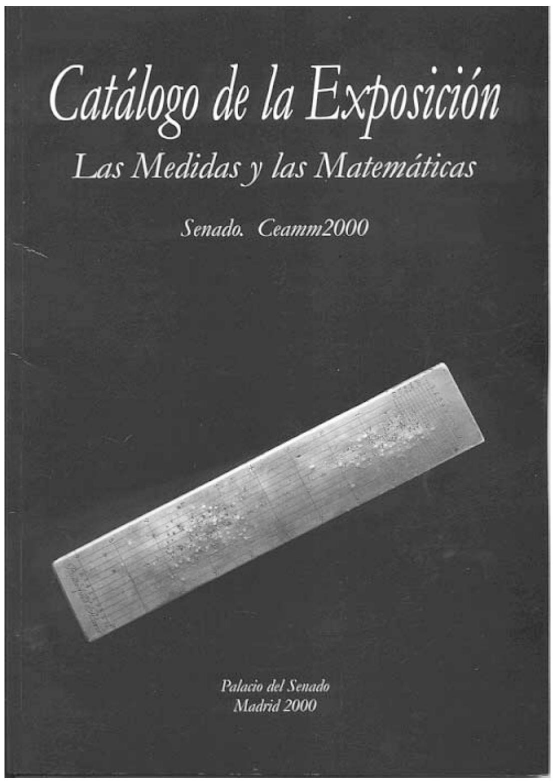
Actos en el senado



La colaboración con el Senado fue coordinada por Manuel de León y José Luis Fernández. Se propusieron a la Mesa del Senado dos acciones: la edición facsímil de El Libro de los Reloges Solares, y la realización de una exposición sobre el Sistema Métrico Decimal. La Mesa del Senado aprobó ambos proyectos por unanimidad.

Desde el primer momento se contó con el decidido apoyo de la senadora Doña Carmina Virgili i Rodón del grupo socialista y el senador D. Josep Varela i Serra, de CiU. La senadora Doña Carmina Virgili i Rodón merece un tributo especial de los matemáticos españoles. Ella fue la primera en señalar a las Cámaras parlamentarias la importancia del Año Mundial de las Matemáticas al dirigir una pregunta al Gobierno sobre los actos previstos para tal evento. Por su parte el senador D. Josep Varela i Serra ha sido uno de los mejores defensores del Año Mundial de las Matemáticas en España. Sin su apoyo constante, el CEAMM2000 no hubiera podido llevar adelante algunos de sus proyectos.

También con él la matemática española está en deuda. Además, las senadoras Doña Francisca Pleguezuelos (grupo socialista) y Doña Rosa Posadas (grupo popular) y el senador D. Manuel Nieto (grupo socialista) prestaron su concurso. La Sra. Presidenta del Senado, Doña Esperanza Aguirre y Gil de Biedma acogió tanto la idea de la edición facsímil como la de la exposición con un enorme entusiasmo. La ayuda inestimable de Doña Rosa Ripollés, Letrada del Senado y nuestra interlocutora allí, hizo posible en gran medida la realización de ambas acciones. También Doña Rosario Herrero y D. Regino García Badell estuvieron atentos en todo momento a nuestras necesidades.

Para la edición crítica de El Libro de los Reloges se propuso a Joan Girbau i Badó quién aceptó entusiasmado y realizó un trabajo excepcional. Para la exposición, se sugirió el nombre de Santiago Garma como Comisario, quién al frente de un animoso equipo, trabajó muy duro y contrareloj para llevar adelante el proyecto.

El 17 de febrero de 2000 se celebró en el Senado el acto de inauguración de la exposición **Las medidas y las matemáticas. La implantación del Sistema Métrico Decimal en España**, así como la presentación de la edición facsímil de **El libro de los reloges solares**, de Pedro Roiz. El acto fue presidido por el Excmo. Vicepresidente primero del Senado D. Jaume Cardona, y contó con la asistencia de Manuel de León (en representación del CEAMM), Santiago Garma (Comisario de la exposición) y Joan Girbau (autor del estudio crítico de la edición facsímil). Tanto la exposición como la edición facsímil fueron patrocinadas por el Senado a solicitud del CEAMM2000. La exposición estuvo abierta desde ese día hasta el pasado 10 de marzo. Recogemos aquí, por su interés, la introducción del Catálogo de la exposición por Santiago Garma, y el estudio crítico del libro por Joan Girbau.

Las matemáticas y las medidas

por

Santiago Garma

Toda operación de "medir" consiste en comparar con un elemento de referencia, con una vara de madera, de hierro o de otro material, con un recipiente en forma de botella o con un cubo de madera, de cristal o de metal, con un objeto sólido o con la duración del día y de la noche, objetos o tiempos. Pero decir esto es casi una trivialidad, porque para comparar hace falta disponer de los objetos o patrones con los que se puede hacer esto y es preciso tener un lenguaje, para contar esta operación, y los argumentos y razonamientos para plantearla y resolverla.

Cuando hablamos de las razones que originan un problema de medir, de los argumentos y métodos que se emplean para realizar las mediciones estamos entrando en la metrología científica. La metrología tiene además otros aspectos que son de carácter práctico y otros de carácter social y legal, directamente asociados al poder político de la sociedad.

El lenguaje empleado en la metrología desde la antigüedad, con más o menos precisión, ha sido el que ahora reconocemos como matemático. Los nombres dados a las distintas medidas por cada grupo social, reino o estado, han sido sacados, en principio, del propio ser humano, principalmente, y de actividades como sembrar o trasladarse de una ciudad a otra. Estas formas de nombrar han durado desde la creación del sistema Sumerio-babilónico (III milenio, a. de C.), y los sistemas egipcio, griego o romano, hasta la definición del Sistema Métrico Decimal, entre 1790-1799. Pero los términos empleados para hablar de las medidas han sido los números y los planteamientos han sido matemáticos.

El objeto de Exposición que presentamos, organizada por el Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM 2000), y patrocinada por el SENADO, es mostrar cómo las medidas han tenido una fundamentación científica en las Matemáticas a lo largo de la historia. Además se quiere conmemorar el 200 aniversario de la definición e implantación del Sistema Métrico Decimal, en casi todos los países, y con ello de la creación de la metrología científica. Hay que destacar que la Exposición pone énfasis en la historia de la metrología en España, apuntando los problemas relativos a las definiciones de las medidas y la búsqueda de un sistema integrado, y en la destacada participación de los sabios españoles en los trabajos para la medición del arco de meridiano y en la definición de metro, a finales del siglo XVIII. Y también la nueva definición del patrón de metro, que se construye en 1875 y se aprueba en 1889, que llevó cabo una Comisión Internacional presidida por el general Ibáñez e Ibáñez de Ibero, cargo para el que había sido elegido por unanimidad. Este hecho lo recuerda y se señala en la Exposición como uno de los más importantes que se han producido en la metrología del siglo XIX. Finalmente, la Exposición pretende mostrar el Sistema Internacional de Medidas y los nuevos métodos de posicionamiento, que se usan en la actualidad, y el papel que juegan los organismos españoles en estas tareas.

Una vez que se encontraron procedimientos para medir y que en sus inicios fueron muy simples, simultáneamente o inmediatamente después se inventaron alfabetos y sistemas numéricos. Los que mejor conocemos son los Sumerio-babilónicos y los egipcios, el primero de los cuales fue un sistema de numeración en base sesenta y el segundo con base decimal.

