Comentarios sobre el artículo "Perversiones y trampas de la Probabilidad" de A. Corberán y F. Montes

Reproducimos a continuación la réplica y la contrarréplica suscitadas por la publicación en La Gaceta (Vol.3.2) *del artículo* "Perversiones y trampas de la Probabilidad" *de A. Corberán y F. Montes.*

¿Un procedimiento discriminatorio?

por

Jesús Díaz-Cordovés y María Dolores Alonso

1. Introducción

En el año 1997 se celebró un sorteo para elegir a los denominados *excedentes de cupo* entre los jóvenes que debían realizar el servicio militar durante el siguiente año. Dicho sorteo tuvo gran repercusión en los medios de comunicación por la forma en que fue realizado. Se publicaron análisis y opiniones de distintos expertos en Estadística y Probabilidad y, en general, se consideró que el procedimiento seguido había vulnerado el principio de *equiprobabilidad* o, utilizando un lenguaje más habitual, el *principio de igualdad de oportunidades*. Un artículo publicado recientemente (Corberán y Montes, 2000), que recoge el contenido de unas conferencias sobre Probabilidad impartidas por los autores en la XVI edición de la Universitat d'Estiu de Gandia, expone un detallado estudio de dicho sorteo. Los autores concluyen de su estudio que el sorteo citado "tiene ya ganado un merecidísimo puesto en cualquier antología del disparate, porque a diferencia del caso americano, el sorteo estuvo mal diseñado desde el principio".

El objetivo del presente artículo es exponer un nuevo análisis del procedimiento seguido por el Ministerio de Defensa para determinar los excedentes de cupo del año 1998, análisis que conduce a conclusiones diametralmente opuestas a las sostenidas por los autores citados.

2. Procedimiento del Ministerio de Defensa

En el artículo citado se describe el procedimiento seguido por el Ministerio de Defensa por lo que vamos a recoger aquí únicamente sus principales características.

Para 1998, el número de posibles reclutas, o mozos, era de 165.342 y 16.442 de ellos habían de ser declarados excedentes de cupo. El procedimiento seguido por el Ministerio de Defensa para determinar los excedentes de cupo constaba de dos fases:

En la primera fase, se asignó a cada uno de los mozos un número entre 0 y 165.341. Según manifestó el Ministerio de Defensa, la asignación se hizo de manera aleatoria, y así se cita en varias partes de Corberán y Montes (2000).

En la segunda fase, se celebró el sorteo para determinar qué números quedaban excedentes. Utilizando seis bombos con bolas numeradas se obtuvo un número N comprendido en el rango de valores considerado ($0 \leq N \leq 165.341$) y los mozos cuyos números asignados en la primera fase eran N o alguno de los 16.441 números siguientes fueron declarados excedentes de cupo, quedando entendido que la lista de esos 165.342 números tenía un carácter circular.

Toda la polémica generada se centró en el sorteo de esta segunda fase pues la forma elegida para extraer las bolas de los bombos originaba que los 165.342 números no fuesen equiprobables tal como recoge el detallado análisis de Corberán y Montes (2000).

3. Un modelo sencillo

Vamos a describir un modelo teórico sencillo que podría haberse utilizado para determinar los excedentes de cupo. El Ministerio de Defensa podría haber alquilado un gran recinto que pudiera albergar a los 165.342 mozos. Los mozos serían convocados en una cierta fecha y a una cierta hora en dicho recinto. Al llegar al recinto, cada mozo recibiría una cartulina con un número entre 0 y 165.341, número que sería único (ningún otro mozo recibiría el mismo número). En el recinto se habría dispuesto un gran bombo conteniendo 165.342 bolas numeradas del 0 al 165.341. Se daría vueltas al bombo y se procedería a extraer una bola que tendría un número N. El mozo con ese número y los mozos con los 16.441 números siguientes serían declarados excedentes.

