1+\sqrt{1+8.111k}}{2}$

Como $n$ es natural, el radicando ha de ser cuadrado perfecto, lo que sólo ocurre para $k = 6$ que sustituido en la expresión anterior da $n = 36$.

Recuperando la condición a):

$$z = E(\frac{N}{3}) = 111.6 = 666 \Rightarrow 667 > \frac{N}{3} > 666 \Rightarrow 2001 > N > 1998$$

Por tanto, el mayor $N$ que cumple a) y b) es $N = 2000$

**Problema 5** (Solución de Manuel Pérez Molina, Alicante)

Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo. Supongamos que podemos distribuir cuatro puntos en el cuadrado de manera que cada una de las seis distancias sea mayor mayor que 1. Entonces hay dos posibilidades.

a) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero convexo

b) Los cuatro puntos forman un cuadrilátero no convexo

Veamos ambos casos:

a) Sean $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ los ángulos del cuadrilátero convexo. Sabemos que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^o$ Además cualquier pareja de puntos del interior (o frontera) del cuadrado está a distancia $d \leq \sqrt{2}$, ya que el diámetro de dicho cuadrado es $\sqrt{2}$.

De la condición $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360^o$ se deduce que necesariamente uno de los ángulos ha de ser mayor o igual que $90^o$; digamos, por ejemplo, $\alpha \geq 90^o$. Tenemos : $\overline{P_iP_j} > 1, i \neq j$. Luego,

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 - 2\overline{P_1P_2}.\overline{P_2P_3}.\cos\alpha$$

Como el cuadrilátero es convexo, $90 \leq \alpha \leq 180$ y por tanto $\cos\alpha \leq 0$ y en consecuencia

$$\overline{P_1P_3}^2 = \overline{P_1P_2}^2 + \overline{P_2P_3}^2 > 2 \Rightarrow \overline{P_1P_3} > \sqrt{2}$$

lo que es imposible.

b) Si se forma un cuadrilátero no convexo podemos elegir tres de los cuatro puntos formando un triángulo de modo que el cuarto punto sea interior. Suponemos que el punto interior es $P_4$.

Cada lado de dicho triángulo es menor o igual que $\sqrt{2}$, (diámetro del cuadrado), y por tanto estará contenido en un triángulo equilátero de lado $\sqrt{2}$, y circunradio $\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{2}{3} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$. Si su centro es $C, P_4$ estará en el interior de uno de los triángulos que resultan de unir $C$ con cada vértice, y la distancia de $P_4$ a uno de los vértices será menor o igual que el circunradio, es decir, menor que $\sqrt{\frac{2}{3}}$ y por tanto menor que 1. Hemos encontrado un par de puntos a distancia menor o igual que 1.

Por último, si tres puntos están alineados se reduce al caso b) y si los cuatro puntos están alineados, llamando $x_1, x_2, x_3$ a las distancias entre puntos consecutivos , tenemos: $x_1 + x_2 + x_3 \leq \sqrt{2}$, y por el principio del palomar uno de ellos, digamos $x_1$, cumple $x_1 \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$.

**Problema 6**(Solución de Alberto Suárez Real, Asturias)
Supongamos que existe $f : N \to N$ que cumple$f(f(n)) = n + 1$
Se tiene que $f(0) = a \in N$. Por el enunciado,

$$f(f(0)) = 1;\ f(f(0)) = f(a) = 1$$

Del mismo modo, $f(1) = a + 1$; $f(a + 1) = 2$; $f(2) = a + 2, .....$
Supongamos que $f(n - 1) = a + n - 1$, entonces $f(a + n - 1) = a + n$, luego hemos probado por inducción que $f(f(n)) = f(a + n) = 2a + n$
Entonces, $2a + n = n + 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin N$
Hemos llegado a una contradicción; la condición supuesta es falsa, con lo que queda demostrada la inexistencia de la función $f$

**Puntuaciones medias (cada problema se califica sobre un máximo de 7 puntos)**

| | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| media oros | 5 | 5.17 | 5 | 6.33 | 3.83 | 5.17 |
| media premios | 4.47 | 5.31 | 2.56 | 5.86 | 1.75 | 2.58 |
| media todos | 2.51 | 3.12 | 1.60 | 3.92 | 1.31 | 1.35 |
| desviación | 2.57 | 2.84 | 1.56 | 2.46 | 1.34 | 1.91 |