La numeración Sumerio-babilónica en base 60 se aplicó a la geometría y sirvió de base a la moderna trigonometría, definiendo la división sexagesimal de la circunferencia. Los resultados de su Aritmética y Trigonometría fueron recogidos por los griegos que emplearían para calcular ángulos el valor de la cuerda opuesta al ángulo, en una circunferencia con centro en el vértice del ángulo y radio dado. Esto produjo cálculos muy complicados frecuentemente, en función de que el radio tuviese una longitud más o menos grande, pues se lograba con ello mayor exactitud en el valor del ángulo. Esto cambió cuando en unas tablas, llamadas Sūrya Siddhānta (ca. 400) construidas en la India se dieron los valores de funciones trigonométricas como seno y coseno para ángulos medidos en grados.

La numeración y la aritmética egipcia empleó los números naturales y fracciones numéricas con numerador 1 y con denominador un valor cualquiera y, en algunos problema, fracciones con numerador 2. La forma de calcular consistía en realizar las operaciones más sencillas, probablemente partiendo de cálculos hechos dividiendo una cuerda unidad en partes, y construyendo tablas con los resultados, con los que llegaron obtener valores sorprendentes. En el papiro *Kahum* se encuentran cálculos numéricos correspondientes al teorema de Pitágoras, como $6^2 + 8^2 = 10^2$. Los egipcios emplearon sus cálculos y números para medir con bastante precisión y sus medidas como el *dedo* o el *codo* se transmitirían a la Europa medieval.

El desarrollo de las Matemáticas en Grecia y el aparato teórico construido por Euclides (ca. 300 a. de C.) tuvo innumerables efectos tanto en las propias Matemáticas de su época y en las posteriores, como en la Astronomía, la Física y en todo la cultura. La Proposición II, 12 y 13 en los *Elementos* de Euclides contienen las leyes para el cálculo del coseno de ángulos agudos y obtusos. Y con estos datos los astrónomos, como Eratóstenes (ca. 276-ca. 194 a. de C.), los manejaron hábilmente para llegar a calcular, y con gran aproximación, datos como el del radio de la tierra.

Las medidas dimensionales de longitudes o terrenos, u otras necesarias en las sociedades medievales y renacentistas fueron haciéndose con el tiempo más variadas, complejas y arbitrarias. Pero la necesidad y el mayor conocimiento de la utilidad de las distintas medidas exigió que se encontrase un elemento de referencia definido previamente. Los musulmanes definían el *dedo* como equivalente a "seis granos de cebada alineados panza contra lomo, equivalentes a seis pelos de la cola de un mulo". Esta ambigüedad se había precisado a finales del siglo XIII y los reyes, en los países europeos al menos, definieron sus medidas lineales o ponderales con precisión. El calendario que se estableció como definitivo y que mide nuestro tiempo, en la actualidad, lo aprobó el Papa Gregorio en 1582.

El comercio y los intercambios fueron eliminando obstáculos y estabilizando las medidas, hasta el siglo XVIII, y se definieron patrones, para lo que sólo se necesitaba conceptos matemáticos y una teoría matemática muy elemental. En casi toda las sociedades se llevaron a cabo repetidos procesos de unificación de medidas, con más o menos éxito, que plantearon la necesidad de encontrar patrones de referencia invariables. Los primeros intentos para lograr contar con patrones de referencia fiables, generalmente, consistieron en construir medidas en piedra o metal. Pero estas, el paso del tiempo lo demostró, no fueron uniformes ni se conservaron invariables.

Pero, además, cuando se quiso saber la medida de algunos de los objetos de más uso en aquellas sociedades, a pesar de aparentar que se podían obtener con cálculos simples, se tropezó con dificultades considerables. En 1612 una cosecha extraordinaria de vino llevó a los cosecheros a pedir a Johannes Kepler (1571-1630) que les calculase con exactitud la capacidad de una barrica. Hasta entonces se hacía un cálculo aproximado de la capacidad, por semejanza con un cilindro, y basándose en operaciones realizadas por Arquimedes. Kepler consideró la barrica, el sólido, como compuesto una infinidad de sectores circulares y la suma de sus áreas por el ancho de cada de uno daba el volumen de la barrica. Las reflexiones de Kepler, que publico en un volumen con el título de *Stereometria doliorum vinariorum*, servirían más adelante como fundamento del Cálculo Integral.

Otro de los problema importantes que se resolvió en los siglos XV y XVI fue la construcción, con precisión de mapas. La técnica empleada, hasta entonces, se debía a Ptolomeo, que realizaba un proyección estereográfica que conservaba las formas, pero no usaba la red de paralelos y meridianos. Las imprecisiones para el posicionamiento de lugares en un lugar real, empleando los mapas, eran considerables y las distancias entre los puntos no correspondían con las que daban los mapas. Un geógrafo y matemático flamenco que trabajaba en Bruselas en corte de Carlos V, Gerard Mercator (1512-1594), publicó en 1569 el primer mapa, *Nova et aucta orbis terrae descriptio*, considerando la tierra inscrita en un cilindro recto tangente a la tierra a lo largo del ecuador. Proyectando la esfera desde el centro de la misma sobre el cilindro, al desarrollar el cilindro, aparecía una red de meridianos y paralelos perpendiculares donde los primeros estaban a distancias iguales y los segundos no. Pero realizó una modificación que le permitió corregir el error. La primera explicación de su método, que a partir de aquél momento sería la proyección Mercator, se debió Edward Wright (1558-1615) quien descubrió que había empleado una relación entre la distancia al ecuador D y la latitud ϕ y la ecuación $D = \ln \mathrm{tag}\left(\frac{\phi}{2} + 45^0\right)$. Unos años después J. Wallis (1616-1703), empleó estos resultados de Mercator y pudo llegar a calcular los segmentos de hipérbola como un logaritmo, para que finalmente se llegase a la igualdad fundamental $\log x = \int \frac{1}{x}\, dx$.

La preocupación por normalizar las medidas llevó a algunos de los científicos del siglo XVI a buscar técnicas que permitiesen localizar una referencia invariable. Galileo (1564-1642) preocupado por el tema estudió el isocronismo de las oscilaciones del péndulo. Algunos sabios como el ingeniero flamenco Isaac Beeckman (1588-1637) que propuso en 1631 al Padre Picard (1620-1692), fundador de la Academia de Ciencias de París, elegir la longitud del péndulo que oscila en un segundo como unidad de medida "natural y universal". Y pasando por el Padre Mersenne (1588-1648), por Christian Huygens (1629-1695) hasta el Padre Mouton (1618-1694) tenemos los defensores y patrocinadores de la idea que llevó asociar la medida universal a la dimensión de la tierra.

Pero la medida que se va a considerar como patrón, será la diezmillonesima parte del cuadrante del meridiano terrestre, y esta iba a requerir la medida con precisión de un arco de meridiano. Esta tarea se emprendió y repitió durante los siglos XVII y XVIII varias veces, con distintas finalidades. Las primeras para resolver las incógnitas planteadas en relación con la forma de la tierra, para lo se que promovieron dos expediciones. Una a Laponia, dirigida por Maupertuis (1698-1759), y otra al Perú dirigida por L. Godin (1704-1760), en la que participó Ch. de la Condamine (1701-1774), que tenía el encargo de la Academia de Ciencias de resolver el problema de la forma de la tierra. Con los datos obtenidos se pudo reconocer que la tierra era aplastada por los polos, pero estos y las medidas hechas, adolecían de bastantes defectos pues no se habían tenido en cuenta todas las variables posibles. El descubrimiento y la invención de nuevos instrumentos, como el círculo de Borda, permitirían lograr una mayor exactitud en los cálculos. Pero fundamentalmente esta exactitud se logró después que Adrien-Marie Legendre (1752-1833) demostrase un teorema que permitía calcular los triángulos de la red necesaria para hallar la longitud del meridiano. Legendre enunció, en 1787, que "si se considera como cantidades infinitesimales de primer orden los arcos interceptados sobre la esfera (terrestre) por los lados de un triángulo, se puede con una aproximación de cuarto orden, calcular estos lados por la trigonometría rectilínea, con la condición de restar a cada uno de los ángulos del triángulo 1/3 del exceso esférico". Delambre que se presentó a la Comisión Internacional, encargada de aprobar las medidas que permitían contar con el "metro", aplicó este teorema, lo que le permitió dar una medida correcta para la definición.