La probabilidad de que un mozo cualquiera sea declarado excedente se obtiene aplicando la regla de Laplace pues es evidente que todos los números son equiprobables:

$$P(\text{Excedente}) = \frac{16.442}{165.342} \tag{1}$$

Este sencillo modelo teórico garantiza la igualdad de oportunidades entre todos los mozos pues la probabilidad de ser declarado excedente de cupo es la misma para todos ellos. La conveniencia de llevar a la práctica este procedimiento es ya otra cuestión pues su realización probablemente hubiese generado más protestas, y seguro que más gastos, que el polémico sorteo considerado.

4. Análisis del procedimiento utilizado por el Ministerio de Defensa

4.1. Análisis del sorteo

En el detallado análisis del sorteo que se celebró en la realidad, llevado a cabo por Corberán y Montes (2000), se introducen una serie de notaciones y conceptos y se obtienen unos resultados que vamos a recoger aquí para una mayor claridad de nuestro posterior análisis.

Definen los siguientes conjuntos de números enteros:

$$\begin{aligned} I_1 &= \{0 \text{ al } 99.999\} \\ I_2 &= \{100.000 \text{ al } 159.999\} \\ I_3 &= \{160.000 \text{ al } 164.999\} \\ I_4 &= \{165.000 \text{ al } 165.299\} \\ I_5 &= \{165.300 \text{ al } 165.339\} \\ I_6 &= \{165.340 \text{ al } 165.341\} \end{aligned}$$

Estos seis conjuntos constituyen una partición del conjunto I formado por los 165.342 números asignados a los mozos.

Designan por A_n al suceso, "el número n es declarado excedente de cupo", y designan por J_n al subconjunto de I siguiente

$$J_n = \begin{cases} \{n - (16.441) \ \text{ al } \ n\}, & \text{si } 16.441 \leq n \\ \\ \{165.342 - (16.441 - n) \ \text{ al } \ n\}, & \text{si } n < 16.441 \end{cases}$$

Designan también como J_n al suceso, "el número extraído pertenece al conjunto". Puesto que el conjunto contiene a los 16.441 números de I anteriores a n, recordando el carácter circular de la lista I a la hora de hacer el sorteo, y al propio n, los sucesos A_n y J_n son iguales. A continuación obtienen la expresión de $P(A_n) = P(J_n)$

$$P(J_n) = \sum_{k=1}^{k=6} P(J_n \cap I_k) \tag{2}$$

donde I_k, $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, designa el suceso "el número extraído pertenece al conjunto I_k". Estos seis sucesos I_k son incompatibles entre sí y, como la unión de los seis conjuntos I_k es I, la unión de los correspondientes seis sucesos es el suceso seguro por lo que $\sum_{k=1}^{k=6} P(I_k) = 1$. La ecuación (2) es una simple aplicación del teorema de la probabilidad total. La Tabla 9 de Corberán y

Montes (2000) recoge los valores de $P(I_k)$, el número de puntos en cada I_k, y las correspondientes probabilidades puntuales. Utilizando esos datos Corberán y Montes (2000) obtienen

$$P(J_n) = \frac{|J_n \cap I_1|}{200.000} + \frac{|J_n \cap I_2|}{140.000} + \frac{|J_n \cap I_3|}{84.000} + \frac{|J_n \cap I_4|}{33.600} + \frac{|J_n \cap I_5|}{16.800} + \frac{|J_n \cap I_6|}{3.360} \tag{3}$$

donde $|A|$ denota el cardinal del conjunto A.

A continuación, los citados autores muestran la representación gráfica de $P(A_n)$ en función de n (Figura 7 del artículo citado) y algunos de estos valores para n significativos (Tabla 10). Estos resultados muestran claramente que $P(A_n)$ no es constante sino que varía con n, de lo cual concluyen que no se respetó el principio de igualdad de oportunidades en la designación de los excedentes de cupo.

