

## Cien años de la Conjetura de Poincaré

por

Vicente Muñoz

Este año se celebra el sesquicentenario del nacimiento de Henri Poincaré y el centenario de la Conjetura de Poincaré, quizá uno de los problemas más famosos de todos los tiempos en Geometría, y que ha permitido abrir nuevos campos de investigación durante el pasado siglo, y sin duda en el presente. Tal es su relevancia que ha sido incluido en la lista de siete problemas para el nuevo milenio propuestos por el *Clay Mathematics Institute*, cuya resolución está dotada de un premio de un millón de dólares [3]. El centenario llega justo en el momento en el que es posible que se haya dado una prueba definitiva de la misma por parte del matemático ruso G. Perelman, prueba que, aunque se encuentra bajo el escrupuloso análisis de diversos grupos de investigación por todo el planeta, es reconocida como un verdadero *tour de force*. Nos proponemos en estas líneas describir brevemente la historia de la conjetura y del gran matemático que la propuso.

### 1 POINCARÉ, EL ÚLTIMO UNIVERSALISTA

A Henri Jules Poincaré (1854-1912), matemático francés, se le considera uno de los grandes genios de todos los tiempos. Con una memoria asombrosa, su método de trabajo consistía en resolver un problema en su cabeza antes de sentarse a escribirlo. Intentaba desarrollar sus resultados partiendo de principios fundamentales, en lugar de basarlos en trabajo previo de otros matemáticos. Abogaba más por la intuición como método de búsqueda, aunque creía en los argumentos formales como camino de revelar los errores de la intuición y de confirmar predicciones. Estuvo muy preocupado por la fundamentación de las diversas teorías matemáticas y físicas, incluso desde un punto de vista filosófico.

Gran parte de su trabajo desarrolló interacciones entre diferentes temas, y su amplio conocimiento de las diversas ramas de la Matemática le permitieron atacar problemas desde numerosos puntos de vista. Tras haber obtenido gran reconocimiento como matemático, se ocupó de escribir sobre el significado e importancia de la Ciencia y la Matemática al público general, con gran talento literario. El libro [25] (que fue distribuido por la RSME) alcanzó en su momento gran popularidad.



Para dar al lector una idea de la ingente cantidad de parcelas matemáticas en las que Poincaré es un precursor, mencionaremos algunas de sus innovaciones:

Creó las funciones elípticas generalizadas conocidas como funciones automorfas, y encontró su relación con las curvas algebraicas. Mostró cómo usarlas para hallar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes algebraicos, lo que es semilla de la idea de fibrados y conexiones, así como de monodromía.

Trabajó también en Mecánica Celeste, usando ecuaciones variacionales e invariantes integrales, y siendo un innovador en el campo de los Sistemas Dinámicos. En 1887, en ocasión del sexagésimo cumpleaños del Rey Oscar II de Suecia y Noruega, se ofreció un premio al mejor trabajo en Matemáticas. Poincaré escribió una memoria sobre el problema de los 3 cuerpos [26], con la que ganó el premio. Cuando la memoria estaba a punto de ser publicada en *Acta Mathematica*, se descubrió un error. Su resolución llevó a Poincaré al descubrimiento de la Teoría del Caos.

En Matemática Aplicada, trató temas de Óptica, Electricidad, equilibrio de masas de fluidos, Astronomía, Termodinámica, etc. Introdujo el movimiento caótico, ámbito en el que hizo uso extensivo de la Probabilidad. Se le reconoce ser un codescubridor, junto con A. Einstein y H. Lorentz, de la Teoría Especial de la Relatividad. Cabe destacar su estudio de las Geometrías no euclideas, donde nos ha dejado sus famosos disco y semiplano de Poincaré de la Geometría hiperbólica.

La contribución que más nos interesa aquí es la que aparece en su libro *Analysis Situs* [21] publicado en 1895, donde introdujo la Topología Algebraica. En él estableció los fundamentos de la homología, usando descomposi-

ciones poliedrales de los espacios para calcular números de Betti, definió el grupo fundamental para distinguir superficies, y formuló su famosa conjetura, que pasaremos a explicar detalladamente en la próxima sección.

Hizo aportaciones aún en más campos, tales como Ecuaciones en Derivadas Parciales, Análisis Complejo (se le considera precursor de la Teoría de Funciones Analíticas de varias variables complejas), Geometría Algebraica o Teoría de Números. Como puede apreciarse, Poincaré realizó trabajos en todas las ramas de las matemáticas, con lo que tiene bien merecido el término de universalista, un club al que pocos matemáticos en la historia han sido capaces de acceder.

La fama de Henri Poincaré le acompañó no sólo por su bien merecida reputación científica (hay por ejemplo un sello francés que le conmemora), sino además por sus relaciones familiares. Su primo Raymond Poincaré fue presidente de la República Francesa durante la I Guerra Mundial.

## 2 LA CONJETURA DE POINCARÉ

Para enunciar la Conjetura de Poincaré, primero es necesario que introduzcamos el grupo fundamental, concepto que fue definido por el mismo Poincaré en su *Analysis Situs* [21], y que ha dado lugar a la Topología Algebraica. Los conceptos que introducimos en esta sección se pueden encontrar con más detalle en [13].

Sea  $X$  un espacio topológico. Un camino en  $X$  es una aplicación continua  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ . Se dibuja como un trazo continuo en  $X$  (es decir, si  $X$  fuese un papel,  $\gamma$  se dibujaría sin levantar el lápiz de  $X$ ). Se llama punto inicial a  $\gamma(0)$  y punto final a  $\gamma(1)$ . Dos caminos  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  con los mismos puntos iniciales y finales, son *homótopos* si existe una familia continua de caminos  $\gamma_s$ , con  $s \in [0, 1]$ , todos ellos con los mismos puntos iniciales y finales, interpolando entre ambos. La continuidad de la familia se expresa matemáticamente requiriendo que la aplicación  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $H(t, s) = \gamma_s(t)$  sea continua (a esta aplicación se la llama *homotopía*). Si nos imaginamos un camino como un hilo extensible en  $X$ , una homotopía consiste en mover el hilo en  $X$  manteniendo sus extremos fijos (ver Figura 1(a)).

Conviene fijar un punto, al que se suele denotar por  $* \in X$ . Se llama *espacio con punto base* al par  $(X, *)$ . Los caminos que comienzan y acaban en  $*$  se llaman *lazos* (ver Figura 1(b)).

**DEFINICIÓN** El *grupo fundamental* de  $(X, *)$  es el conjunto  $\pi_1(X, *)$  cuyos elementos son las clases de equivalencia  $[\gamma]$ , donde  $\gamma$  es un lazo y consideramos que  $[\gamma_0] = [\gamma_1]$  cuando  $\gamma_0$  y  $\gamma_1$  son homótopos.