Las medidas posteriores, para determinar patrones más exactos del metro y otros patrones de medidas del Sistema Internacional, han necesitado de la Física o de la Química más que de nuevos cálculos matemáticos.

La parte final de la Exposición relata los aspectos legales de las medidas, la ley de Isabel II implantando el Sistema Métrico en España, los avatares y vaivenes de la implantación, con la aprobación final del Reglamento y, finalmente, el Decreto de Alfonso XII obligando a cumplir la Ley.

Estudio introductorio al "Libro de los Reloges Solares" de Pedro Roiz, publicado en Valencia en 1575

por

Joan Girbau

El año 2000 ha sido declarado **año mundial de las matemáticas**. La edición facsímil del presente libro ha corrido a cargo del Senado español como contribución a los actos de promoción de las matemáticas que en el transcurso de este año tendrán lugar en numerosos lugares del planeta.

El libro, destinado a enseñar detalladamente el arte de construcción de relojes de sol precisos, contiene, a modo de prólogo, una corta epístola del autor dirigida al *muy ilustre Señor Don Joan de Borja* (a quien dedica esta obra) que constituye uno de los elogios de las matemáticas más inspirados que se han escrito. Este prólogo de sólo dos páginas –que luego comentaremos con detalle– justifica por sí solo la reedición de esta obra.

Digamos que en la época en que el libro fue escrito el arte de construcción de relojes de sol era "la tecnología punta" de que se disponía para medir el tiempo. Si bien en aquella época existían ya relojes mecánicos de péndulo bastante precisos, se habrá de aguardar todavía un siglo para que éstos estén en condiciones de competir en precisión con los relojes de sol. Ello será posible gracias a la invención de un sistema de péndulo que ideó el matemático Christiaan Huygens en 1658 y que aumentó considerablemente la precisión de los relojes mecánicos construidos hasta entonces.

El presente libro consta de un prólogo en forma de epístola (del que ya hemos hablado), y de veintiocho capítulos. El prólogo, como ya hemos dicho, constituye un maravilloso elogio de las matemáticas y merece una especial atención. Los capítulos 1 y 2 pretenden dar al lector los conocimientos imprescindibles de geometría plana para poder realizar correctamente las distintas construcciones gráficas que se explican en el resto del libro. El capítulo 3 contiene los conocimientos astronómicos necesarios para entender los capítulos siguientes (del 4 al 28), los cuales describen minuciosamente el arte de construcción de relojes de sol.

Dividiremos este estudio introductorio del libro en los apartados siguientes:

1. El prólogo (epístola del autor a D. Joan de Borja).
2. Los capítulos 1 y 2 dedicados a geometría.
3. El capítulo 3 dedicado a astronomía.
4. Los capítulos dedicados al arte de construcción de relojes de sol.
5. Principios básicos de funcionamiento de un reloj de sol.
6. La hora que marcan los relojes de sol.
7. Comentarios finales.

1. El Prólogo. Epístola del autor a D. Joan de Borja

La estupenda epístola que sirve de prólogo al libro empieza con la descripción del famoso problema griego de la duplicación del cubo. En el año 429 a. C. una gran peste azotó Atenas y se llevó aproximadamente una cuarta parte de la población. Dícese que para remediar aquella calamidad se envió una delegación al oráculo de Apolo en Delos para preguntar cómo podría conjurarse la peste, a lo que el oráculo respondió que era necesario duplicar el altar cúbico del templo de Apolo. Los atenienses pensaron primero que bastaba con construir una ara igual a la ya existente y juntarla a la primera, pero al observar que después de realizar esta construcción la peste no cesaba, dícese que interpretaron el oráculo en el sentido de que debían construir un altar *con la misma forma cúbica* que el primitivo, pero de volumen doble.

El libro que estamos comentando, después de describir este problema dice de él que es muy dificultoso y que no se puede resolver "sin mucho estudio de aritmética y geometría" y que la voluntad de Apolo era que los atenienses "se dieran al estudio de la matemáticas". En realidad este problema de la duplicación del cubo, junto con otros dos problemas clásicos (el de la trisección del ángulo y el de la cuadratura del círculo) quedó como problema abierto hasta el siglo XIX en que se demostró que no tenía solución (los matemáticos denominan *problema abierto* a aquél que nadie sabe resolver).

Expliquemos por qué la duplicación del cubo era para los griegos un problema abierto. Bajo la óptica actual cualquier alumno de bachillerato daría de él una solución correcta. Diría un tal alumno: Si se designa por a la arista del altar cúbico de Apolo, su volumen será $V = a^3$. Si la arista del altar que buscamos es x, el volumen del cubo de arista x debe igualarse a $2V$. Por tanto $x^3 = 2V = 2a^3$. De donde $x = \sqrt[3]{2}a$ ¿Por qué esta solución completamente correcta y elemental no era considerada "solución" por los griegos? Ellos consideraban que una figura geométrica era efectivamente construible de manera *exacta* cuando existía algún procedimiento que la permitiera construir utilizando solamente la regla y el compás. La pregunta que ellos se hacían podría resumirse así: ¿Existe algún procedimiento geométrico que utilizando solamente regla y compás permita construir la longitud x a partir de la longitud conocida a?

Esta pregunta no se resolvió hasta el siglo XIX en que la teoría del matemático Évariste Galois (1811-1832) permitió contestar la pregunta anterior en sentido negativo. Es decir: nadie podrá inventar nunca un procedimiento geométrico que utilizando sólo la regla y el compás permita construir $\sqrt[3]{2}a$ a partir de a. Digamos aquí que Galois murió a los 21 años después de batirse en duelo con un desconocido, y que su trabajo sobre la resolución por radicales de las ecuaciones algebraicas –trabajo que escribió la noche anterior al duelo y que entregó a un amigo– revolucionó el álgebra.

Volvamos a nuestro libro de relojes de sol. Su autor tuvo el acierto de empezar el prólogo del mismo con la descripción de este problema de la duplicación del cubo, que fue durante dos milenios un *problema abierto*. Los matemáticos profesionales, en tanto que investigadores, se enfrentan a diario con problemas que nadie antes ha resuelto, y en la mayoría de casos no consiguen más que dar de ellos soluciones parciales. No existe pues mejor manera de presentar a un público no matemático la verdadera esencia de esta ciencia que la descripción de algún problema abierto, tal como hace el libro que comentamos.

El prólogo sigue con elogios a las matemáticas para atraer al estudio de las mismas al Señor D. Joan de Borja a quien va explícitamente dirigida la epístola. Después de mencionar que no hay cosa más gustosa para el entendimiento humano que una bella demostración matemática, dice que si los príncipes hubieran sido instruidos en el estudio de las matemáticas, mejor regirían sus haciendas. Finalmente acaba explicando en lenguaje del siglo XVI cómo cualquier problema serio de investigación requiere tal dedicación, que en la mayoría de casos llega a absorber por completo al investigador que se enfrenta a él. Para ello explica la muerte de Arquímedes en el sitio de Siracusa durante la segunda guerra púnica. Digamos que la ciudad de Siracusa sufrió un asedio por los romanos que duró del 214 al 212 a. C., y que Arquímedes murió a manos de un soldado romano en la toma de esta ciudad. Arquímedes había inventado numerosas máquinas de guerra para mantener alejado al enemigo durante el asedio, y dícese que estaba tan absorto con sus inventos que cuando los soldados romanos entraron en la ciudad increpó a uno de ellos que manoseaba burdamente uno de sus prototipos, lo que le costó la vida. El autor del libro describe este episodio para explicar de qué manera la ciencia puede llegar a absorber a una persona.