4.2. Análisis del procedimiento completo

El análisis de Corberán y Montes (2000) se centra en la segunda fase del procedimiento establecido por el Ministerio de Defensa. Pero este procedimiento tuvo una primera fase en la cual se asignaron aleatoriamente los números a los mozos. Dicha asignación no es tenida en cuenta por los autores citados en ningún momento. Pero debe ser considerada pues el procedimiento aleatorio completo para designar los excedentes de cupo comprendía las dos fases citadas. Imaginemos que a un cierto mozo X se le asignó por el Ministerio de Defensa el número 57.687, para el cual la probabilidad $P(A_n)$ era mínima. Como estamos estudiando un procedimiento aleatorio, debemos fijarnos en qué pasa si se repite una y otra vez todo el procedimiento: Al mozo X, y a cualquier otro, podría asignársele cualquiera de los 165.342 números por lo que, unas veces, recibiría números con probabilidades altas y, otras veces, recibiría números con probabilidades bajas. El suceso "el mozo X es declarado excedente de cupo", que designaremos como X, y el suceso "el número n asignado a X es declarado excedente de cupo en el sorteo de la segunda fase", o sea A_n, **no son iguales** pues a X se le asigna n de forma **aleatoria**. No es $P(A_n)$ sino $P(X)$ la probabilidad que decidirá si el procedimiento establecido por el Ministerio de Defensa respetó, o no, la igualdad de oportunidades.

Vamos a considerar el siguiente conjunto de sucesos $\{S_n\}$, con $n = 0, 1, 2, \ldots, 165.341$, donde S_n designa al suceso "al mozo X se le asigna el número n". Todos ellos son incompatibles entre sí y la unión de todos ellos es el suceso seguro. Tenemos que $X = \cup_{n=0}^{n=165.341} (X \cap S_n)$ y por tanto

$$P(X) = \sum_{n=0}^{n=165.341} P(X \cap S_n) \tag{4}$$

o bien

$$P(X) = \sum_{n=0}^{n=165.341} P(X|S_n) \cdot P(S_n) \tag{5}$$

En definitiva, hemos aplicado el teorema de la probabilidad total para obtener la expresión de $P(X)$. Ahora debemos obtener el valor de esta probabilidad.

$P(S_n)$ es la probabilidad de que al mozo X se le asigne el número n en la primera fase del procedimiento. Ni el artículo citado ni las informaciones periodísticas que entonces aparecieron describen totalmente de qué manera se hizo esa asignación pero sí coinciden en afirmar directamente que fue un proceso aleatorio y, de forma indirecta, se puede concluir que la asignación fue equiprobable pues en el apartado 7.2.3. de Corberán y Montes (2000) se hace referencia a algunos métodos alternativos al sorteo que fueron propuestos en la prensa por diversos expertos: “Se sugería también que si la asignación previa de números a mozos había sido aleatoria, bastaba con declarar excedentes de cupo a los 16.442 primeros”. Puesto que esta propuesta iba dirigida a corregir la supuesta falta de equiprobabilidad del procedimiento es evidente que era aceptado por todos que la asignación previa hecha por el Ministerio de Defensa fue equiprobable. Por tanto, sin más que aplicar la regla de Laplace, obtenemos la probabilidad

$$P(S_n) = \frac{1}{165.342}, \text{ para cada } n \in I \tag{6}$$

$P(X|S_n)$ es la probabilidad de que X sea declarado excedente cuando el número que se le asigna es n, es decir, $P(X|S_n) = P(A_n) = P(J_n)$. Luego

$$P(X) = \frac{1}{165.342} \sum_{n=0}^{n=165.341} P(A_n) \tag{7}$$

y si introducimos en (7) la expresión de $P(A_n)$ dada por (3)

$$P(X) = \frac{1}{165.342} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_1)}{200.000} + \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_2)}{140.000} + \\ + \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_3)}{84.000} + \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_4)}{33.600} + \\ + \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_5)}{16.800} + \frac{\sum_{n=0}^{n=165.341} P(J_n \cap I_6)}{3.360} \end{array} \right\} \tag{8}$$

Vamos a calcular cada uno de los seis sumatorios que aparecen en (8). Para ello introducimos el concepto de vínculo:

Definición: Consideremos dos números cualesquiera a y b pertenecientes al conjunto I. Diremos que se establece un *vínculo con principio en* a *y final en* b si se cumple que $b - a \leq 16.441$ si $a \leq b$, o $b + 165.342 - a \leq 16.441$ si $b < a$.

