La Olimpiada Matemática

Sección a cargo de

María Gaspar

En este número se recogen las crónicas de las Olimpiadas Internacional e Iberoamericana de 1999. También la de la II Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria. Y ahí están los problemas propuestos en este año. Si alguien se anima a enviar soluciones, puede hacerlo a la responsable de la sección, bien por correo ordinario, al Dpto. de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas de la UCM, 28040 Madrid, o por correo electrónico a la dirección maria_gaspar@mat.ucm.es

40ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

En 1959, tuvo lugar, en Rumanía, la primera Olimpiada Internacional de Matemáticas. Desde entonces, ha venido celebrándose anualmente, con la única excepción de 1980. Cuarenta años después, la cita ha vuelto a ser en Rumanía. Pero si en la primera Olimpiada los países pioneros fueron siete, este año han sido 80 los países participantes, reuniendo a 450 estudiantes de los cinco continentes. El equipo español estuvo formado por Ramón José Aliaga Varea, Javier Múgica de Rivera, Álvaro Navarro Tobar, Andrés Tallos Tanarro, Néstor Sancho Bejerano y Enrique Vallejo Gutiérrez. Llegaron a Bucarest el día 13 de julio, acompañados por Marco Castrillón López como profesor Tutor, y por María Gaspar Alonso Vega como Jefe de Delegación.

Durante cuatro días, el Jurado trabajó en la confección de la prueba. La lista de problemas preseleccionados entre los 60 enviados por 31 de los países participantes, era de 27 problemas, clasificados en teoría de números (6), geometría (8), álgebra (6), y combinatoria (7).

Esta fué la prueba:

Primer día

Bucarest, 16 de julio de 1999

Problema 1

Determinar todos los conjuntos finitos S de puntos del plano que tienen por lo menos tres puntos y satisfacen la siguiente condición: para cualesquiera dos puntos distintos A y B de S, la mediatriz del segmento AB es un eje de simetría de S.

media de los premiados: 5,93

media de todos los participantes: 4,29
media de los estudiantes españoles: 4

Problema 2

Sea $n \geq 2$ un entero dado.

(a) Determinar la menor constante C para la cual se verifica la desigualdad:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j(x_i^2 + x_j^2) \leq C(\sum_{1\leq i\leq n} x_i)^4$$

para todos los números reales $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

(b) Para esta constante C, determinar cuándo se verifica la igualdad.

media de los premiados: 2,92
media de todos los participantes: 1,67
media de los estudiantes españoles: 0,16

Problema 3

Se considera un tablero cuadrado de $n \times n$, donde n es un entero positivo par. El tablero se divide en n^2 cuadrados unitarios. Decimos que dos cuadrados distintos del tablero son adyacentes si tienen un lado común.

Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de tal manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es adyacente a por lo menos un cuadrado marcado.

Determinar el menor valor posible de N.

media de los premiados: 2,23
media de todos los participantes: 1,58
media de los estudiantes españoles: 2,5

Segundo día

Bucarest, 17 de julio de 1999

Problema 4

Determinar todas las parejas (n, p) de enteros positivos tales que

p es primo
$n \leq 2p$, y
$(p-1)^n + 1$ es divisible por n^{p-1}.

media de los premiados: 4,1
media de todos los participantes: 2,8
media de los estudiantes españoles: 1,17

Problema 5

Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 están dentro de la circunferencia Γ, y son tangentes a Γ en los puntos distintos M y N respectivamente. La circunferencia Γ_1 pasa por el centro de la circunferencia Γ_2. La recta que pasa por los puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2 corta a Γ en los puntos A y B. Las rectas MA y MB cortan a Γ_1 en los puntos C y D respectivamente.