2. Los capítulos 1 y 2 dedicados a la geometría

El primer capítulo del libro empieza diciendo:

> *"La orden y concierto de los Mathematicos, en que mucho aventajan a los que no lo son, pide que declaremos luego al principio los nombres de las cosas que nos havemos de servir en el discurso deste tratado."*

Este afán de empezar desde el principio, por los cimientos, es una necesidad inherente a la ciencia matemática en toda su historia, puesto que si no está muy claro de donde se parte es imposible construir por lógica deductiva cualquier teoría. Sorprende agradablemente encontrar aquí enunciado de manera explícita aquello que implícitamente ha inspirado todas las obras matemáticas desde los griegos hasta la actualidad.

Los capítulos 1 y 2 están dedicados a dar los rudimentos de geometría plana imprescindibles para realizar correctamente las construcciones gráficas relativas a los relojes de sol que se describen en el resto del libro. Estos capítulos se fundamentan en el libro primero de los *Elementos*, obra en 13 volúmenes escrita por Euclides a principios del siglo III a. C. y que durante dos milenios ha constituido el principal referente de la geometría clásica. Esta obra era ampliamente conocida en el siglo XVI por cualquier iniciado en la ciencia matemática y el autor de nuestro libro se refiere constantemente a ella citando las proposiciones concretas de la misma que en cada caso está utilizando.

En estos dos capítulos se enseña, por ejemplo, cómo trazar perpendiculares a una recta dada con regla y compás, cómo hallar el punto medio de un segmento, cómo construir la bisectriz de un ángulo, etc. Luego se dedican unas páginas a enseñar cómo se miden los ángulos. Aquí el autor intenta describir cómo dividir una circunferencia en 360 partes iguales con el objeto de enseñar a construir lo que hoy llamaríamos un transportador de ángulos. Pero aquí el lector se encuentra con una dificultad que vamos a explicar a continuación. El libro describe primero cómo dividir una circunferencia en 6 partes iguales (de 60 grados), luego cómo dividir cada una de estas partes en 2 (de 30 grados). Dice luego que hay que dividir cada una de estas partes en 3 (de 10 grados), pero no dice cómo. A continuación dice que hay que dividir cada una de las partes en 2 (de 5 grados), cosa que ya ha enseñado a hacer previamente, y finalmente cada parte en 5 (de 1 grado), sin explicar tampoco cómo. Parece haber aquí una incongruencia: mientras el libro pretende enseñar desde el principio cómo hacer todas las construcciones geométricas necesarias, se omiten ahora dos construcciones esenciales. El lector se queda sin saber, por ejemplo, cómo debe partir en tres partes iguales un ángulo de 30 grados para obtener tres de 10.

No hay que culpar al autor del libro por esta carencia puesto que en aquella época no se conocía método alguno para realizar con la sola ayuda de la regla y el compás dicha construcción. Y en la actualidad, tampoco. De hecho esta construcción es imposible. El matemático Carl Friedrich Gauss, en su obra *Disquisitiones arithmeticae* publicada en 1801 obtiene un resultado que implica como caso particular que es imposible dividir con regla y compás una circunferencia en 36 partes iguales (de 10 grados), y que también es imposible dividirla en 360 partes iguales con regla y compás. De manera que nunca nadie podrá inventarse el procedimiento geométrico que el autor de nuestro libro omite.

3. El capítulo 3 dedicado a astronomía

Este capítulo describe los conocimientos astronómicos necesarios para la comprensión del resto del libro. Los conocimientos astronómicos imperantes en el siglo XVI estaban basados esencialmente en la concepción del universo que se había ido forjando en la Grecia clásica desde Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.) hasta Aristóteles (384-322 a.C.) y que había sido perfeccionada luego por Ptolomeo de Alejandría en el siglo II de nuestra era. Aunque Copérnico (1473-1543) había revolucionado esta concepción, sus ideas, que se creían contrarias a la doctrina cristiana establecida en la Biblia, permanecían recluidas a círculos muy restringidos.

Para que el lector actual no versado en astronomía entienda esta concepción aristotélica del universo, empezaremos describiendo qué es lo que ve un observador cuando sale por la noche a contemplar el firmamento. Si uno observa el cielo por la noche durante algunas horas, advertirá que las estrellas se mueven, y que su movimiento se comporta como si todas ellas estuvieran pegadas a una gran esfera de cristal de radio muy grande en cuyo centro está el observador, y dicha esfera girara alrededor de un eje imaginario que une el observador con un punto de la misma llamado *polo norte celeste*, muy próximo a la estrella polar. Dicha estrella polar describe durante la noche un círculo pequeñísimo en torno al polo norte celeste. De hecho parece que la estrella polar no se mueva durante la noche.

En la figura 1 se representa dicha esfera con su eje de rotación (inclinado). Los paralelos de dicha esfera que se aprecian en el dibujo corresponden a trayectorias de estrellas en su movimiento aparente. El observador se supone situado en el centro de dicha esfera. El plano horizontal de dicho observador se representa también en la figura.

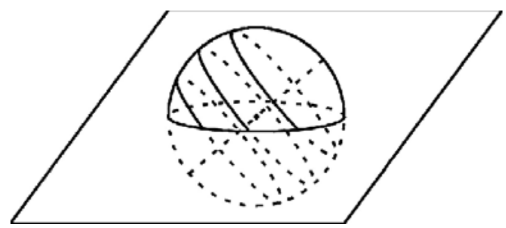


Figura 1

Durante el corto espacio de tiempo de la vida de una persona todas las estrellas (salvo pequeños cambios inapreciables a simple vista) conservan sus posiciones relativas, de manera que efectivamente parecen pegadas a una esfera. Los griegos creyeron firmemente que la misma existía realmente, y la denominaron *esfera de las estrellas fijas*. Ahora bien, el sol, la luna y los planetas cambian visiblemente de posición respecto de las estrellas fijas (la palabra planeta viene de una palabra griega que significa *errante*, porque dichos astros erraban por el cielo). Por esta razón los griegos consideraban que ni el sol, ni la luna ni los planetas estaban pegados a la *esfera de las estrellas fijas*. Pero como, sin embargo, estos astros cada día aparentaban girar en torno a nosotros como el resto de estrellas pero a una velocidad diferente (ligerísimamente menor), pensaron que cada uno de estos astros estaba pegado a una esfera diferente que giraba con movimiento propio. Así pues en la concepción aristotélica del universo la Tierra estaba inmóvil en el centro del mismo. Luego había siete esferas concéntricas, una para cada uno de los cinco planetas que se conocían entonces, otra para la luna y otra para el sol. Finalmente había una octava esfera que era la de las estrellas fijas que antes hemos descrito. Más allá de esta octava esfera estaba Dios. Todas estas esferas giraban en torno a un eje común denominado *eje del mundo* (un eje que pasaba por los polos norte y sur terrestres y que se prolongaba por los dos lados, atravesaba las siete esferas concéntricas del sol, la luna y los planetas, y llegaba hasta la octava esfera de las estrellas fijas).