Es evidente que la existencia de un vínculo con principio en a y final en b equivale a que si en el sorteo sale el número a, b también es declarado excedente. La doble condición que aparece en la definición de vínculo es para tener en cuenta el carácter circular de la lista.

El número total de vínculos con principio (o con final) en un determinado número n es 16.442. Si se considera un subconjunto S de I, el número total de vínculos con principio (o con final) en los elementos de S es $16.442|S|$.

Cada conjunto se puede interpretar como el conjunto de todos los números de I para los que existe un vínculo con principio en ellos y final en n. $|J_n \cap I_k|$, con k de 1 a 6, es el número de vínculos con principio en los elementos de I_k y final en n. Cada uno de los seis sumatorios de (8) es el número total de vínculos con principio en los elementos del I_k correspondiente, y por tanto

$$\sum_{n=0}^{n=165.341} |J_n \cap I_k| = 16.442 \cdot |I_k| \tag{9}$$

Utilizando los seis valores de $|I_k|$ que muestra la Tabla 9 de Corberán y Montes (2000)

$$P(X) = \frac{16.442}{165.342}\left(\frac{1}{2} + \frac{6}{14} + \frac{5}{84} + \frac{3}{336} + \frac{4}{1.680} + \frac{1}{1.680}\right) = \frac{16.442}{165.342} \tag{10}$$

Hemos obtenido que la probabilidad de que un mozo fuese declarado excedente de cupo es la misma para todos ellos y coincide con el valor predicho por el sencillo modelo expuesto en el apartado 3. del presente trabajo.

5. Discusión y conclusiones

La conclusión inmediata de lo expuesto es que, al contrario de lo sostenido por Corberán y Montes (2000) y el resto de los trabajos y opiniones expuestos en aquella época en la prensa, el procedimiento completo seguido por el Ministerio de Defensa para determinar los mozos excedentes de cupo **sí respetó el principio de igualdad de oportunidades** pues era un procedimiento aleatorio y equiprobable. Ninguno de los mozos del año 1998 sufrió ningún tipo de fraude, perjuicio, o discriminación.

Entonces, ¿por qué esa rara unanimidad en los análisis y opiniones publicados entonces y que se ha mantenido hasta hoy en día? Es difícil determinar las causas pues desde luego no son de carácter matemático sino más bien de tipo psicológico y/o social. Sean cuales sean las causas últimas de esa unanimidad creemos que sí está clara la causa inmediata: Todos los análisis se centraron en el sorteo de la segunda fase ignorando por completo la primera, y fundamental, fase.

De hecho, lo que aseguró la aleatoriedad y equiprobabilidad de todo el proceso fue la primera fase de asignación de números a los mozos. El análisis aquí realizado lo prueba pues la probabilidad de ser declarado excedente obtenida con el procedimiento utilizado coincide con la del sencillo modelo de la sección 3. El sorteo **no desempeñó ninguna función** en la aleatoriedad del proceso sino que fue un mero sistema generador de 16.442 números. De hecho, algunas de las opiniones de expertos recogidas en la prensa de entonces, expresaban este mismo parecer de forma indirecta: aunque pueda parecer repetitivo recogemos otra vez la cita de Corberán y Montes (2000) que aparece en la sección 4.2: "Se sugería también que si la asignación previa de números a mozos había sido aleatoria, bastaba con declarar excedentes de cupo a los 16.442 primeros". Luego la aleatoriedad de la primera fase garantizaba la de todo el procedimiento. Lo extraño es que a partir de esa sugerencia no se diese el siguiente paso lógico y se sacase la conclusión aquí expuesta de la irrelevancia del sorteo en cuanto a la aleatoriedad y equiprobabilidad del procedimiento.