El hecho clave radica en que, como su propio nombre indica,  $\pi_1(X, *)$  es un grupo. El producto es la concatenación de lazos: si  $[\gamma_1], [\gamma_2]$  son dos lazos,  $[\gamma_1] * [\gamma_2]$  viene dado por el lazo que consiste en recorrer  $\gamma_1$  seguido de  $\gamma_2$  (ver

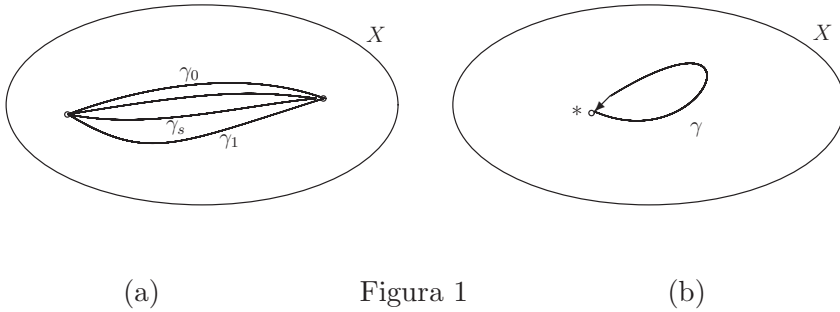
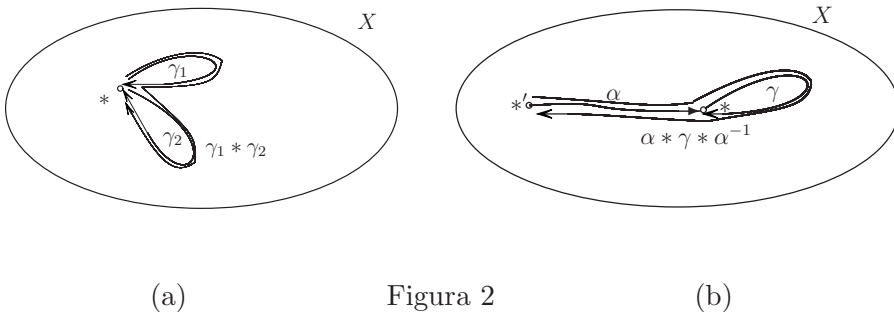


Figura 2(a)). Esto se puede hacer siempre debido a que todos los caminos empiezan y acaban en el mismo punto  $*$ . El elemento neutro es la clase del lazo  $c_*$  que se mantiene constantemente en el punto base,  $c_*(t) = *, t \in [0, 1]$ , y el inverso de  $[\gamma]$  está dado por el mismo lazo recorrido en sentido inverso.



Si  $X$  es conexo por caminos (como supondremos en adelante), el punto base no importa mucho, es decir, si elegimos otro punto base  $*' \in X$ , el grupo fundamental de  $(X, *')$  es isomorfo al grupo fundamental de  $(X, *)$ . Basta fijar un camino  $\alpha$  de  $*'$  a  $*$ , y asociar

$$\begin{aligned} \pi_1(X, *) &\longrightarrow \pi_1(X, *'), \\ [\gamma] &\mapsto [\alpha] * [\gamma] * [\alpha]^{-1}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que esta aplicación es un isomorfismo (ver Figura 2(b)). Por tanto, tenemos bien asociado un grupo (abstracto)  $\pi_1(X)$  a nuestro espacio  $X$ .

Toda la teoría pivota sobre la siguiente propiedad: el grupo fundamental es un *invariante algebraico*. Supongamos que dos espacios  $X$  e  $Y$  son topológicamente equivalentes. Esto quiere decir que desde el punto de vista de la Topología son el mismo. Más técnicamente, existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que

$$f \circ g = Id_Y, g \circ f = Id_X, \tag{1}$$

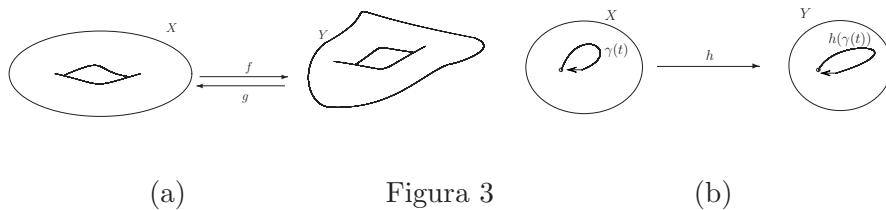


Figura 3

es decir son inversas una de la otra. Se dice que  $X$  e  $Y$  son *homeomorfos* (del griego, *homeo* = misma, *morfo* = forma). Ver Figura 3(a).

La propiedad de ser un invariante algebraico se expresa diciendo que si  $X$  e  $Y$  son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales  $\pi_1(X)$ ,  $\pi_1(Y)$  son isomorfos. De hecho, la propiedad de ser invariante algebraico se deduce de una propiedad no menos relevante, la *functorialidad*: para toda aplicación continua  $h : X \rightarrow Y$ , hay un homomorfismo de grupos  $h_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ . El homomorfismo es fácil de definir: envía cada lazo  $\gamma(t)$  al lazo imagen  $h(\gamma(t))$  (ver Figura 3(b)). La aplicación  $h \mapsto h_*$  verifica que  $(h \circ h')_* = h_* \circ h'_*$  y que  $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X)}$ . Ahora de (1), tenemos

$$\left. \begin{aligned} f \circ g = Id_Y &\Rightarrow f_* \circ g_* = Id_{\pi_1(Y)} \\ g \circ f = Id_X &\Rightarrow g_* \circ f_* = Id_{\pi_1(X)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f_*, g_* \text{ son isomorfismos.} \quad (2)$$

Un espacio se llama *simplemente conexo* (s.c. para abreviar) si  $\pi_1(X)$  es el grupo trivial, es decir, está formado solamente por el elemento neutro. Por tanto, todo lazo es homótopo al lazo constante. En la Figura 4 se ve que, interpretando el lazo  $\gamma$  como una *circunferencia*  $\gamma : S^1 \rightarrow X$ , entonces existe un disco  $F : D^2 \rightarrow X$  que extiende continuamente  $\gamma$ . Se dice entonces que  $\gamma$  es el borde del disco  $F$ .

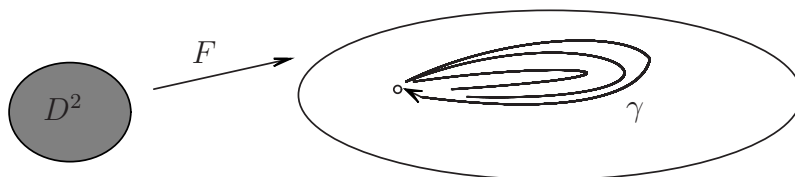


Figura 4

Analicemos un poco en detalle el caso de las superficies. Una superficie es un espacio topológico compacto Hausdorff que localmente es como  $\mathbb{R}^2$ , es decir dado cualquier punto  $p \in X$ , existe un entorno abierto  $U \subset X$  de  $p$  y un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ , donde  $\varphi(U)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . A  $\varphi$  se le denomina *carta* (podemos pensar que  $\varphi$  sirve para cartografiar  $X$ , ver Figura

5). Para hacer más intuitivo este concepto, vamos a tomar prestada la idea de E. Abbot en su novela [1], en la que un ser de dos dimensiones, Planito, vive en un mundo de dos dimensiones  $X$ , Planilandia. Así  $X$  es una superficie y Planito, al observar sólo un pequeño trozo de  $X$  a su alrededor, tiene la impresión de encontrarse en un plano. (Curiosamente, [1] no es un libro de matemáticas, sino una crítica a la sociedad de la época).