Aunque hoy todo el mundo sabe que las esferas aristotélicas no existen en realidad, la esfera de las estrellas fijas (la octava de Aristóteles) sigue siendo utilizada por los astrónomos actuales para cualquier problema relacionado con la astronomía de posición (determinación de la posición dónde nosotros vemos los astros). Vamos a tratar de explicar por qué. La Tierra gira alrededor de su eje en el movimiento de rotación y también gira alrededor del Sol en el movimiento de traslación. El eje de rotación de la Tierra se mantiene paralelo a sí mismo cuando ésta se desplaza alrededor del Sol. La estrella polar es una estrella que está a más de 300 años luz de nosotros (es decir, muy lejos). Da la casualidad de que dicha estrella se halla aproximadamente sobre la prolongación del eje de la Tierra por el norte. El hecho de que el eje de la Tierra se mantenga siempre paralelo a sí mismo durante el movimiento de traslación garantiza que durante todo el año hallaremos la estrella polar aproximadamente en la prolongación por el norte del eje de la Tierra (puesto que rectas paralelas se cortan en un punto del infinito y la estrella polar, por estar muy lejos, es como si se hallara en el infinito). Ello justifica que veamos durante todo el año que el movimiento aparente de rotación de la esfera celeste se produce en torno a un eje que pasa aproximadamente por la estrella polar. Si sólo estamos interesados en el movimiento relativo de las estrellas respecto de nosotros ¿qué más da considerar que la Tierra se mueve y ellas están quietas o viceversa? El movimiento relativo es el mismo. Cuando se adopta el punto de vista antiguo según el cual la Tierra está fija y la esfera celeste se mueve, el radio de ésta debe considerarse muy grande. Dos observadores cualesquiera de la Tierra ven una misma estrella en la misma dirección, puesto que las rectas que unen estos dos observadores con la estrella son prácticamente paralelas (se cortan en la estrella que es un punto del infinito). Como el radio de la esfera celeste es muy grande en comparación con el de la Tierra, un observador situado en cualquier lugar de la Tierra puede considerarse situado en el centro de la esfera celeste. El ángulo que forma el eje de la esfera celeste (eje del mundo) con el plano horizontal de un observador coincide con la latitud geográfica de dicho observador, como queda patente en el dibujo de la figura 2. La circunferencia de dicha figura representa la Tierra. En un punto P de la Tierra se considera el ángulo que forma la paralela por P al eje de rotación, con el plano horizontal del observador situado en P. Dicho ángulo, tal como queda patente en la figura, coincide con la latitud geográfica del observador puesto que ángulos de lados perpendiculares son iguales.

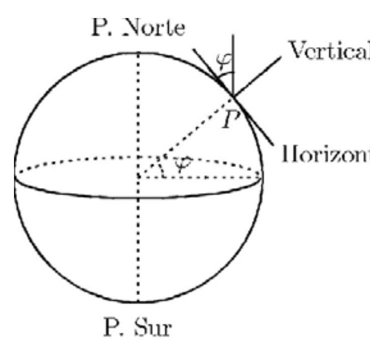


Figura 2

Aunque la estrella polar no se halla exactamente en el polo norte celeste ya hemos dicho que está muy cerca de él y a efectos prácticos consideraremos que lo está. Entonces la latitud de un observador no es más que la altura sobre el horizonte a la que el observador ve dicha estrella. Por esta razón en el siglo XVI la latitud era denominada *altura del norte*.

En el principio del capítulo 3 del libro que presentamos, el autor describe un método extremadamente sencillo par medir lo que él llama "redondez de la Tierra" (o longitud del meridiano terrestre). Dicho método se fundamenta en el concepto de latitud interpretado como *altura del norte*. Dice el autor que "los matemáticos, con muchas y curiosas observaciones tienen averiguado que caminando derechísimamente a uno de los polos de dieciocho en dieciocho leguas" la altura del norte varía en un grado. Así pues, si 1 grado de variación de la latitud (altura del norte) corresponde a 18 leguas, 360 grados corresponderán a 6.480 leguas. Éste será pues el valor de la longitud del meridiano terrestre. Renunciamos a dar la equivalencia actual de esta longitud por la dificultad de saber qué tipo de leguas utilizaba el autor (la legua castellana equivalía a 5.572 metros, pero había muchos otros tipos de leguas). Lo que sí queremos resaltar es la corrección y sencillez del método.

4. Los capítulos dedicados al arte de construcción de relojes de sol

Como ya hemos dicho, el libro está destinado esencialmente a enseñar con detalle el arte de construcción de relojes de sol precisos. A ello están dedicados la mayor parte de capítulos, del 4 al 28. Su autor explica minuciosamente en ellos todos los pormenores que intervienen en la correcta construcción de dichos relojes, pero en ningún caso se preocupa de que el lector comprenda el funcionamiento de los mismos. Un lector actual que ya conozca los principios sobre los que se fundamenta el funcionamiento de cualquier reloj de sol quedará fascinado por el rigor y precisión de todas las técnicas que el libro describe, pero un posible lector sin dichos conocimientos verá sin duda estos capítulos del libro como una colección de recetas incomprensibles. Para subsanar esa carencia dedicaremos el siguiente apartado de este estudio introductorio a explicar brevemente, desde un punto de vista actual, los principios básicos de diseño de relojes de sol. Sin embargo, antes de emprender esta tarea quisiéramos comentar ahora dos aspectos del libro que no necesitan ningún conocimiento previo: el grado de precisión de las numerosas tablas que contiene y la descripción que se hace en el capítulo 4 del trazado de la línea meridiana.

Para dar una idea de la precisión de las diferentes tablas del libro, vamos a examinar aquí con detalle dos de ellas, a modo de ejemplo: la del capítulo 6 correspondiente a las alturas del norte (latitudes) de varias ciudades de España, y la del capítulo 7 que da los ángulos de separación entre las líneas horarias de un reloj de sol horizontal en función de la latitud del emplazamiento del mismo.

Por lo que se refiere a las latitudes de las principales ciudades de España que se dan en las páginas 35, 36 y 37 del libro, es imposible comparar de manera muy precisa los datos allí contenidos con los obtenidos en la actualidad, por la sencilla razón de que el libro no especifica el lugar exacto de cada ciudad al que se refiere la latitud que allí se consigna. Sin embargo, para dar una idea del grado de precisión de las mediciones recogidas en el libro, damos a continuación una tabla de latitudes en la que se especifica para cada ciudad el valor asignado por el libro, el valor correspondiente a una medición actual y el lugar exacto al que se refiere la medición actual.