**Frecuencia de puntuaciones por problema:**

| Puntos | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 35 | 23 | 22 | 18 | 31 | 39 |
| 1 | 14 | 26 | 41 | 11 | 40 | 45 |
| 2 | 16 | 12 | 23 | 5 | 22 | 9 |
| 3 | 11 | 5 | 8 | 4 | 7 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 9 | 4 | 3 |
| 5 | 6 | 8 | 4 | 21 | 3 | 1 |
| 6 | 13 | 1 | 1 | 27 | 0 | 5 |
| 7 | 13 | 32 | 2 | 13 | 1 | 5 |

## Alumnos premiados en la fase nacional de la XXVI Olimpiada Matemática Española

### Medalla de Oro

Carlos Gómez Rodríguez (COU; C. Peleteiro de Santiago de Compostela)
Luis Emilio García Martínez (COU; Colegio Alemán de Valencia)
Alberto Suárez Real (COU; Colegio Salesiano de Avilés, Asturias)
José M. Cantarero López (2ºBto.; IES Martín Rivero de Ronda, Málaga)
Manuel Pérez Molina (COU; IES Figueras Pacheco de Alicante)
Roberto Rubio Núñez (COU; IES Fuente San Luis de Valencia)

### Medalla de Plata

Fernando Cruz Robledillo (Madrid)
José Doval González (Orense)
Xavier Martínez Paláu (Barcelona)
Santiago Molina Blanco (Castellón)
Carlos González Guillén (Madrid)
Francisco Javier Ortiz Barranco (Almería)
Carlos Marcelino Casas Cuadrado (Valladolid)
Jordi Rius Pascual (Lleida)
Carlos García Fernández (Madrid)
Alfredo Lafuente Laguna (Soria)
Juanjo Rué Perna (Lleida)
Enoc Altabás Felipo (Castellón)

### Medalla de Bronce

Jesús P. Moreno Damas (Madrid)
Ignacio García Marc (Las Palmas)
Sergio Leal Alcubilla (Burgos)
Alberto Llorente Mediavilla (Burgos)
Miquel Oliu Bartón (Barcelona)
Alfonso Cabrera Salinas (Córdoba)
Stephane Lesaffre (Barcelona)
Indalecio Carbonell Pascual (Alicante)
Eduardo Eisman Cabeza (Granada)
Carlos Vinuesa del Río (Madrid)
Juan Alemany Flos (Barcelona)
Guillermo Heras Prieto (Murcia)
Germán Sanchís Trilles (Valencia)
Rubén Bautista Tapias (Madrid)
José M. Hernández García (Murcia)
Roberto Alonso Pérez (Vizcaya)
Gaspar Fdez. Domínguez (Asturias)
Dacio Sánchez Iglesias (Zamora)

## Relación de premiados en la fase de Distrito
## Primeros Premios

| | |
|---|---|
| Adán Alonso, Miguel Ángel | Castilla la Mancha |
| Alonso Pérez, Roberto | País Vasco |
| Altabás Felipo, Enoc | Castellón |
| Barra Arias, Enrique | Extremadura |
| Blanco Gómez, Felipe | Madrid |
| Cabrera Salinas, Alfonso | Córdoba |
| Cantarero López, José María | Málaga |
| Casas Cuadrado, Carlos Marcelino | Valladolid |
| Cifuentes Negrete, Alberto | Salamanca |
| Crespo Rincón, Jaime | La Rioja |
| Doval González, José | Galicia |
| Esteban Martín, Paula | Zaragoza |
| Fernández Domínguez, Gaspar | Oviedo |
| Galbally Herrero, Javier | Cantabria |
| García Marco, Ignacio | Las Palmas |
| García Martínez, Luis Emilio | Valencia |
| Gómez Rodríguez, Carlos | Galicia |
| González Guillén, Carlos | Madrid |
| Hernández García, José Manuel | Murcia |
| Lesaffre, Stephan | Cataluña |
| Llorente Mediavilla, Alberto | Burgos |
| Lujambio Goizueta, Amaia | Navarra |
| Menacho López, Eligio | Cádiz |
| Moreno Damas, Jesús Pascual | Madrid |
| Moreno Sosa, Jesús María | Sevilla |
| Navarro Manchón, Carles | Alicante |
| Oliu Bartón, Miquel | Cataluña |
| Ortiz Barranco, Francisco Javier | Almería |
| Osorio Franco, Enrique | León |
| Palacios Miras, Carmelo | Granada |
| Pérez Molina, Manuel | Alicante |
| Rius Pascual, Jordi | Cataluña |
| Rubio Núñez, Roberto | Valencia |
| Sánchez de la, Cándida | Jaén |
| Suárez Real, Alberto | Oviedo |
| Tortella Rosselló, Sebastiá | Baleares |
| Vázquez Rodríguez, Juan Antonio | Huelva |
| Velasco Cebrián M$^a$Pilar | La Laguna |