Se puede ilustrar más claramente aún que el sorteo no tenía importancia ninguna en cuanto a la aleatoriedad y equiprobabilidad de todo el procedimiento. Imaginemos que el procedimiento se hubiese desarrollado en las dos mismas fases pero intercambiando el orden. Primero se haría el sorteo, en las mismas condiciones en que se desarrolló, para determinar los 16.442 números cuyos poseedores serán declarados excedentes de cupo. Una vez se supiesen los números, se asignaría a cada mozo un número generado aleatoria y equiprobablemente. La distribución de valores de la probabilidad de ser declarado excedente sería idéntica a la obtenida tal como se desarrolló el procedimiento. Y es evidente que realizando el procedimiento de esta segunda forma la probabilidad de ser declarado excedente es la mostrada en (1). Esta segunda manera de realizar el procedimiento, equivalente a la manera en que se llevó a cabo realmente, muestra con gran claridad que el sorteo sirvió únicamente para generar los números que serían declarados excedentes pero ni añadió ni quitó aleatoriedad o equiprobabilidad al procedimiento pues fue la fase de asignación de números la que aseguró dicha aleatoriedad y equiprobabilidad. En última instancia, las críticas deberían haber estado encaminadas a aclarar la forma en que el Ministerio de Defensa había realizado esa primera fase esencial de asignación de números pero nadie puso nunca en cuestión que el Ministerio la hubiera efectuado correctamente, respetando la equiprobabilidad, por lo que se debe concluir, una vez más, que el Ministerio de Defensa diseñó y puso en práctica un procedimiento para determinar los excedentes de cupo que fue correcto y que garantizó la igualdad de oportunidades de todos los mozos del año considerado.

Referencias

Corberán, A.; Montes, F. (2000). *Perversiones y trampas de la Probabilidad*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, volumen 3 número 2, páginas 198-229.

Jesús Díaz-Cordovés y Mª Dolores Alonso
Departamento de Matemáticas, Instituto "Álvaro de Mendaña", Ponferrada
correo electrónico: `jdiazl@nexo.es`

Comentarios al artículo de Díaz-Cordovés y Alonso

por

A. Corberán y F. Montes

En nuestro artículo *Perversiones y trampas de la Probabilidad*, publicado en La Gaceta (Vol. 3, nº 2, pp. 198-229), estudiábamos el sorteo de los *excedentes de cupo* del año 98 y concluíamos que la equiprobabilidad exigible a un sorteo de estas características no se cumplió. Díaz-Cordovés y Alonso, en *¿Un procedimiento discriminatorio?*, opinan que nuestra conclusión no es correcta y tratan de demostrarlo. El argumento de Díaz-Cordovés y Alonso está basado, fundamentalmente, en que nosotros sólo considerábamos una parte de aquel proceso, la de la extracción del número que había de permitir la elección de los agraciados con la excedencia, ignorando que en una primera fase a cada mozo se le había asignado aleatoriamente su número. Si tuviéramos en cuenta el proceso en su conjunto, es decir las dos fases del mismo, la conclusión que se obtiene es, siempre según Díaz-Cordovés y Alonso, que el proceso sí cumplía las condiciones de *igualdad de oportunidades*.

Aunque parezca extraño, a falta de un detalle, estamos absolutamente de acuerdo con Díaz-Cordovés y Alonso. Efectivamente, si tenemos en cuenta que la asignación a cada mozo de su número para el sorteo fue realizada aleatoriamente, el proceso no hubiera conculcado la igualdad de oportunidades, *siempre que dicho número no hubiera sido previamente comunicado a los interesados*. Sin embargo, el Ministerio de Defensa, con muy buen criterio por cierto, había comunicado previamente a todos los mozos el número que se le había asignado para el sorteo. Así pues, antes de que el sorteo criticado en nuestro artículo (el de los bombos, vaya) se realizara, cada mozo tenía perfecto conocimiento del número con el que "jugaba". Entonces, si se nos permite ponernos en la piel de uno de los interesados, ¡qué importa que te hayan asignado el número 123004 de forma aleatoria o por turno de llegada! Vamos a participar en el sorteo con ese número y queremos que aquél sea *justo*; de otra manera: queremos que nuestro número tenga las mismas posibilidades de salir que el resto de números. Este es el "detalle" que hace que Díaz-Cordovés y Alonso y nosotros obtengamos conclusiones opuestas.