Demostrar que CD es tangente a Γ_2

media de los premiados: 3,15
media de todos los participantes: 1,83
media de los estudiantes españoles: 1,67

Problema 6

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

media de los premiados: 1,61
media de todos los participantes: 1,14
media de los estudiantes españoles: 0,5

Si los problemas de una Internacional son habitualmente difíciles, ninguno de los de este año fué considerado asequible –válido para el problema 1 o 4– por el Jurado. Finalmente, se "suavizó" un problema enviado por Estonia, que entró en la prueba como n^{o}1. (En la lista, el conjunto S era de puntos del espacio; el problema era mucho más bello, pero también mucho más difícil). El resto de los problemas (2,3,4,5 y 6) fueron propuestos por Polonia, Bielorrusia, Taiwan, Rusia y Japón, respectivamente.

Para juzgar sobre la dificultad de la Olimpiada de este año, basta con analizar la tabla de frecuencias que figura a continuación:

puntos	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0	29	195	154	40	191	147
1	52	129	119	119	105	224
2	53	37	79	109	45	27
3	45	10	44	59	18	21
4	42	5	20	24	5	8
5	41	4	3	15	7	7
6	48	11	8	9	31	5
7	140	59	23	75	48	11

La puntuación más alta ha sido de 39 puntos –lo cual no había ocurrido nunca: por difíciles que sean los problemas, siempre hay algún estudiante que los resuelve todos en tiempo de prueba–, y sólo la obtuvieron tres estudiantes, de Hungría, Rumanía y Ucrania. Los cortes para el oro, la plata y el bronce estuvieron en 28, 19 y 12 puntos respectivamente. La Mención de Honor es para los estudiantes que, sin tener medalla, resuelven completamente algún problema. ¡Este año solamente ha habido 12!

Entre los estudiantes españoles, Ramón José Aliaga, con 17 puntos, obtuvo bronce, y Javier Múgica de Rivera Mención de Honor. Resultó un equipo muy uniforme. Disfrutaron su experiencia, y regresaron satisfechos.

El año que viene, la Olimpiada será en Seúl.

Resultados por países

País	pts	O	P	B	MH
Albania	34				
Alemania	108		2	4	
Argentina	64			3	
Armenia	67			3	
Australia	116	1	1	3	1
Austria	75		1	2	
Azerbaiján	34			1	
Bélgiva	52			2	
Bielorrusia	167	3	3		
Bosnia	65			3	
Brasil	75			4	
Bulgaria	170	3	3		
Canadá	74			3	
China	189	4	2		
Chipre	35				1
Colombia	55		1	1	
Croacia	66			2	
Cuba	77		1	4	
Dinamarca	51			2	
Eslovaquia	88		2	3	
Eslovenia	46			2	
España	60			1	1
EE.UU.	150	2	3	1	
Estonia	30			1	
Filipinas	24				
Finlandia	65		1		1
Francia	73		1	2	1
Georgia	68		1	1	1
Grecia	57		2		
Guatemala	19				
Hong Kong	73			4	1
Hungría	147	1	4	1	
India	107		3	3	
Indonesia	35				
Irán	159	2	4		
Irlanda	38			1	
Islandia	41				
Israel	78			5	1
Italia	82		1	2	
Japón	135	2	4		
Kazakhastán	72			4	1
Kuwait	10				
Kyrgystán	15				
Latvia	86	1	1		
Lituania	54			2	
Luxemburgo	26			1	
Macao	41				
Macedonia	71			5	
Malasia	37				
Marruecos	48			1	1
Méjico	53			1	
Moldavia	50			1	1
Mongolia	78		2	1	
Noruega	67		1	2	
Nueva Zelanda	53			1	
Países Bajos	74			4	
Perú	10				
Polonia	104	1		5	
Portugal	29				
Reino Unido	100		3	2	
Rep. Checa	55			1	1
Rep de Corea	164	3	3		
Rumanía	173	3	3		
Rusia	183	4	2		
Singapur	71			4	
Sudáfrica	77		1	1	
Suecia	66			3	
Suiza	79		1	3	
Tailandia	57			3	
Taiwán	153	1	5		
Trinidad Tobago	33				
Túnez	22				
Turquía	109	1	1	4	
Turquistán	13				
Ucrania	136	2	2	1	
Uruguay	25				
Uzerbaiján	42				
Venezuela	8				
Vietnam	177	3	3		
Yugoslavia	130	1	2	3	

XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

por

Ceferino Ruiz Garrido

La **XIV Olimpiada Iberoamericana** ha tenido lugar en La Habana entre los días 11 y 19 de septiembre. Esta competición está patrocinada por la O.E.I., y están invitados a participar en ella todos los países iberoamericanos. Sobre un total de 22 posibles países, acudieron 20 (sólo han faltado Honduras y Guatemala), y un total de 80 participantes.

La Delegación española estuvo formada por Ceferino Ruiz Garrido, Mercedes Sánchez Benito, y los alumnos Ramón José Aliaga Varea, Javier Múgica de Rivera, Álvaro Navarro Tobar y Néstor Sancho Bejerano. La selección de estos alumnos se realizó entre los participantes en la Olimpiada Internacional, celebrada previamente.

La Delegacción viajó a Cuba el día 10 de septiembre, regresando el 20 del mismo mes. Estos viajes, como los demás gastos necesarios para la participación tanto en la Olimpiada Internacional como en la Iberoamericana, han sido financiados por la Subdirección General de Becas y Ayudas al estudio del Ministerio de Educación y Cultura.

Las pruebas se realizaron los días 14 y 15 de septiembre, con los siguientes problemas:

Primer día

14 de septiembre de 1999

Problema 1

Halle todos los enteros positivos que son menores que 1000 y cumplen la siguiente condición: el cubo de la suma de sus dígitos es igual al cuadrado de dicho entero.

Problema 2

Dadas dos circunferencias M y N, decimos que M biseca a N si la cuerda común es un diámetro de N.

Considere dos circunferencias fijas, C_1 y C_2 no concéntricas.

a) Pruebe que existen infinitas circunferencias B tales que B biseca a C_1 y B biseca a C_2.

b) Determine el lugar geométrico de los centros de las circunferencias B.

Problema 3

Sean n puntos distintos, $P_1, P_2, \dots, P_n$, sobre una recta del plano, con $n \geq 2$. Se consideran las circunferencias de diámetro $P_iP_j (1 \leq i < j \leq n)$ y coloreamos cada circunferencia con uno de k colores dados. Llamamos $(n, k)-$ *nube* a esta configuración.

Para cada entero positivo k, determine todos los n para los cuales se verifica que toda $(n, k) -$ *nube* contiene dos circunferencias tangentes exteriormente del mismo color.

NOTA : Para evitar ambigüedades, los puntos que pertenecen a más de una circunferencia no llevan color.

Segundo día

15 de septiembre de 1999

Problema 4

Sea B un entero mayor que 10 tal que cada uno de sus dígitos pertenece al conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demuestre que B tiene un factor primo mayor o igual que 11.

Problema 5

Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O.

Las alturas del triángulo son AD, BE y CF. La recta EF corta a la circunferencia en P y Q.

a) Pruebe que OA es perpendicular a PQ.

b) Si M es el punto medio de BC, pruebe que $\overline{AP}^2 = 2.\overline{AD}.\overline{OM}$.

Problema 6

Sean A y B puntos del plano, y C un punto de la mediatriz de AB. Se construye una sucesión $C_1, C_2, ...C_n, ...$ de la siguiente manera: $C_1 = C$, y para $n \geq 1$, si C_n no pertenece al segmento AB, C_{n+1} es el circuncentro del triángulo ABC_n .

Determine todos los puntos C tales que la sucesión $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ está definida para todo n y es periódica a partir de un cierto punto.

NOTA: Una sucesión $C_1, C_2, ..., C_n, ...$ es periódica a partir de un cierto punto si existen enteros positivos k y p tales que $C_{n+p} = C_n$ para todo $n \geq k$.