**Segundos Premios**

| | |
|---|---|
| Alemany Flos, Juan | Cataluña |
| Antúnez García, Fernando | Granada |
| Ballester Navarro, Francisco Javier | Valencia |
| Berlanga Charriel, Pablo | Valencia |
| Bernardo Sacristán, Germán | Madrid |
| Cabello Blanco, Javier | Valladolid |
| Carbonell Pascual, Indalecio | Alicante |
| Carrillo Álvarez, Pablo Isidro | Sevilla |
| Cerrolaza Martínez, Juan José | La Rioja |
| Cruz Robledillo, Fernando | Madrid |
| Echevarría Corriente, Javier | La Laguna |
| Escolar lópez, Jon | País Vasco |
| Fuentes García, Alberto José | Galicia |
| García Domínguez, Celia | Las Palmas |
| García Madurga, Virginia | Zaragoza |
| González García, Álvaro | Castilla la Mancha |
| Gorena Martínez, Rubén | Navarra |
| Halir, Robert | Málaga |
| Heras Prieto, Guillermo | Murcia |
| Hevia Gisbert, José Antonio | Baleares |
| Leal Alcubilla, Segio | Burgos |
| Linares Sánchez, Javier | Cádiz |
| Lirola Criado, Francisco | Almería |
| Martín del Valle, Javier | Cantabria |
| Martínez Páu, Xavier | Cataluña |
| Meléndez Valoria, Verónica | León |
| Molina Blanco, Santiago | Castellón |
| Muñoz Mateos, Juan Carlos | Extremadura |
| Olmo Fernández, Alberto | Jaén |
| Orts Rasero, Jesús | Alicante |
| Otero de la Roza, Alberto | Oviedo |
| Otero Millán, Jorge | Galicia |
| Rué Perna, Juanjo | Cataluña |
| Sanchez Iglesias, Dacio | Salamanca |
| Sánchez Santana, Manuel Jesús | Huelva |
| Torralbo Torralbo, Francisco | Córdoba |
| Vinuesa del Río, Carlos | Madrid |

### Terceros Premios

| | |
|---|---|
| Almonacid Olleros,Guillermo | Jaén |
| Bautista Tapias, Rubén | Madrid |
| Bosch Torres, Sebastiá | Baleares |
| Cabezos Martín, Juan | Cantabria |
| Carpintero Rubio, María | Cádiz |
| Carrera Cahaza, Noa | Galicia |
| Castro Argüello, David | León |
| Conde Calero, Pablo | Alicante |
| Delgado Monge, Fernando | Burgos |
| Eisman Cabeza, Rduardo | Granada |
| Fernández Cancillo, Nuria | Las Palmas |
| Fuertes Pascual, Carlos Alberto | Salamanca |
| García Fernández, Carlos | Madrid |
| García Lasheras, Javier David | Navarra |
| González Recuero, Manuel | Madrid |
| González Blanco, M$^a$del Pilar | Murcia |
| Guerra Ortiz, Eduardo | La Laguna |
| Lafuente Laguna, Alfredo | Valladolid |
| Lavela Jiménez, José fernando | Córdoba |
| Lesaffre, Fabrice | Cataluña |
| Marcuello Fanlo, Javier | Zaragoza |
| Mariano Hernández, Jennifer | Las Palmas |
| Martín Macías, Javier | Huelva |
| Martín Morán, Jesús | Almería |
| Molero Bastante, María | Castilla la Mancha |
| Moreno Rodríguez, Carlos José | Extremadura |
| Oroz Bueno, Eduardo | La Rioja |
| Planelles Bort, Josep | Castellón |
| Sánchez Zoccali, Juan Ginés | Sevilla |
| Sanchís Bonet, Vicente | Valencia |
| Sanchís Trilles, Germán | Valencia |
| Vidal Vicedo, Sara | Alicante |
| Villaverde Fernández, Diego | Galicia |