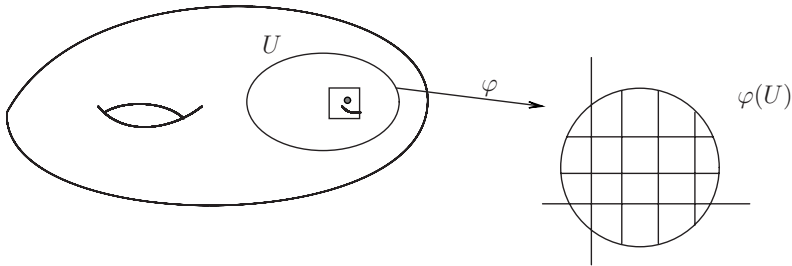


Figura 5

Si Planito logra deshacerse del prejuicio de que vive en un plano (pensemos que también el ser humano creyó que la Tierra era plana durante muchos siglos), y se decide a averiguar qué superficie es  $X$ , podría intentar calcular el grupo fundamental de  $X$  (al menos si tiene suficiente tiempo para llegar a pasear por todo  $X$ ). Ha de fijar un punto  $*$  y tender lazos desde  $*$ . Luego los habría de mover. Por ejemplo si todos ellos los puede *recoger*,  $X$  es s.c. De hecho puede averiguar *cuál* es su mundo sin *verlo* desde fuera:

**TEOREMA** *Si  $X$  es una superficie compacta s.c., entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .*

Este resultado ya era conocido por los matemáticos del siglo XIX. Es fácil llegar a él usando la clasificación de superficies. Supongamos que  $X$  es una superficie s.c. Primero es fácil ver que ha de ser orientable: si no lo fuera, habría un lazo  $\gamma$  que cambia la orientación de  $X$ . Este lazo no puede ser borde de un disco, pues en un disco siempre puede definirse una orientación que nos daría una orientación para  $\gamma$  (ver Figura 6). Por tanto  $X$  no sería s.c., lo que nos llevaría a una contradicción.

Ahora, por el *teorema de clasificación de superficies* [13], al ser la superficie  $X$  orientable, o bien  $X$  es la esfera o bien es una superficie de género  $g \geq 1$  (es decir, un donut con  $g$  agujeros). Pero una superficie  $X_g$  de género  $g \geq 1$  no es s.c. Basta tomar una aplicación continua  $f : X_g \rightarrow X_1$  de  $X_g$  en la superficie  $X_1$  de género 1, como en la Figura 7(a). La superficie  $X_1$  se conoce con el nombre de *toro* y tiene la forma de un flotador hinchado. Hay un homeomorfismo  $X_1 \rightarrow S^1 \times S^1$ , que envía cada punto de  $X_1$  a sus dos coordenadas *latitud*

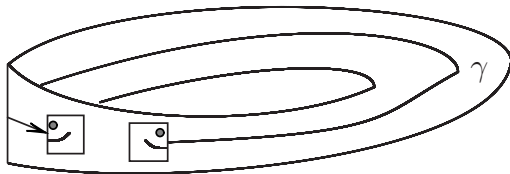
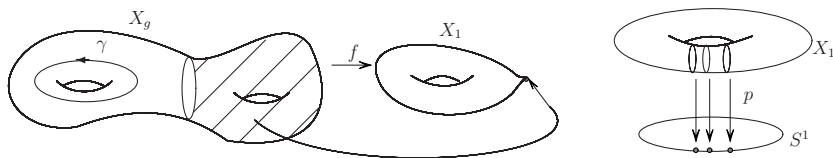


Figura 6

y *longitud* (que indican en qué paralelo y meridiano se encuentra el punto, respectivamente). Ahora tomamos la proyección  $p : X_1 = S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  en el segundo factor (ver Figura 7(b)). El lazo  $[\gamma] \in \pi_1(X_g)$  verifica que  $p_*f_*[\gamma]$  da una vuelta en  $S^1$  y por tanto no es el elemento neutro en  $\pi_1(S^1)$ . Luego  $[\gamma] \neq [c_*]$  en  $\pi_1(X_g)$  y  $X_g$  no es s.c. La conclusión es que  $X$  ha de ser una esfera.



(a)

Figura 7

(b)

La definición de variedad de dimensión  $n > 2$  es análoga a la de superficie, donde las cartas tienen imagen en un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Estas variedades son más difíciles de imaginar, pero son de gran relevancia en Física y en Geometría. Por ejemplo percibimos nuestro cosmos como una variedad de dimensión 3, ya que vemos a nuestro alrededor un pequeño entorno que es similar al espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3$ . Nos encontramos tan perdidos intentando averiguar la forma de nuestro universo como Planito intentando averiguar la forma de Planilandia.

La variedad de dimensión  $n$  más sencilla es la  $n$ -esfera o esfera de dimensión  $n$ , que matemáticamente puede escribirse como

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

Por tanto, la 3-esfera está dentro de  $\mathbb{R}^4$ . No obstante, nos la podemos imaginar como un espacio en el que si viajamos en línea recta, llegamos a las antípodas – el punto más alejado – y, si seguimos viajando en la misma dirección, acabamos volviendo al punto de partida (ver Figura 8).

De nuevo,  $S^n$  es s.c. La Conjetura de Poincaré [23] (ver [24, p. 498]) es la siguiente:

CONJETURA DE POINCARÉ (1904) - CP: Si  $X$  es una variedad compacta de dimensión 3 simplemente conexa, entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .

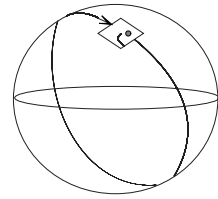


Figura 8

CONSECUENCIA DE UN INTENTO FALLIDO

Poincaré no formuló la CP a la primera. De hecho planteó una conjetura ligeramente distinta [22] en 1900, que resultó ser falsa, como él mismo probó en [23]. Para explicarla, necesitamos el concepto de grupo de homología.

Sea  $X$  un espacio topológico (esta vez no hay punto base). Un 1-ciclo es una suma formal (finita)  $A = \sum \gamma_i$  de lazos (es decir, caminos con el mismo punto inicial y final). Interpretamos  $-\gamma$  como  $\gamma$  recorrido en sentido contrario. Un ciclo  $A = \sum \gamma_i$  es borde si existe una superficie orientada con borde  $D$  cuyo borde es el ciclo dado, es decir tenemos  $f : D \rightarrow X$ ,  $\partial D = \bigsqcup C_i$ ,  $C_i$  es (homeomorfo) a una circunferencia (con la orientación heredada de la orientación de  $D$ ) y  $f|_{C_i} = \gamma_i$ .

Dos 1-ciclos  $A$  y  $B$  se dicen *cobordantes* u *homólogos* si  $A - B$  es un borde (ver Figura 9).

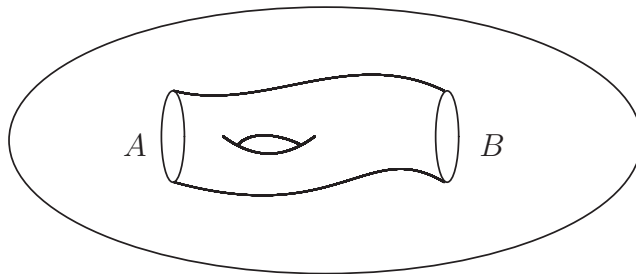


Figura 9

DEFINICIÓN El primer grupo de homología  $H_1(X)$  se define como el conjunto de clases de equivalencia de ciclos  $[A]$ , donde se considera que  $[A] = [B]$  si  $A - B$  es un borde.