Los alumnos españoles obtuvieron los resultados siguientes:

Ramón José Aliaga Varea, 30 puntos y medalla de plata

Álvaro Navarro Tobar, 26 puntos y medalla de plata

Javier Múgica de Rivera, 25 puntos y medalla de plata

Néstor Sancho Bejerano, 18 puntos y medalla de bronce.

La mejor puntuación individual fué obtenida simultáneamente por un alumno de Colombia y otro de Méjico

Aunque esta es una competición individual, cabe hacer un estudio comparativo por países, el cual no corresponde a ninguna clasificación oficial. En este sentido, España ocupó el quinto lugar. El país mejor clasificado fué Argentina, con un total de 132 puntos, sobre un máximo de 168.

La Copa Puerto Rico, al país con mayor progreso en una Iberoamericana, ha correspondido este año a Uruguay.

Para los próximos años, han sido confirmadas como sedes Venezuela, (año 2000), El Salvador (2001), Uruguay (2002), Argentina (2003), Colombia (2005), y España (2006). En el 2004, se espera que Ecuador pueda encargarse de la organización.

Y por último, la **Olimpiada Universitaria**. Ésta se realiza por correspondencia, y está dirigida a estudiantes universitarios – no necesariamente de matemáticas– de cualquier curso. Junto a cada problema, aparece su valor en puntos. Se proponen 7 problemas a resolver durante un tiempo máximo de 5 horas, pero se tienen en cuenta únicamente las cuatro mejores puntuaciones.

La Comisión de Olimpiadas difundió la convocatoria entre los Distritos, y participaron estudiantes de Granada, Madrid y Valencia. En el momento de cerrar esta sección, no se conocen todavía los resultados.

Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria
Octubre 1999

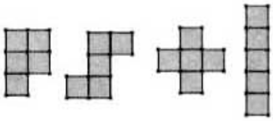
1. Encontrar el valor de la serie
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-1})^k}{k}$$
(4 puntos)

2. Los vértices de un triángulo ABC pertenecen a la hipérbola $xy = 1$. Demostrar que el ortocentro pertenece también a esta hipérbola (5 puntos)

3. Sean $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ todas las raices reales del polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, con $n > 1$. Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son todas las raíces del polinomio $g(x) = f(x) - xf\,'(x)$ y $z_1, z_2, \ldots z_n$ todas las raíces del polinomio $h(x) = f(x) + xf\,'(x)$, demostrar que estas raíces son reales y satisfacen
$$y_1 < 0 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < x_2 < \ldots < y_n < z_n < x_n$$
(5 puntos)

4. La suma de dos cuadrados consecutivos puede ser un cuadrado perfecto: por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Encontrar el menor entero n mayor que 2 para el cual existen n números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es un cuadrado perfecto. (6 puntos)

5. En el juego tetris-5 se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura.



Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de $m \times n$ en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba. (a) Demostrar que se puede recubrir un tablero 8×8 que no contiene sus cuatro esquinas. (2 puntos) b) Demostrar que no se puede recubrir un tablero 1999×2001 que no contiene sus cuatro esquinas. (4 puntos)

6. Sea $N = \{1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales y sea $N_m = \{0, 1, 2, ...m - 1\}$ para cualquier número natural m. Demostrar que para cualquier función f, si $f : N \to N_m$ existe un número real α tal que $[\alpha^n] \equiv f(n) \pmod{m}$. (Nota: $[x]$ es la parte entera del número real x) (7 puntos).

7. En R^3 se define el producto "o" de la siguiente manera :

$$(x, y, z)o(u, v, t) = (xu + yt + zv, xv + yu + zt, xt + yv + zu)$$

Demostrar que para cualquier $k \in N$ si $(x, y, z)^k = (0, 0, 0)$ entonces $x = y = z = 0$.

Nota : Se define $(x, y, z)^k = (x, y, z)^{k-1}o(x, y, z)$ para cualquier entero $k > 1$. (8 puntos)