## $41^a$ Olimpiada Internacional de Matemáticas

por

**Juan Manuel Conde Calero**

Una vez al año, en julio, se reúnen los mejores estudiantes de bachillerato de matemáticas del mundo para enfrentarse a los seis problemas del prestigioso concurso que es la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO). La cita, este año 2000, ha sido en Taejon (Corea del Sur), celebrándose en el Instituto Superior de Ciencia y Tecnología de Corea (KAIST), del 13 al 25 de julio. Han participado 461 estudiantes de 82 países.

La IMO es una competición individual. Cada problema de los seis propuestos se valora hasta siete puntos. Reciben medallas aproximadamente la mitad de los participantes. Las medallas de oro, plata y bronce se conceden sin superar la razón 1.2:3, y en esta IMO se han concedido a partir de los 30, 21 y 11 puntos respectivamente. De este modo, 39 estudiantes han sido premiados con oro, 71 con plata y 119 con bronce. Para estimular a que se resuelvan problemas completos, se otorgan Menciones de Honor a los concursantes que obtengan siete puntos en algún problema y no hayan sido premiados con medalla.

El equipo español ha estado formado por los estudiantes siguientes:

Carlos Gómez Rodríguez (Santiago de Compostela)
Luis Emilio García Martínez (Valencia)
Alberto Suárez Real (Salinas, Asturias)
José María Cantarero López (Ronda, Málaga)
Manuel Pérez Molina (Alicante)
Roberto Rubio Núñez (Valencia)

Les acompañaban María Gaspar, como Jefe de Delegación, y Juan Manuel Conde como Jefe Adjunto.

Los problemas de la prueba se han seleccionado por el Jurado, formado por todos los Jefes de Delegación, de la "lista corta" que ha confeccionado el Comité de selección de problemas coreano a partir de de los enviados por 46 países. Esta lista consta de 27 problemas: 6 de combinatoria, 7 de álgebra y análisis, 6 de teoría de números y 8 de geometría.

La prueba se indica a continuación:

Primer día
Taejon, 19 de junio de 2000

**Problema 1** (Propuesto por Rusia)
Dos circunferencias $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ se cortan en $M$ y $N$. Sea $l$ la tangente común a $\Gamma_1$ y $\Gamma_2$ tal que $M$ está más cerca de $l$ que $N$. La recta $l$ es tangente a $\Gamma_1$ en $A$ y a $\Gamma_2$ en $B$. La recta paralela a $l$ que pasa por $M$ corta de nuevo a $\Gamma_1$ en $C$ y a $\Gamma_2$ en $D$. Las rectas $CA$ y $DB$ se intersectan en $E$; las rectas $AN$ y $CD$ se intersectan en $P$; las rectas $BN$ y $CD$ se intersectan en $Q$.
Demostrar que $EP = EQ$.

**Problema 2** (Propuesto por Estados Unidos)
Sean $a, b, c$ números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leq 1$$

**Problema 3** (Propuesto por Bielorrusia)
Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay $n$ pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo $\lambda$ definimos un *salto* como sigue:
Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en puntos $A$ y $B$ con $A$ a la izquierda de $B$;.
Luego, la pulga situada en $A$ salta hasta el punto $C$ de la recta, situado a la derecha de $B$, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$.
Determinar todos los valores de $\lambda$ tales que, para cualquier punto $M$ de la recta y cualesquiera posiciones iniciales de las $n$ pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de $M$

Segundo día
Taejon, 20 de junio de 2000

**Problema 4** (Propuesto por Hungría)
Un mago tiene cien tarjetas numeradas desde 1 hasta 100. Las coloca en tres cajas: una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.
Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta.
¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?

**Problema 5** (Propuesto por Rusia)

Determinar si existe un enero positivo $n$ tal que exactamente 2000 números primos diferentes dividen a $n$ , y $n$ divide a $2^n + 1$

**Problema 6** (Propuesto por Rusia)

Sean $AH_1, BH_2$ y $CH_3$ las alturas de un triángulo acutángulo $ABC$. La circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$ es tangente a los lados $BC, CA$ y $AB$ en los puntos $T_1, T_2$ y $T_3$ respectivamente.