Ésta era la forma en la que Poincaré veía la homología. El resultado es un grupo abeliano, que es un invariante algebraico, y bastante más fácil de calcular que el grupo fundamental. Claramente, si  $\pi_1(X)$  es trivial, entonces  $H_1(X) = 0$ , pero el recíproco no es cierto. Por tanto  $\pi_1(X)$  tiene más información que



$H_1(X)$ . La relación exacta entre ambos grupos la da el *Teorema de Hurewicz* [13], que dice que

$$H_1(X) \cong \frac{\pi_1(X)}{[\pi_1(X), \pi_1(X)]}, \tag{3}$$

donde  $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$  es el subgrupo generado por los conmutadores de  $\pi_1(X)$ . Es decir, el primer grupo de homología es el abelianizado del grupo fundamental.

Cabe destacar que se pueden definir los grupos de homología de orden superior  $H_i(X)$  análogamente al  $H_1(X)$ . Basta tomar para los ciclos aplicaciones continuas desde variedades con borde de dimensión  $i$  de forma que los bordes *peguen* bien (se suelen usar  $i$ -simplices), y tomamos para los bordes cobordismos, es decir, aplicaciones continuas desde variedades con borde de dimensión  $i + 1$  (o desde  $(i + 1)$ -simplices). Poincaré fue el primero en dar un sentido topológico a la homología, y usaba una triangulación (es decir, suponía que los espacios eran *complejos simpliciales*) para calcular clases de homología. Más adelante surgiría la versión de la homología singular [13].

CUESTIÓN INICIAL DE POINCARÉ (1900) [22] (ver [24, p. 370]): *Si  $X$  es una 3-variedad compacta con  $H_1(X) = 0$  entonces  $X$  es homeomorfa a la esfera  $S^3$ .*

ESPACIO DE POINCARÉ: En 1904, Poincaré descubrió un contraejemplo a esta cuestión [23], construyendo una 3-variedad compacta con  $H_1(X) = 0$  pero no homeomorfa a  $S^3$ . La clave para obtener esto es comprobar que  $\pi_1(X)$  no es trivial. Fue entonces cuando Poincaré formuló la CP en la versión del grupo fundamental que hemos enunciado. A la variedad que construyó, y que pasamos a describir, se la ha bautizado con el nombre de *Espacio de Poincaré*.

Buscamos una 3-variedad compacta con grupo fundamental  $\Gamma = \pi_1(X)$  no trivial pero con  $H_1(X) = \Gamma/[\Gamma, \Gamma] = 0$ , por (3). Por tanto, ha de ser  $[\Gamma, \Gamma] = \Gamma$ . Un grupo con esta propiedad se denomina *grupo perfecto*.

Para construir un ejemplo, se considera el grupo de isometrías del icosaedro. Este grupo es isomorfo al grupo alternado  $A_5$  (grupo de las permutaciones pares de 5 elementos), que es el único grupo simple con 60 elementos. Basta considerar los 5 cubos que se obtienen usando como vértices los puntos medios de las caras del icosaedro (ver Figura 10), y observar que cada isometría del icosaedro se corresponde con una permutación de estos 5 cubos (la permutación es par cuando la isometría es directa).

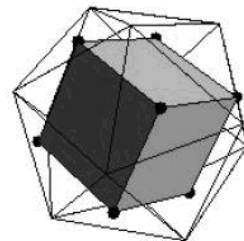


Figura 10

Por tanto,  $A_5 \subset SO(3)$ , donde  $SO(3)$  es el grupo de Lie de isometrías directas de  $\mathbb{R}^3$ . Usamos el recubrimiento doble de grupos de Lie  $SU(2) \rightarrow$

$SO(3)$  y llamamos  $\Gamma$  a la preimagen de  $A_5$ . Tenemos dos sucesiones exactas cortas de grupos

$$\begin{array}{ccccccc} \{Id, -Id\} & \rightarrow & SU(2) & \rightarrow & SO(3) & & \\ & & \parallel & & \cup & & \cup \\ \{Id, -Id\} & \rightarrow & \Gamma & \rightarrow & A_5. & & \end{array} \tag{4}$$

$\Gamma$  es un subgrupo (no normal) de  $SU(2)$  de orden 120. Como  $A_5$  es simple (no tiene subgrupos normales propios no triviales), tenemos que  $[A_5, A_5] = A_5$ , por tanto  $[\Gamma, \Gamma]$  proyecta sobreyectivamente sobre  $A_5$ . Las sucesiones exactas de (4) no escinden, luego ha de ser  $[\Gamma, \Gamma] = \Gamma$ .

Como variedad,  $SU(2)$  es homeomorfo a la esfera  $S^3$  (las matrices de  $SU(2)$  están formadas por dos vectores de  $\mathbb{C}^2$  unitarios y ortogonales-hermíticos, con lo que dar una matriz equivale a dar el primero de los vectores, que está en  $S^3 \subset \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ ). Por tanto, el cociente de grupos  $X = SU(2)/\Gamma$  es una 3-variedad compacta. Al ser  $S^3$  s.c., un teorema sobre *espacios recubridores* [13] dice que  $\pi_1(X) = \Gamma$ . Así  $X$  es la 3-variedad buscada.

PROBLEMA DE CLASIFICACIÓN DE 3-VARIEDADES

La CP ha demostrado ser un problema muy rebelde desde que fue formulada. Su estudio ha llevado a muchas demostraciones falsas y a gran número de avances en el estudio de la Topología de Variedades. La CP se engloba en un problema más amplio: el problema de *clasificación* de 3-variedades compactas. Un problema de clasificación consiste en:

- (a) Dados dos espacios  $X$  e  $Y$ , determinar si son homeomorfos o no.
- (b) Dar una lista completa de todos los posibles espacios  $X$  de un determinado tipo.

La CP es básicamente la parte de la clasificación de 3-variedades correspondiente a (a) para el caso  $Y = S^3$ .

Cualquier tipo de invariante (algebraico o de otro tipo) es útil para el apartado (a), dado que si dos espacios tienen cierto invariante distinto, entonces forzosamente no son homeomorfos. Por otro lado, a veces los invariantes (al menos de los que disponemos) no son suficientes: Alexander probó en 1919 que la homología y el grupo fundamental no son suficientes para caracterizar las 3-variedades, es decir que hay 3-variedades que comparten la misma homología y grupo fundamental y no son homeomorfas.

3 GENERALIZACIONES DE LA CONJETURA DE POINCARÉ

DIMENSIÓN ARBITRARIA

La extensión más obvia de la CP es a dimensión arbitraria. Sin embargo, la condición de que una variedad compacta de dimensión  $n$  sea s.c. no es

suficiente para asegurar que sea homeomorfa a una  $n$ -esfera. Por ejemplo en dimensión 4, la variedad  $S^2 \times S^2$  es s.c., al ser el producto de dos  $S^2$ , que son s.c., pero no es homeomorfa a  $S^4$  dado que  $H_2(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  mientras que  $H_2(S^4) = 0$ . La formulación adecuada de la CP en dimensión arbitraria requiere el concepto de equivalencia de homotopía.