Expondremos la discusión anterior de un modo más formal, aunque no por ello más convincente. Para ello, recordemos que Díaz-Cordovés y Alonso llegan a la conclusión contraria a la nuestra al considerar ambas etapas del proceso tal y como explican en el apartado 4.2 de su artículo. Recurren para ello a la expresión,

$$P(X) = \sum_{n} P(X|S_n)P(S_n), \tag{1}$$

en la que n se extiende sobre el número total de mozos, X representa el suceso *un mozo cualquiera ha sido declarado excedente*, y S_n es el suceso *al mozo X se le ha asignado el número n en la fase previa* .

En el último párrafo de su artículo, los autores ilustran su razonamiento sugiriendo que imaginemos el proceso con sus dos fases permutadas: en primer lugar se extrae el número del primer excedente y a continuación se asignan aleatoriamente los números a los mozos implicados. Esta ilustración es una forma más coloquial y didáctica de relatar el método sugerido en el apartado 3. Obsérvese que ambos métodos, si la asignación de números a los mozos ha sido verdaderamente aleatoria, son equivalentes a un problema de extracción sin repetición de bolas de una urna con 165.342 bolas, de las cuales 16.442 son rojas (excedentes) y el resto blancas. Aquél que extraiga una bola roja será declarado excedente de cupo.

Pero como ya hemos comentado, en el desarrollo del apartado 4.2 Díaz-Cordovés y Alonso omiten el hecho de que a cada mozo se le comunicó, previamente al sorteo, el número que aleatoriamente le había sido asignado. Ello supone que el mozo X sabía que le había correspondido el número n_0, y la repercusión en (1) es inmediata:

$$P(S_{n_0}) = 1 \;\text{ y }\; P(S_n) = 0, \;\forall n \neq n_0,$$

con lo que la expresión de $P(X)$ queda reducida a

$$P(X) = P(X|S_{n_0}) = P(A_{n_0}),$$

que es la utilizada por nosotros.

Aportaremos nosotros también un ejemplo. Como sin duda los autores saben, es posible jugar a la Lotería Primitiva mediante apuestas automáticas que eligen aleatoriamente una de las posibles combinaciones de 6 de los 49 números. Efectuamos una de estas apuestas para el sorteo de un jueves cualquiera y comprobamos el viernes por la mañana que no hemos conseguido acertar la combinación ganadora. Pero el domingo leemos con estupor en los periódicos que se ha descubierto un fraude en el sorteo que favorece unas combinaciones frente a otras[1]. En particular la nuestra está entre las no favorecidas. Como nuestra combinación ha sido generada aleatoriamente, ¿pensaríamos que *el proceso en su conjunto*, la asignación del boleto primero y el posterior sorteo fraudulento, ha sido justo con nosotros?

Finalmente quisiéramos aprovechar esta oportunidad que se nos ha dado para comentar que otros autores, así como algunos medios de comunicación en su día, han tratado también este asunto. En particular, queremos reseñar el trabajo *Análisis probabilístico del sorteo de los excedentes de cupo. ¿Fue justo el proceso en su conjunto?* (Suma, nº 27, pp. 81-90), cuyo autor R. Marcellán tuvo la amabilidad de enviárnoslo recientemente. Curiosamente, Marcellán, a pesar de que fue uno de los mozos participantes -y perjudicados- en el sorteo, mantiene en su artículo tesis iguales a las de Díaz-Cordovés y Alonso. ¡Todo un caballero!

A. Corberán y F. Montes
Departament d'Estadística i I.O.
Universitat de València
correos electrónicos: `Angel.Corberan@uv.es`
`Francisco.Montes@uv.es`

[1]Hay precedentes en la Lotto italiana de un fraude de este tipo