Sea $l_1$ la recta simétrica de $H_2H_3$ con respecto a $T_2T_3$; $l_2$ la recta simétrica de $H_3H_1$ con respecto a $T_3T_1$, $l_3$ la recta simétrica de $H_1H_2$ con respecto a $T_1T_2$.

Demostrar que $l_1, l_2, l_3$ determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo $ABC$.

Seguidamente se detalla en una tabla el número de estudiantes que ha obtenido cada puntuación en cada problema:

| Puntos | P1 | P2 | P3 | P4 | P5 | P6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 118 | 50 | 335 | 85 | 257 | 335 |
| 1 | 11 | 213 | 60 | 78 | 82 | 5 |
| 2 | 44 | 41 | 29 | 62 | 16 | 51 |
| 3 | 37 | 13 | 13 | 49 | 12 | 15 |
| 4 | 22 | 6 | 6 | 28 | 14 | 11 |
| 5 | 4 | 18 | 2 | 29 | 1 | 9 |
| 6 | 5 | 12 | 1 | 49 | 11 | 2 |
| 7 | 220 | 108 | 15 | 81 | 68 | 33 |
| media | 4.1 | 2.8 | 0.7 | 3.2 | 1.6 | 1 |

Los problemas se han propuesto en cada sesión en orden creciente de dificultad, es decir, de forma clásica, si bien el tercero ha resultado más difícil que el sexto.

Los participantes españoles no obtuvieron ninguna medalla en este certamen. José María Cantarero López obtuvo, sin embargo,una mención de Honor por sus siete puntos en el problema 4.

Sólo cuatro estudiantes (de Bielorrusia, China y dos de Rusia) han obtenido la puntuación máxima de 42 puntos.

La próxima Olimpiada Internacional será en Washington, Estados Unidos, del 1 al 15 de julio de 2001.

Juan Manuel Conde Calero
Universidad de Alicante
correo electrónico: `jm.conde@ua.es`

| **País** | **pts** | **O** | **P** | **B** | **MH** | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Albania | 17 | | | | | |
| Alemania | 108 | 1 | 1 | 2 | 1 | |
| Argentina | 88 | | 1 | 4 | | |
| Armenia | 108 | | 2 | 3 | | |
| Australia | 122 | 1 | 3 | 1 | | |
| Austria | 68 | | 2 | 1 | | |
| Azerbaiján | 32 | | | | 2 | |
| Bélgica | 51 | | | 2 | 1 | |
| Bielorrusia | 165 | 2 | 2 | 2 | | |
| Bosnia | 78 | | | 4 | | |
| Brasil | 58 | | | 3 | 1 | |
| Brunei | 8 | | | | | |
| Bulgaria | 169 | 2 | 3 | 1 | | |
| Canadá | 112 | 1 | 2 | 1 | 1 | |
| China | 218 | 6 | | | | |
| China Taipei | 164 | 3 | 2 | 1 | | |
| Chipre | 32 | | | | 1 | |
| Colombia | 61 | | | 2 | | |
| Croacia | 73 | | | 4 | 1 | |
| Cuba | 61 | | | 2 | 2 | |
| Dinamarca | 36 | | | 1 | 1 | |
| Ecuador | 19 | | | | | |
| Eslovaquia | 111 | | 2 | 3 | | |
| Eslovenia | 73 | | 1 | 1 | 2 | |
| España | 29 | | | | 1 | |
| Estados Unidos | 184 | 3 | 3 | | | |
| Estonia | 42 | | 1 | 1 | | |
| Filipinas | 23 | | | | 1 | |
| Finlandia | 52 | | | 3 | 1 | |
| Francia | 58 | | | 3 | 1 | |
| Georgia | 72 | | 1 | | 4 | |
| Grecia | 46 | | | 1 | 1 | |
| Guatemala | 11 | | | | | |
| Hong Kong | 80 | | 1 | 2 | 1 | |
| Hungría | 156 | 1 | 5 | | | |
| India | 132 | | 5 | 1 | | |
| Indonesia | 54 | | | 2 | | |
| Irán | 155 | 2 | 3 | 1 | | |
| Irlanda | 28 | | | | | 1 |
| Islandia | 37 | | | | | 1 |
| Israel | 139 | 2 | 1 | 3 | | |