Dos aplicaciones  $f_0 : X \rightarrow Y$  y  $f_1 : X \rightarrow Y$  son homótopas si hay una familia continua de aplicaciones  $f_s : X \rightarrow Y$  que interpola entre ellas (ver Figura 11). La continuidad de la familia se expresa pidiendo que  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  dada por  $H(x, s) = f_s(x)$  sea continua. Se escribe  $f_0 \sim f_1$ . Si  $[\gamma] \in \pi_1(X)$  y  $f_0 \sim f_1$ , entonces  $f_0(\gamma(t))$  y  $f_1(\gamma(t))$  son lazos homótopos, luego los homomorfismos inducidos entre los correspondientes grupos fundamentales cumplen que  $(f_0)_* = (f_1)_*$ .

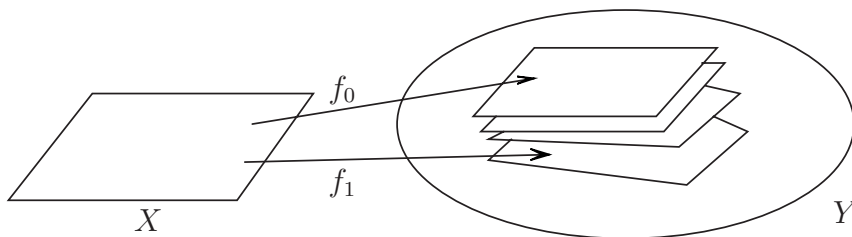


Figura 11

Se dice que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son del *mismo tipo de homotopía* si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  que son inversas salvo homotopía (se las llama equivalencias de homotopía), es decir,

$$f \circ g \sim Id_Y, \quad g \circ f \sim Id_X.$$

Comparando esto con (1) vemos que de nuevo se tiene que  $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  y  $g_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$  son inversas la una de la otra y así los grupos fundamentales de  $X$  e  $Y$  son isomorfos (tenemos lo que hace falta para que (2) funcione). Esto se expresa diciendo que el grupo fundamental es un *invariante del tipo de homotopía*.

Al igual que hemos definido los grupos de homología  $H_i(X)$  de orden  $i \geq 1$ , el grupo fundamental tiene una generalización dada por los *grupos de homotopía* de orden superior  $\pi_i(X)$ . Sus elementos son clases de equivalencia  $[\gamma]$ , donde  $\gamma : S^i \rightarrow X$  es una aplicación continua de la  $i$ -esfera  $S^i$  a  $X$ , y la relación de equivalencia está dada por  $[\gamma_1] = [\gamma_2]$  si  $\gamma_1 \sim \gamma_2$ . Si  $X$  e  $Y$  son del mismo tipo de homotopía, entonces todos sus grupos de homotopía son isomorfos  $\pi_i(X) \cong \pi_i(Y)$ . Lo mismo sucede con los grupos de homología  $H_i(X) \cong H_i(Y)$ ,  $i \geq 1$ .

La generalización de CP a dimensión arbitraria es la siguiente:

CONJETURA DE POINCARÉ EN DIMENSIÓN  $n$ : Una  $n$ -variedad compacta del mismo tipo de homotopía que la  $n$ -esfera es homeomorfa a la  $n$ -esfera.

La importancia de la CP en dimensión  $n$  radica en la sutileza del concepto de equivalencia de homotopía. Ciertamente hay  $n$ -variedades compactas que son del mismo tipo de homotopía, pero no son homeomorfas.

Para dimensión 3 esta conjetura es equivalente a la CP formulada por Poincaré. Basta ver que, para una 3-variedad compacta, el ser s.c. es equivalente a ser del mismo tipo de homotopía que  $S^3$ . Ciertamente, si  $X$  es s.c., entonces  $H_1(X) = 0$ . El teorema de *dualidad de Poincaré* [13] (¡otra vez Poincaré!) dice que para una variedad (conexa) compacta orientable  $Y$  de dimensión  $n$ ,

$$H_{n-i}(Y) \cong (H_i(Y)/\text{Torsion } H_i(Y)) \oplus \text{Torsion } H_{i-1}(Y),$$

para todo  $i$ , donde *Torsion*  $G$  denota la parte de torsion de un grupo abeliano  $G$ . Como  $X$  es s.c., ha de ser orientable. En nuestro caso, como  $X$  es de dimensión 3,  $H_2(X) = 0$  y  $H_3(X) \cong \mathbb{Z}$  (pues  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ ). Los grupos de homología  $H_i(Y)$  para  $i > n$  son cero para cualquier  $n$ -variedad  $Y$ . Por tanto  $X$  tiene la misma homología que  $S^3$ . A los espacios que satisfacen esta propiedad se les conoce con el nombre de *esferas de homología*. Por ejemplo, el espacio de Poincaré es una esfera de homología.

Para ver que  $X$  y  $S^3$  son del mismo tipo de homotopía, usamos que  $X$  es s.c. Tomamos una bola  $B$  en  $X$ , y construimos la aplicación continua  $f : X \rightarrow S^3$  que manda  $X - B$  al polo sur  $s \in S^3$ , y que manda  $B$  a  $S^3 - \{s\}$ . Esta aplicación induce un isomorfismo  $f_* : H_i(X) \rightarrow H_i(S^3)$ , para todo  $i$  (es decir, el isomorfismo entre los grupos de homología no es abstracto, sino que está realizado geoméricamente). Por un teorema de Topología Algebraica, al ser  $X$  s.c.,  $f$  ha de ser una equivalencia de homotopía.

La CP para dimensión  $n$  es trivialmente cierta para  $n = 1$  (pues la única 1-variedad conexa compacta es  $S^1$ ). Para el caso de superficies  $n = 2$ , ya sabemos que es cierta. El caso  $n = 4$  fue probado por Freedman [5] en 1982, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields en 1986. Para  $n \geq 5$ , la conjetura había sido demostrada durante los 60's (los argumentos topológicos son en general más sencillos en dimensión  $n \geq 5$  puesto que hay más *espacio* para mover objetos con homotopías). Stallings [29] dio una prueba para  $n \geq 7$  que Zeeman [31] generalizaría para  $n = 5, 6$ . Smale [28] dio una demostración alternativa y completa para todos los casos  $n \geq 5$ .

#### CONJETURA DE POINCARÉ DIFERENCIABLE

En Geometría, aparte de la estructura de variedad topológica, tenemos otra estructura más rica, la de variedad diferenciable, que permite hacer Análisis en variedades.

**DEFINICIÓN** Una variedad diferenciable  $X$  es una variedad topológica en la que tienen sentido los conceptos de diferenciación. Para ello hace falta una colección preferida de cartas  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$  a las que declararemos diferenciables. Como consecuencia, si  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos cartas y  $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ , entonces  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U) \rightarrow \varphi_2(U)$  es diferenciable (entre dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ). A esto se le conoce como una *estructura diferenciable* en  $X$ .

Esta definición permite hablar de funciones diferenciables  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , o de aplicaciones diferenciables  $f : X \rightarrow Y$  entre dos variedades diferenciables, sin más que ver si en cada carta se da la diferenciabilidad. Dos variedades diferenciables  $X$  e  $Y$  son *difeomorfas* (diferenciablemente equivalentes) si existen aplicaciones diferenciables  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  satisfaciendo (1). La diferencia entre homeomorfismo y difeomorfismo es sutil. De hecho, puede ocurrir que dos variedades (diferenciables)  $X$  e  $Y$  sean homeomorfas pero no difeomorfas, debido a que todo homeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$  esté topológicamente muy *enredado*.