Ciudad	**Latitud del libro**	**Latitud Actual**	**Lugar de medición**
Albacete	390^{0} 6’	$380^{0}59,7'$	Torre iglesia San Juan
Alicante	$380^{0}25'$	$380^{0}20,7'$	Torre iglesia San Nicolás
Almería	$360^{0}41'$	$360^{0}50,3'$	Torre catedral
Ávila	$400^{0}45'$	$400^{0}39,4'$	Torre catedral
Barcelona	$410^{0}50'$	$410^{0}23,1'$	Torre catedral
Bilbao	$430^{0}40'$	$430^{0}15,4'$	Torre catedral
Burgos	$420^{0}40'$	$420^{0}20,4'$	Torre norte catedral
Cáceres	$390^{0}12'$	$390^{0}28,4'$	Torre iglesia San Mateo
Cádiz	$360^{0}21'$	$360^{0}31,9'$	Torre de Tavira
Castellón	$400^{0}10'$	$390^{0}50,2'$	Torre de Sta. María
Ciudad Real	$390^{0}0'$	$380^{0}59,2'$	Torre catedral
Coruña	$430^{0}35'$	$430^{0}22,2'$	Torre iglesia Sto. Domingo
Cuenca	$400^{0}8'$	$400^{0}4,6'$	Torre Mangana
Girona	$420^{0}25'$	$410^{0}59,2'$	Torre catedral
Granada	$370^{0}2'$	$370^{0}10,6'$	Torre catedral
Guadalajara	$400^{0}45'$	$400^{0}38,1'$	Torre Sta. María la Mayor, catedral
Huesca	$420^{0}29'$	$420^{0}8,4'$	Torre catedral
Jaén	$370^{0}51'$	$370^{0}45,9'$	Torre catedral
León	$420^{0}42'$	$420^{0}36'$	Torre alta catedral
Lleida	$420^{0}4'$	$410^{0}37,1'$	Torre de la Seu vella
Logroño	$420^{0}40'$	$420^{0}28'$	Torre Sta. María la Redonda, catedral
Lugo	$430^{0}20'$	$430^{0}0,6'$	Torre vieja, catedral
Madrid	$400^{0}30'$	$400^{0}24,5'$	Observatorio astronómico
Málaga	$360^{0}27'$	$360^{0}43,2'$	Torre catedral
Murcia	$370^{0}58'$	$370^{0}59,1'$	Torre catedral
Oviedo	$420^{0}40'$	$430^{0}21,7'$	Torre catedral
Palencia	$420^{0}15'$	$420^{0}0,5'$	Torre iglesia San Miguel
Palma de Mallorca	$390^{0}7'$	$390^{0}34,5'$	Baluarte Sta. Margarita
Pamplona	$430^{0}9'$	$420^{0}49,4'$	Torre norte catedral
Salamanca	$410^{0}12'$	$400^{0}57,6'$	Torre catedral
Segovia	$410^{0}3'$	$400^{0}57'$	Torre catedral
Sevilla	$370^{0}40'$	$370^{0}23,2'$	Torre Giralda
Soria	$420^{0}2'$	$410^{0}46,1'$	Señal geodésica Paseo Mirón
Tarragona	$410^{0}30'$	$410^{0}7,2'$	Torre catedral
Teruel	$400^{0}44'$	$400^{0}20,7'$	Torre iglesia San Martín
Toledo	$390^{0}55'$	$390^{0}51,4'$	Torre catedral
Valencia	$390^{0}30'$	$390^{0}28,5'$	Torre El Miguelet
Valladolid	$410^{0}50'$	$410^{0}39,1'$	Torre catedral
Vitoria	$430^{0}0'$	$420^{0}51'$	Torre catedral
Zamora	$420^{0}20'$	$410^{0}29,9'$	Torre catedral
Zaragoza	$410^{0}52'$	$410^{0}39,4'$	Torre del Pilar

Una simple ojeada a los datos anteriores permite constatar que en el siglo XVI medían las latitudes con bastante precisión. Para calibrar en su justo punto las discrepancias de la tabla anterior, sobre todo si se tiene presente que en las mediciones del siglo XVI no se conoce el lugar exacto al que se refieren, conviene saber que 1 minuto de arco de diferencia entre dos latitudes equivale aproximadamente a 1.850 metros de diferencia en la dirección de un meridiano.

Vamos a examinar ahora detenidamente la tabla de la página 38 del libro, que da los ángulos que deben formar con la línea de las 12 las distintas líneas horarias de un reloj de sol horizontal. Daremos a continuación algunos de los datos allí recogidos junto con los valores precisos de los mismos, calculados por métodos actuales. En la primera columna de la siguiente tabla se expresan las latitudes del emplazamiento del reloj de sol horizontal. En las columnas segunda y tercera se expresan los ángulos que deben formar con la línea de las 12 las líneas horarias de las 11 y de la 1 según los valores que da el libro (columna segunda) y según los valores calculados por métodos actuales (columna tercera). Las columnas cuarta y quinta facilitan datos análogos para las líneas horarias de las 10 y las 2. Las columnas sexta y séptima se refieren a las líneas horarias de las 9 y las 3.

Latitud	**11 y 1 libro**	**11 y 1 actual**	**10 y 2 libro**	**10 y 2 actual**	**9 y 3 libro**	**9 y 3 actual**
35^0	$8^0 43'$	$8^0 44,2'$	$18^0 18'$	$18^0 19,4'$	$29^0 49'$	$29^0 50,3'$
36^0	$8^0 57'$	$8^0 57,0'$	$18^0 46'$	$18^0 44,7'$	$30^0 26'$	$30^0 26,8'$
37^0	$9^0 10'$	$9^0 9,6'$	$19^0 9'$	$19^0 9,6'$	$31^0 2'$	$31^0 2,4'$
38^0	$9^0 22'$	$9^0 22,0'$	$19^0 34'$	$19^0 34,1'$	$31^0 37'$	$31^0 37,1'$
39^0	$9^0 33'$	$9^0 34,3'$	$19^0 58'$	$19^0 58,1'$	$32^0 11'$	$32^0 11,0'$
40^0	$9^0 45'$	$9^0 46,3'$	$20^0 21'$	$20^0 21,6'$	$32^0 44'$	$32^0 43,9'$
41^0	$9^0 57'$	$9^0 58,2'$	$20^0 44'$	$20^0 44,7'$	$33^0 16'$	$33^0 16,0'$
42^0	$10^0 10'$	$10^0 9,9'$	$21^0 7'$	$21^0 7,4'$	$33^0 46'$	$33^0 47,3'$
43^0	$10^0 22'$	$10^0 21,4'$	$21^0 29'$	$21^0 29,5'$	$34^0 18'$	$34^0 17,6'$
44^0	$10^0 32'$	$10^0 32,6'$	$21^0 51'$	$21^0 51,2'$	$34^0 47'$	$34^0 47,1'$

La tabla muestra que entre los valores calculados en el siglo XVI y los correspondientes valores calculados por métodos actuales no se aprecian discrepancias superiores al minuto de arco. Debe decirse que en el cálculo de dichos valores aparece una expresión que contiene un arco tangente del producto de un seno por una tangente. En vista de esto uno puede preguntarse ¿Cómo calculaban en el siglo XVI estas expresiones trigonométricas si todavía no se habían inventado los desarrollos en serie que se utilizan en la actualidad para el cálculo de cualquier razón trigonométrica? La respuesta es sencilla. Ptolomeo de Alejandría había descubierto ya en el siglo II unas fórmulas equivalentes a las que hoy nos dan el seno y el coseno de la suma de ángulos. Con estas fórmulas, a partir del seno y el coseno de ángulos conocidos (como los de $30^0, 60^0, 72^0$), el mismo Ptolomeo había construido unas tablas trigonométricas. Así pues, desde el siglo II se podían hacer cálculos bastante precisos que involucrasen expresiones trigonométricas.

Acabaremos este apartado con un breve comentario al capítulo 4. Para construir cualquier reloj de sol se precisa siempre saber trazar con precisión el meridiano terrestre que pasa por un punto determinado (la línea norte-sur). Para ello el autor del libro describe un método muy elemental y bastante preciso que se basa en el hecho de que la sombra sobre el suelo de un palo vertical apunta siempre hacia el norte en el momento en que dicha sombra es lo más corta posible. Para trazar la dirección de dicha sombra en el preciso momento en que ésta es más corta, el libro describe un método cuya lectura recomendamos vivamente.

5. Principios básicos de funcionamiento de un reloj de sol

Para comprender cómo funciona un reloj de sol debemos entender primero cuál es el movimiento aparente del sol en la esfera celeste.

El sol, a lo largo de un año, se va moviendo por la esfera celeste y describe un círculo máximo de la misma (denominado *eclíptica*) que forma con el ecuador celeste un ángulo de $23^0 27'$ aproximadamente. La figura 3 representa la esfera celeste con el ecuador celeste y la eclíptica.