| **País** | **pts** | **O** | **P** | **B** | **MH** |
|---|---|---|---|---|---|
| Italia | 57 | | | 3 | |
| Japón | 125 | 1 | 2 | 4 | |
| Kazakhastán | 91 | | | 4 | 1 |
| Kyrgistán | 16 | | | 1 | |
| Kuwait | 12 | | | | |
| Latvia | 60 | | | 3 | |
| Lituania | 34 | | | 1 | 1 |
| Luxemburgo | 51 | | | 2 | 1 |
| Macao | 16 | | | | |
| Macedonia | 63 | | 1 | 2 | |
| Malasia | 32 | | | 2 | |
| Marruecos | 48 | | | 1 | 2 |
| Méjico | 75 | | 1 | 3 | 1 |
| Moldavia | 84 | | 2 | 3 | |
| Mongolia | 67 | | | 4 | |
| Noruega | 45 | | | 1 | |
| Nueva Zelanda | 34 | | | | 1 |
| Países Bajos | 60 | | | 2 | 1 |
| Perú | 32 | | | | 3 |
| Polonia | 75 | | 1 | 2 | 1 |
| Portugal | 21 | | | | |
| Puerto Rico | 8 | | | | |
| Reino Unido | 96 | | 2 | 4 | |
| Rep de Corea | 172 | 3 | 3 | | |
| Rep Checa | 65 | | 1 | 3 | |
| Rumanía | 139 | 1 | 3 | 2 | |
| Rusia | 215 | 5 | 1 | | |
| Singapur | 71 | | 1 | 2 | |
| Sry Lanka | 21 | | | | 1 |
| Sudáfrica | 81 | | | 4 | 1 |
| Suecia | 77 | | 2 | | 2 |
| Suiza | 67 | | 1 | 2 | |
| Tailandia | 78 | | 1 | 3 | |
| Trinidad Tobago | 40 | | | | 2 |
| Turquía | 111 | | 3 | 1 | 1 |
| Ucrania | 135 | 2 | 2 | | 1 |
| Uruguay | 23 | | | | 1 |
| Uzbekistán | 70 | | | 2 | 4 |
| Venezuela | 11 | | | | |
| Vietnam | 169 | 3 | 2 | 1 | |
| Yugoslavia | 93 | | 1 | 3 | |

# XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

**José Aymerich Miralles**

En Caracas, Venezuela, entre los días 16 y 24 de septiembre, se reunierom 83 estudiantes procedentes de 21 países para tomar parte en la Olimpiada Iberoamericana de 2000. Como se sabe, esta Olimpiada está dirigida a jóvenes de países miembros de la Organización de Estados Iberoamericanos (O.E.I), que participan con equipos de cuatro estudiantes. Únicamente Honduras faltó a la cita, y el resto de países, a excepción de Uruguay, participó con equipos completos.

Los Jefes de Delegación, que constituyen el Jurado, se alojaban en Caracas. A ellos se unieron, en el momento de comenzar las coordinaciones, los profesores tutores, que hasta ese momento se encontraban acompañando a los estudiantes en el Centro de Convenciones de Estudios Avanzados, en el Estado de Miranda.

Los seis problemas seleccionados por el Jurado entre una lista formada por 3 de álgebra, 6 de teoría ed números, 5 de combinatoria y 10 de geometría fueron los siguientes:

**Problema 1**

Se construye un polígono regular de n lados (n$\geq$ 3) y se numeran sus lados de 1 a n. Se trazan todas las diagonales del polígono. Demostrar que si n es impar, se puede asignar a cada lado y a cada diagonal un número entero de 1 a n, tal que se cumplan simultáneamente las siguientes condiciones:

a) el número asignado a cada lado o diagonal sea distinto del asignado a los vértices que une,

b) para cada vértice, todos los lados y diagonales que comparten dicho vértice tengan números distintos

media de todos: 4,04

media España: 7

**Problema 2**

Sean $S_1$ y $S_2$ dos circunferencias de centros $O_1$ y $O_2$ respectivamente, secantes en $M$ y $N$. La recta $t$ es la tangente común a $S_1$ y $S_2$ más cercana a $M$. Los puntos $A$ y $B$ son los respectivos puntos de contacto de $t$ con $S_1$ y $S_2$. Sea $C$ el punto diametralmente opuesto a $B$ y $D$ el punto de intersección de la recta $O_1O_2$ con la recta perpendicular a la recta $AM$ trazada por $B$. Demostrar que $M, D$ y $C$ están alineados.