Así tenemos una nueva versión de la Conjetura de Poincaré:

**CONJETURA DE POINCARÉ DIFERENCIABLE - CPD:** *Sea  $X$  una  $n$ -variedad compacta diferenciable. Si  $X$  es del mismo tipo de homotopía que la  $n$ -esfera, entonces  $X$  es difeomorfa a la  $n$ -esfera.*

En dimensión 2 o 3, toda variedad topológica admite una única estructura diferenciable. Esto se consigue probando que cada 3-variedad topológica admite una triangulación (lo que técnicamente se conoce como estructura PL=*piecewise-linear*, es decir, lineal a trozos) [16] y luego demostrando que tal estructura PL admite una única estructura diferenciable [17]. Por tanto, la CPD es cierta para  $n = 2$ ; y para  $n = 3$ , resolver la CP es equivalente a resolver la CPD.

En dimensión  $n \geq 4$ , las cosas no son tan claras. A veces, una variedad topológica no admite ninguna estructura diferenciable. Otras, admite varias estructuras diferenciables distintas (obteniéndose así variedades diferenciables no difeomorfas). En dimensión  $n \geq 5$  la respuesta a estas cuestiones está determinada por propiedades homotópicas en las que intervienen ciertos espacios *BTop*, *BPL* y *BDiff*, y que están muy bien entendidas. De nuevo, el caso  $n = 4$  es el más difícil. Aquí se sabe que hay variedades topológicas compactas que no admiten estructura diferenciable alguna (esto fue demostrado por Donaldson [4] en 1982, lo que le hizo merecedor de la medalla Fields), y hay otras 4-variedades topológicas que admiten infinitas estructuras diferenciables distintas, y éstas se distinguen con invariantes muy sutiles (los invariantes de Donaldson) que provienen de las teorías de Yang-Mills. Por ejemplo,  $\mathbb{R}^4$  admite infinitas estructuras diferenciables no difeomorfas entre sí, y éste es el

único  $\mathbb{R}^n$  al que le sucede este fenómeno. La CPD en dimensión  $n = 4$  está aún abierta.

ESFERAS EXÓTICAS

Para  $n \geq 5$ , sí se conoce la respuesta a la CPD. En general hay más de una estructura diferenciable para cada esfera  $S^n$ , en cuyo caso, la CPD es falsa. A las estructuras diferenciables de  $S^n$  que no son la estándar se las conoce con el nombre de *esferas exóticas*. Milnor [14] fue el primero en encontrar una estructura diferenciable exótica en la esfera  $S^7$ . Posteriormente, se encontraron generalizaciones a otras dimensiones, y usando teoría de cirugía, se ha relacionado el número de estructuras diferenciables de la  $n$ -esfera con grupos de homotopía de esferas. Sin embargo, los grupos de homotopía  $\pi_i(S^n)$  para  $i > n$  son difíciles de calcular, y no hay una lista completa de los mismos. El número de estructuras diferenciables de la esfera de dimensión  $n = 5, 6, 7, 8, 9, \dots$  es  $1, 1, 28, 2, 8, 6, 992, 1, 3, 2, 16256, 2, \dots$  respectivamente.

4 3-VARIEDADES Y TEORÍA DE NUDOS

Los intentos de probar la CP por métodos topológicos (o quizá más a menudo, los intentos de construir un contraejemplo a la CP) se basaron principalmente en la cirugía y en la Teoría de Nudos. Un nudo  $K \subset S^3$  es la imagen de una circunferencia por una aplicación  $f : S^1 \rightarrow S^3$  continua (o diferenciable) y sin auto-intersecciones (ver Figura 12).

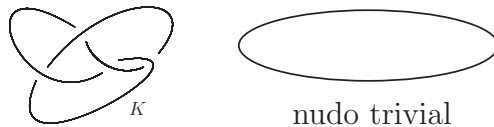


Figura 12

Hacer cirugía a lo largo de un nudo  $K$  consiste en lo siguiente [27]: tomamos un pequeño entorno  $E(K)$  alrededor de  $K$ , que es (homeomorfo a) un *toro sólido* (su borde es un *toro*  $S^1 \times S^1$ ), y lo quitamos. Así nos queda una 3-variedad  $S^3 - E(K)$  con borde, a la que vamos a pegar de nuevo otro toro sólido  $T$ . Para esto tenemos que *coser* a lo largo de los bordes. Nuestra aguja e hilo están dadas por un homeomorfismo

$$f : \partial(S^3 - E(K)) = S^1 \times S^1 \longrightarrow \partial T = S^1 \times S^1.$$

Se puede coser de diversas maneras, dado que los factores  $S^1$  se pueden intercambiar. Las diversas elecciones para  $f$  se pueden dar de la siguiente forma:

fijamos dos lazos en el borde de  $S^3 - E(K)$  : el meridiano  $\mu$  que bordea un disco perpendicular a  $K$  y un lazo  $\lambda$  que va paralelo a  $K$ . En  $\partial T$  también fijamos  $\mu'$  y  $\lambda'$  análogamente. Hemos de decidir a donde va la curva que corresponde a  $\mu'$  por  $f^{-1}$ . En homotopía,

$$f_*^{-1}[\mu'] = [p \mu + q \lambda] \in \pi_1(\partial(S^3 - E(K))) = \pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

con  $p, q$  primos entre sí,  $q \geq 0$ . Una vez decidido esto, hay un único resultado de pegar  $T$  (ver Figura 13).

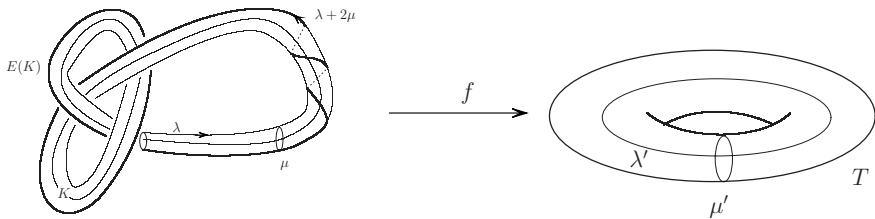


Figura 13

Se dice que se ha obtenido la variedad  $X = (S^3 - E(K)) \cup_f T$  por cirugía en  $S^3$  a lo largo del nudo  $K$  con coeficiente

$$p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\},$$

y se denota a la variedad por  $X = S^3(K)_{p/q}$ . Es difícil imaginar el resultado, pero de nuevo se debe a que estamos trabajando con variedades de dimensión 3 siendo seres de la misma dimensión. Cuando el coeficiente es  $\infty$ , es como si no hubieramos hecho cirugía, pues  $T$  se pega de la misma manera que estaba pegado  $E(K)$ . También se puede usar una colección de nudos enlazados entre ellos (en inglés, un *link*) y hacer cirugía a lo largo de cada uno de ellos con distintos coeficientes. Por ejemplo, si hacemos cirugía a lo largo del nudo trivial con coeficiente  $p/q$  obtenemos el espacio lenticular  $L(p, q)$ . Entre estos espacios hay ejemplos de variedades que no son homeomorfas, pero que sí son del mismo tipo de homotopía.

**TEOREMA** *Cualquier 3-variedad se puede obtener como cirugía a lo largo de un link. De hecho se puede conseguir que los coeficientes sean  $\pm 1$ .*

El problema de clasificación de 3-variedades se puede replantear como un problema en Teoría de Nudos, lo que *no* lo hace más sencillo:

- Problema de clasificación de nudos: ¿cuándo son dos nudos equivalentes? es decir, ¿cuándo se puede llevar uno sobre otro con una homotopía en la que el nudo nunca adquiera auto-intersecciones?