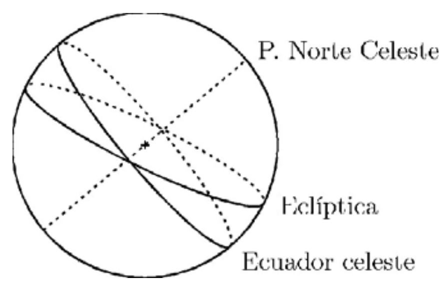


Figura 3

Cuando el sol se halla en los dos puntos de intersección de la eclíptica con el ecuador celeste se producen los equinoccios. En la figura 3 hemos representado la esfera celeste fija (sin moverse). Pero si imaginamos que dicha esfera da una vuelta cada día alrededor de su eje, el sol irá describiendo cada día paralelos diferentes. Esto es lo que hemos representado en la figura 4. En los equinoccios, como el sol se halla sobre el ecuador celeste (figura 3), cuando gire durante el día describirá el ecuador celeste de la figura 4. Cada uno de los paralelos correspondientes a los solsticios está separado del ecuador celeste por un ángulo aproximado de $23^0 27'$.

Cuando el sol se halla por encima del plano horizontal del observador (figura 4) es de día y cuando se halla por debajo es de noche. En la figura 4 se observa que en los equinoccios (en los que la trayectoria del sol coincide con el ecuador celeste) la duración del día es igual a la de la noche porque el plano horizon-

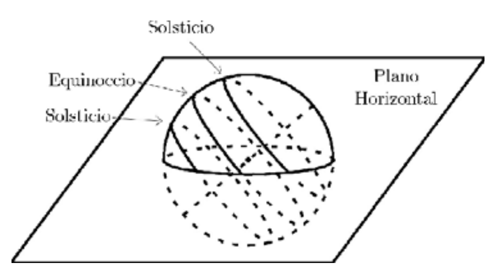


Figura 4

tal divide al ecuador celeste en dos semicircunferencias de la misma longitud. Recuérdese que en la figura 4 el ángulo que forma el eje de rotación de la esfera celeste con el plano horizontal coincide con la latitud del observador. Si uno se imagina el mismo dibujo para un observador en el Polo Norte (donde la latitud es de 90^0) verá que allí en los equinoccios el sol se halla en el plano horizontal y que durante medio año el sol está por encima de dicho plano horizontal (día) y durante otro medio año está por debajo (noche). También uno puede imaginarse el dibujo de la figura 4 para un observador situado en el ecuador (donde la latitud es de 0^0) y verá que allí el día dura igual que la noche en cualquier época del año.

El reloj de sol más sencillo que podemos imaginar es el llamado cuadrante ecuatorial (en el libro que comentamos es llamado reloj equinoccial y está descrito en los capítulos 22 y 23). Consiste en una varilla (o gnomon) paralela al eje de rotación de la esfera celeste que proyecta su sombra sobre un plano perpendicular a dicha varilla (paralelo, por tanto, al plano del ecuador) en el cual están marcadas las líneas de las horas, tal como indica la figura 5.

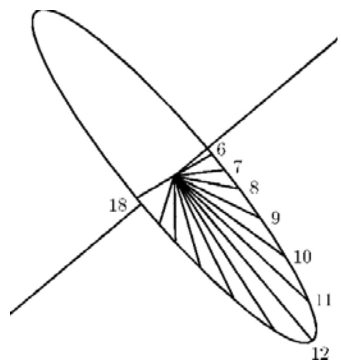


Figura 5

Puesto que la trayectoria aparente del sol durante un día cualquiera está en un plano perpendicular al gnomon y paralelo, por tanto, al plano del reloj donde se marcan las líneas de las horas, dichas líneas deberán estar separadas por intervalos angulares iguales de 15^0, puesto que si el sol describe en un día un paralelo completo de la esfera celeste (360^0), cada hora recorrerá 15^0 de dicho paralelo.

Como el sol en la esfera celeste está medio año por encima del ecuador y medio año por debajo, y como el plano del reloj es el plano del ecuador celeste, durante medio año la sombra del gnomon se producirá en una cara del plano del reloj (por encima) y durante el otro medio año se producirá en la otra cara (por debajo). En los dos equinoccios, como el sol se halla en el mismo plano del reloj (plano ecuatorial), el gnomon no hará sombra sobre dicho plano y el reloj no funcionará.

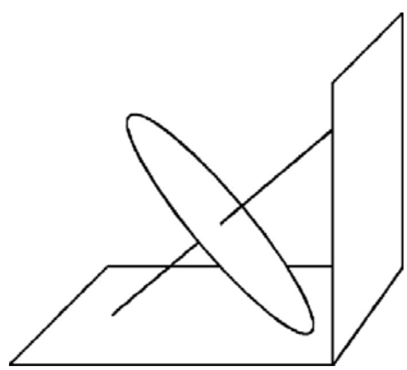


Figura 6

Vamos a explicar ahora los relojes de sol de pared y los horizontales. Imaginemos ahora que el gnomon del reloj de sol ecuatorial anterior está clavado en una pared vertical o en el suelo (en la figura 6 el gnomon del reloj de sol ecuatorial se supone clavado en una pared vertical y también en el suelo). Si queremos marcar la sombra del gnomon sobre la pared en las distintas horas del día (las 6, las 7, etc.) no tendremos más que considerar las intersecciones con la pared de los distintos planos determinados por el gnomon y las líneas horarias correspondientes del reloj de sol ecuatorial. Por ejemplo, si consideramos la intersección de la pared con la línea horaria de las 10 del reloj de sol ecuatorial, tendremos la línea horaria de las 10 para el reloj de pared. Si consideramos la intersección con el suelo de dicho plano, tendremos entonces la línea horaria de las 10 para el reloj horizontal.

6. La hora que marcan los relojes de sol

En el apartado anterior hemos introducido los conocimientos necesarios para que cualquier lector pueda leer y entender sin dificultad el libro objeto de este estudio introductorio, pero quizá para acabar habríamos de dedicar también unas líneas a explicar con detalle que la hora que marcan los relojes de sol tradicionales no coincide en general con la de los relojes mecánicos o digitales actuales.

Los relojes de sol tradicionales marcan el tiempo solar verdadero local. Para explicar qué es esto imaginemos una observadora de nombre Marta situada en un lugar concreto. Por ejemplo, en la Universidad Autónoma de Barcelona ubicada en Bellaterra, a unos 20 Km. de Barcelona. Son las 12 del mediodía del tiempo solar verdadero de Marta cuando el sol pasa por encima del meridiano de su universidad. Al día siguiente, cuando el sol vuelve a pasar por encima del mismo meridiano, vuelven a ser las 12 del mediodía. Este intervalo de tiempo (entre los dos pasos consecutivos del sol por el mismo meridiano) se denomina día solar verdadero, el cual se divide en 24 partes iguales que son horas de tiempo solar verdadero. Dicho tiempo no es uniforme. Ello significa que el tiempo que invierte el sol entre dos pasos consecutivos por el mismo meridiano no es siempre el mismo. Depende de la época del año.

Cuando a finales del siglo XVII se perfeccionaron los relojes de péndulo como consecuencia de una aportación muy importante debida al matemático Christiaan Huygens se empezó a poner de manifiesto este hecho por la discrepancia que había entre los relojes mecánicos (que marcaban un tiempo uniforme) y los relojes de sol. Para remediar esta situación se inventó lo que se llama tiempo solar medio. Un día solar medio es una entelequia ideada por el hombre para remediar la reprobable falta de puntualidad del sol, y viene a ser una especie de promedio a lo largo de todo un año de la duración de los días solares verdaderos. Todos los relojes mecánicos o digitales que utilizamos en la actualidad marcan el tiempo solar medio y por esta razón su hora difiere de la hora señalada por los relojes de sol. La diferencia entre ambos tiempos (el medio y el verdadero) depende del día del año y puede llegar a ser del orden de un cuarto de hora.