media de todos: 1,76

media de España: 2

**Problema 3**

Encontrar todas las soluciones de la ecuación $(x+1)^y - x^z = 1$ para $x, y, z$ enteros mayores que 1

media de todos: 1,72

media de España: 2.75

**Problema 4**

De una progresión aritmética infinita $1, a_1, a_2, a_3, ....$ de números reales se eliminan términos, obteniéndose una progresión geométrica infinita $1, a_{n_1}, a_{n_2}$, $a_{n_3}, .....$ de razón $q$. Encontrar los posibles valores de $q$.

media de todos: 3.01

media de España: 3.25

**Problema 5**

Hay un montón de 2000 piedras. Dos jugadores se turnan para retirar piedras, alternativamente, de acuerdo con las siguientes reglas:

1.- En cada jugada se pueden retirar 1,2,3,4 o 5 piedras del montón

2.- En cada jugada se prohibe que el jugador retire la misma cantidad de piedras que retiró su oponente en la jugada previa.

Pierde el jugador que en su turno no puede realizar una jugada válida. Determinar qué jugador tiene estrategia ganadora, y encontrarla.

media de todos : 1.07

media de España: 3.5

**Problema 6**

Un hexágono convexo se denomina *bonito* si tiene cuatro diagonales de longitud 1, cuyos extremos incluyen todos los vértices del hexágono.

1.- Dado cualquier número k, mayor que 0 y menor o igual que 1, encontrar un hexágono bonito de área k.

2.- Demostrar que el área de cualquier hexágono bonito es menor que $\frac{3}{2}$.

media de todos: 0.04

media de España: 0.75

La puntuación máxima de cada problema es, como de costumbre, siete puntos. El Jurado otorgó Medalla de Oro a los siete estudiantes (tres brasileños, dos mejicanos, un argentino y un venezolano) con 25 puntos o más. Nadie reunió más de 35 puntos. Los cortes para las Medallas de Plata y de Bronce fueron, respectivamente, 18 y 9 puntos.

El equipo español, con José Aymerich como Jefe de Delegación y Salvador Villegas como Profesor Tutor, estaba formado por los cuatro estudiantes, ganadores de la fase nacional de la Olimpiada, que habían obtenido mejores resultados en Corea. Y olvidada ya la Selectividad, tuvieron ocasión de sacarse la "espina" de los resultados de la internacional: Alberto Suárez Real, de Asturias,; José María Cantarero, de Málaga, y Luis Emilio García Martínez, de Valencia, obtuvieron Medalla de Plata, con 23, 19 y 19 puntos respectivamente; Carlos Gómez García, de Santiago de Compostela, tuvo 16 y Medalla de Bronce.

El año próximo, la Olimpiada se celebrará en El Salvador. España está oficialmente propuesta como sede para el año 2006,con autorización para adelantar si fallara alguna de las sedes intermedias, es decir, Uruguay (2002), Argentina (2003), Ecuador (2004) y Colombia (2005)

## Noticias

El Profesor Francisco Bellot Rosado, del IES Emilio Ferrari de Valladolid, ha recibido el premio Erds que otorga la World Federation of Mathematical Competitions. Se reconocen as sus largos años de dedicación a la Olimpiada. Desde estas páginas le enviamos nuestra felicitación.

Es poca la literatura en castellano específica para los alumnos que desean prepararse para la Olimpiada. En el "*Manual de matemáticas para preparación olímpica*" que acaba de publicar la universidad Jaume I de Castellón se recogen, junto a numerosos problemas propuestos en nuestra Olimpiada y en las de otros países, los resultados teóricos que ayuda conocer para abordarlos con éxito. Los autores del libro son Cristóbal Sánchez Rubio y Manuel Ripollés Amela.

En el momento de cerrar esta edición de La Gaceta acaba de convocarse la XXXVII Olimpiada Matemática Española. La fase nacional se celebrará en Murcia, del 22 al 25 de marzo de 2001.