- ¿Cuándo dos *links* con coeficientes dan lugar a la misma 3-variedad por cirugía?
- Calcular el grupo fundamental de una 3-variedad obtenida por cirugía, y determinar cuando éste es trivial. El cálculo del grupo fundamental se puede hacer obteniendo una presentación del mismo con generadores y relaciones. Esto nos lleva al durísimo problema en Teoría de Grupos de caracterizar el grupo trivial.

### LA PROPIEDAD P

Se dice que un nudo  $K$  tiene la propiedad P si cualquier cirugía no trivial a lo largo de  $K$  nos da una 3-variedad que no es s.c. Si un nudo no tiene la propiedad P, entonces habremos encontrado un contraejemplo a la CP haciendo cirugía.

TEOREMA (KRONHEIMER Y MROWKA). *Los nudos no triviales tienen la propiedad P.*

La prueba de este teorema usa las más recientes técnicas en Teorías Gauge (homología Floer, invariantes de Donaldson y de Seiberg-Witten), así como novedosos resultados en Geometría simpléctica y de contacto. La idea básica es probar que la homología Floer de la 3-variedad  $X$  resultante de la cirugía es no nula, usando la existencia de conexiones anti-auto-duales en una 4-variedad simpléctica  $Z$  conteniendo a  $X$ . La homología Floer controla la existencia de conexiones planas en  $X$ . Por tanto, hay representaciones no triviales  $\pi_1(X) \rightarrow SU(2)$  y así  $\pi_1(X)$  es no trivial.

Este teorema no resuelve afirmativamente la CP pues podría haber una cirugía a lo largo de un *link* con más de 2 componentes que diera lugar a una 3-variedad s.c. que no fuera homeomorfa a la 3-esfera.

## 5 GEOMETRIZACIÓN DE 3-VARIEDADES

### UNIFORMIZACIÓN DE SUPERFICIES

Hemos visto como la CP en dimensión 2 se puede resolver fácilmente con la clasificación topológica de superficies compactas. La mejor forma de entender esta clasificación es a través del teorema de uniformización de superficies, que fue probado por el mismo Poincaré y por P. Koebe, independientemente. La uniformización consiste en dar una *estructura geométrica* a cada 2-variedad de forma más o menos canónica.

Imaginemos un ser bidimensional que quiere averiguar la forma de su universo de dos dimensiones  $X$ , pero que no puede recorrerlo entero para calcular su grupo fundamental. Puede recurrir al estudio de la *geometría* del



mismo (distancias, ángulos, ...), que viene dada por una *métrica* en la 2-variedad, es decir un tensor  $g_{ij}$  que da un producto escalar en cada punto, con el que medir vectores en ese punto. La métrica determina la curvatura de Gauss  $K$  de la superficie. Una hipótesis de trabajo muy razonable es que  $X$  sea (localmente) homogénea (es decir que se vea igual no importe en qué punto nos encontremos). Más analíticamente: dados dos puntos  $p$  y  $q$ , existe una isometría  $h$  que lleva (un entorno de)  $p$  a (un entorno de)  $q$  (ver Figura 14). Por tanto, la curvatura es la misma en  $p$  y en  $q$ , luego ha de ser constante. Así  $X$  es una variedad de curvatura de Gauss constante. Cambiando el volumen (por una dilatación) podemos ajustar para que la curvatura constante sea  $+1$ ,  $0$  o  $-1$ .

La hipótesis de homogeneidad también se usa en Cosmología a la hora de averiguar la forma de nuestro universo tridimensional (expresada en términos de que la distribución de galaxias sea más o menos uniforme), tema de gran actualidad en estos momentos.

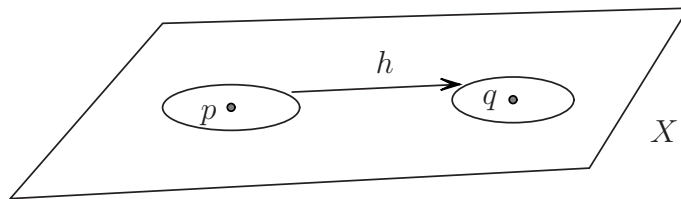


Figura 14

Una estructura geométrica en una 2-variedad  $X$  es una métrica de curvatura constante  $+1$ ,  $0$  o  $-1$ . Teniendo una estructura de este tipo, la variedad es fácil de clasificar. El recubridor universal  $\tilde{X}$  es un espacio s.c. (y de la misma curvatura constante) y existe un grupo discreto  $\Gamma$  de isometrías que actúa libremente en  $\tilde{X}$  con  $X = \tilde{X}/\Gamma$ . Tenemos las siguientes posibilidades:

- Si  $K = 1$  entonces  $\tilde{X}$  es la esfera  $S^2$  con la métrica esférica. Por tanto si  $X$  es orientable,  $X$  ha de ser la 2-esfera. El género de  $X$  es  $g = 0$ .
- Si  $K = 0$ , entonces  $\tilde{X}$  es  $\mathbb{R}^2$  con la métrica euclídea. Si  $X$  es orientable, forzosamente  $\Gamma = \mathbb{Z}^2$  y  $X$  es un toro. El género de  $X$  es  $g = 1$ .
- Si  $K = -1$ , entonces  $\tilde{X}$  es el plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ , del que las realizaciones más conocidas son el disco de Poincaré y el semiplano de Poincaré, con la métrica hiperbólica. En este caso  $\Gamma$  se denomina grupo Fuchsiano, y  $X$  es una superficie de género  $g \geq 2$ . Como vemos, éste es el caso que ocurre con más frecuencia.

El teorema de geometrización de 2-variedades asegura la existencia de una métrica de curvatura constante en cualquier superficie compacta  $X$ . Un método de encontrarla [9] consiste en fijar una métrica inicial  $g_0$  y considerar una familia 1-paramétrica de métricas Riemannianas  $g_t$  en la superficie que satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -K(g_t) g_t,$$

donde  $K(g_t)$  es la curvatura de Gauss de la métrica  $g_t$ . Reescalando la métrica de forma que el volumen sea constante, tenemos la ecuación

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = (c - K(g_t)) g_t, \tag{5}$$

donde  $c$  es una constante cuyo valor se calcula usando el teorema de Gauss-Bonnet, obteniéndose  $\int_X K(g_t) \text{vol}_{g_t} = 4\pi(1 - g) = c \text{Vol}(X)$ , siendo  $g$  el género de la superficie  $\tilde{X}$ . Por tanto  $c > 0$  si  $g = 0$ ,  $c = 0$  si  $g = 1$  y  $c < 0$  si  $g \geq 2$ .

Geoméricamente, cerca de un punto  $x$  de la superficie, el flujo (5) dilata la métrica cuando  $K(g_t)(x) < c$ , y contrae la métrica cuando  $K(g_t)(x) > c$ . Las métricas estacionarias para (5) son aquéllas de curvatura constante.