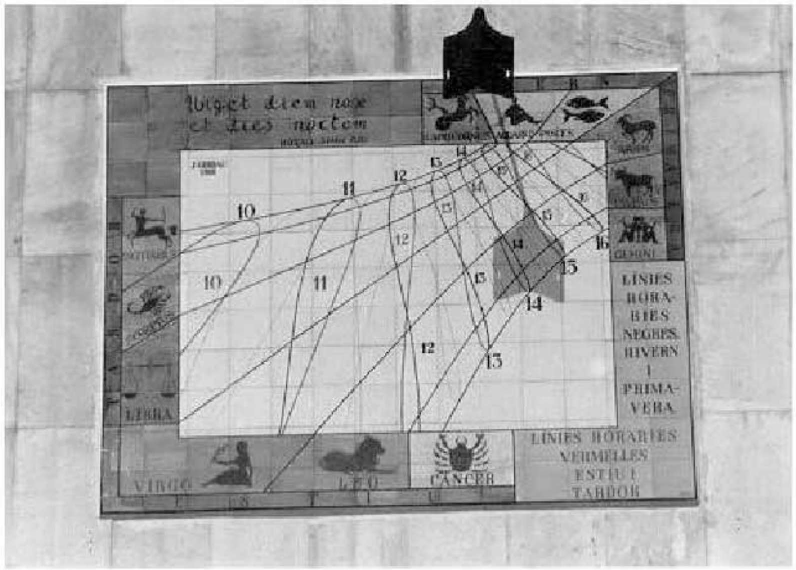
Aparte de lo que acabamos de explicar, existe otra causa que influye también en las diferencias de tiempo que marcan unos y otros relojes: los relojes de sol tradicionales acostumbran a marcar el tiempo local que está referido al meridiano del observador, en cambio el tiempo de los relojes mecánicos está referido al meridiano de Greenwich.

Para que se comprendan bien todas estas diferencias, podremos un ejemplo. Imaginemos que el día 1 de noviembre de un cierto año nuestra observadora Marta situada en Bellaterra mira la hora de un reloj de sol, y constata que según aquel reloj son las 11 en punto de la mañana. Imaginemos que dicho reloj (como la mayoría de ellos) está graduado para marcar la hora de tiempo solar verdadero local. ¿Qué hora marcará en aquel momento el reloj de pulsera de Marta? La longitud geográfica de Bellaterra es de $2^0 6' 24''$ este. En cualquier tabla que dé las diferencias entre tiempo solar medio y tiempo solar verdadero a lo largo del año encontraremos que aquel día el sol pasa por el meridiano de Greenwich a las 11 horas y 44 minutos de tiempo solar medio de Greenwich (es decir, pasa por dicho meridiano 16 minutos antes de las 12). Como Bellaterra está al este del meridiano mencionado, el sol pasa antes por Bellaterra que por Greenwich. ¿Cuánto antes? Pues si el sol recorre 360^0 en 24 horas, una simple regla de tres muestra que para recorrer $2^0 6' 24''$ tardará aproximadamente 8 minutos y 25 segundos. Para hacer más sencillo el cálculo despreciaremos los 25 segundos y supondremos que tarda sólo 8 minutos. Por tanto aquel día el sol pasa por el meridiano de Bellaterra 24 minutos antes de las 12 de Greenwich ($16 + 8 = 24$). Así pues aquel día el reloj de sol que contempla Marta irá 24 minutos adelantado. Por tanto, cuando el reloj de sol marque las 11, serán en realidad las 10 horas y 36 minutos de tiempo solar medio de Greenwich. Pero como además la hora oficial en aquella época va una hora avanzada respecto del tiempo solar medio de Greenwich, en realidad serán las 11 horas y 36 minutos del reloj de pulsera de Marta.

Todos estos problemas no los tenían en el siglo XVI. Ya hemos dicho que el tiempo solar medio empezó a considerarse a finales del XVII por la discrepancia entre los relojes de péndulo y los de sol. Por lo que se refiere a la elección del meridiano origen para medir dicho tiempo, no fue hasta el 1 de enero de 1901 que en España se ajustó (por disposición del Gobierno) la hora oficial al tiempo medio de Greenwich.

Uno puede preguntarse si un reloj de sol puede marcar directamente el tiempo solar medio de Greenwich, que es el único tiempo que interesa al gran público. La respuesta es que un reloj de sol tradicional, no. Se entiende por reloj de sol tradicional una varilla (llamada gnomon) clavada en una pared o en el suelo cuya sombra señala las horas al coincidir con unas señales de forma rectilínea dibujadas en dicha pared o en el suelo.

Ahora bien, existen otros relojes de sol (como el que muestra la fotografía) que sí pueden marcar directamente el tiempo solar medio. En ellos las líneas rectas que en los relojes de sol tradicionales señalan las horas se substituyen por líneas curvas en forma de ocho, y lo que marca la hora en lugar de ser la sombra de una varilla es la sombra de un punto. Cada curva en forma de ocho, denominada *analema*, tiene dos ramas (que pueden estar pintadas de dos colores diferentes). Una de estas ramas sirve para medio año (primavera y verano) y la otra para el otro medio año (otoño e invierno). En un reloj así son las nueve, por ejemplo, cuando la sombra del punto que substituye a la varilla está sobre la rama correspondiente del analema de las nueve. Estos relojes se denominan analemáticos.



La fotografía muestra un reloj de sol de este tipo emplazado en la Universidad Autónoma de Barcelona diseñado en 1988 por el autor de este estudio introductorio, que además de señalar la hora con muchísima precisión indica también los cambios de estación y de signo del zodíaco. En la parte superior del mismo hay una pieza metálica. La sombra de un punto concreto de la misma (el punto en que se cortan los dos segmentos rectilíneos oblicuos de su borde inferior) es la que señala la hora. Las líneas de este reloj fueron copiadas del plotter de un ordenador sobre cerámica por un ceramista experto.

7. Comentarios finales

Aunque a lo largo de los apartados anteriores ya hemos analizado con detalle el contenido del libro, no deberíamos acabar este estudio introductorio sin una valoración global del mismo. Para dar un sentido preciso a la percepción que su lectura nos ha producido, empezaremos con la narración de una anécdota.

Cuentan de un determinado director de orquesta, que en un ensayo interrumpió la ejecución de una pieza para corregir la interpretación de un determinado pasaje de la misma. Se dirigió entonces a los miembros de la orquesta para explicarles cómo él creía que debían interpretar aquel fragmento. Les dijo: "Músicos: ¡Presten atención!". Algunos de los intérpretes se sintieron molestos por aquel calificativo de "músicos" que juzgaron poco respetuoso. El primer violín, haciéndose eco del sentir de sus compañeros, interpeló al director para puntualizarle que los componentes de aquella orquesta tenían todos el título de

Profesor de Música, a lo que el director replicó: "He sido poco respetuoso con ustedes al tratarles de músicos. Efectivamente, ustedes son profesores. Músicos eran Bach, Mozart, Beethoven, Schubert, Brahms, Wagner...".

Esta anécdota pone de manifiesto que el mejor elogio que puede hacerse de una persona que se dedica a la música es decirle que es músico. Con este espíritu, después de lo que hemos ido viendo a lo largo de este estudio introductorio, se puede afirmar rotundamente que el autor de la obra que comentamos era un matemático en el sentido más pleno de dicha palabra. Este es sin duda el mejor elogio que se nos ocurre del libro y de su autor.

Joan Girbau. Departament de Matemàtiques.
Universitat Autònoma de Barcelona. 08193 Bellaterra, Barcelona.