Las soluciones de (5) son de la forma  $g_t = e^{2u_t} g_0$ , donde  $u_t(x)$  es una función en  $X$  que depende del parámetro  $t$ . Por tanto, todas las métricas  $g_t$  están en la misma clase conforme de la métrica inicial  $g_0$ . La ecuación (5) se reescribe como

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = c - K(g_t) = \Delta_{g_t} u_t + c - e^{-2u_t} K(g_0),$$

donde  $\Delta_{g_t}$  es el operador de Laplace-Beltrami en  $X$  con respecto de la métrica  $g_t$ . Ésta es una ecuación en derivadas parciales parabólica no lineal de tipo *ecuación del calor*. La ecuación tiene solución para todo  $t \in [0, \infty)$  en condiciones muy generales (cuando  $g \geq 1$  o cuando  $g = 0$  y la métrica inicial tiene curvatura  $K(g_0)$  siempre positiva) y ésta tiende a una métrica estacionaria  $g_\infty$ , que es por tanto de curvatura constante  $c$ . De hecho, la métrica  $g_\infty$  es la única métrica de curvatura constante  $c$  conforme a  $g_0$ .

### LA CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN DE THURSTON

El trabajo realizado por Thurston en los años 70 hizo realista la posibilidad de entender la clasificación de las 3-variedades compactas de una forma similar a la clasificación de superficies a través del teorema de uniformización. Una exposición más detallada de esta sección y la siguiente puede encontrarse en [2] y [15].

Primeramente, debemos considerar cuáles son las geometrías en 3-dimensiones. En Geometría Riemanniana, una *estructura geométrica* en una variedad

$M$  es una métrica Riemanniana completa y localmente homogénea. Es decir,  $M$  es el cociente de un espacio homogéneo (un cociente  $G/H$  de un grupo de Lie  $G$  por un subgrupo compacto  $H$ ) por un subgrupo discreto  $\Gamma$ . Sólo hay 8 posibilidades. Las 3 más importantes son las de curvatura constante: geometría esférica  $S^3$  de curvatura  $+1$ , geometría euclidea  $\mathbb{R}^3$  de curvatura  $0$  y geometría hiperbólica  $\mathbb{H}^3$  de curvatura  $-1$ . Las otras 5 geometrías son productos o productos torcidos de las geometrías de dimensión 2 con la única geometría de dimensión 1, que es  $\mathbb{R}$ .

No toda 3-variedad admite una estructura geométrica, pero aquéllas que la admiten (las llamadas 3-variedades geométricas) sirven de piezas con las que construir 3-variedades más complejas. Kneser [11] definió 3-variedad *irreducible* como aquélla en la que cada 2-esfera sin autointersecciones es borde de una 3-bola. Si una 3-variedad  $X$  no es irreducible, entonces se la puede cortar a lo largo de una 2-esfera que no sea borde de una 3-bola. Repitiendo el proceso, cortamos  $X$  a lo largo de una colección finita de 2-esferas, de forma que las componentes conexas que obtenemos son variedades con borde, y si pegamos 3-bolas a lo largo de sus bordes, las 3-variedades compactas  $X_i$  que obtenemos son irreducibles (y además ninguna es  $S^3$  a menos que  $X = S^3$ ).

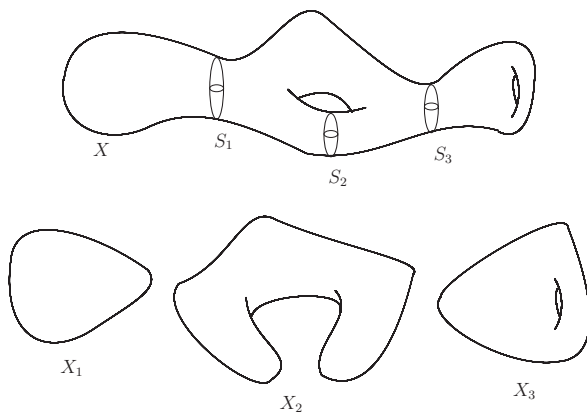


Figura 15 - Descomposición en irreducibles

Técnicamente, se dice que  $X$  surge como suma conexa de las variedades  $X_i$  y de una colección de copias de  $S^2 \times S^1$ , que aparecen una por cada 2-esfera que no separa (tal como la  $S_2$  de la Figura 15).

Cada 3-variedad irreducible puede descomponerse aún más de la siguiente manera. Primero, una superficie orientable  $F$  de género  $g \geq 1$  en  $X_i$  se denomina *incompresible* si  $\pi_1(F) \hookrightarrow \pi_1(X_i)$ . La descomposición por toros de Jaco-Shalen [6] y Johannson [7] es una descomposición canónica de cada 3-variedad irreducible  $X_i$  cortando a lo largo de una familia minimal de toros

incompresibles, tales que las 3-variedades con borde  $X_{ij}$  (donde  $\partial X_{ij}$  es una unión de toros) que se obtienen son de uno de los siguientes tipos:

- Atoroidal. Una 3-variedad  $N$  es atoroidal si cada toro incompresible puede ser deformado a un toro en  $\partial N$  (en particular, si  $N$  es una variedad sin borde, entonces  $N$  no tiene tales toros).
- Variedad de Seifert. Son 3-variedades  $N$  que admiten una aplicación  $N \rightarrow \Sigma$ , donde  $\Sigma$  es una superficie con o sin borde, y las fibras son circunferencias. Puede haber algunas *fibras múltiples*.

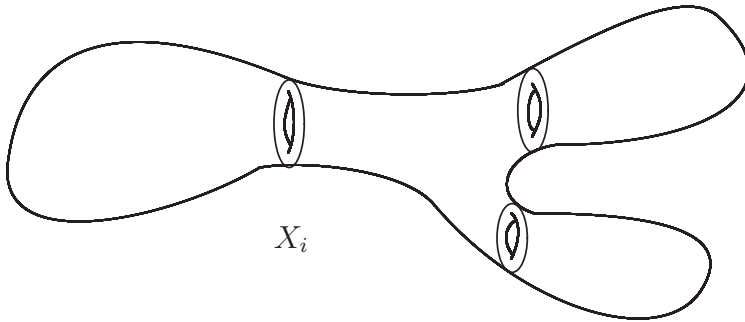


Figura 16 - Descomposición por toros

CONJETURA DE GEOMETRIZACIÓN - CG (THURSTON): Sea  $X$  una 3-variedad orientada compacta. Entonces cada componente  $X_{ij}$  de la descomposición por toros admite una estructura geométrica.

Esta conjetura da un método completo y efectivo para la clasificación de las 3-variedades, en espíritu similar a la clasificación de superficies, reduciéndolo al estudio de las 3-variedades geométricas. Con respecto a la clasificación de variedades geométricas, ha habido un gran progreso en el estudio de la geometría hiperbólica. (Una de las consecuencias del trabajo de Thurston [30] es que entre las variedades irreducibles, aquéllas con geometrías hiperbólicas son las que más abundan). En geometría esférica, está aún abierta la conjetura que dice que toda 3-variedad compacta con grupo fundamental finito es esférica. Evidentemente estas dos geometrías son las más importantes, y las otras seis son mucho más fáciles en comparación.

Desde el punto de vista de la Geometría Riemanniana, la conjetura de Thurston asegura la existencia de una métrica óptima. En el caso de que  $X$  no sea geométrica, esta métrica tiene zonas degeneradas (las esferas y los toros a lo largo de los cuales se hacen las descomposiciones de las Figuras 15 y 16). La CG está probada en algunos casos, por ejemplo cuando la 3-variedad contiene una superficie incompresible de género  $g \geq 1$ .

La CG implica la CP. Supongamos que  $X$  es una 3-variedad compacta s.c. En la descomposición en 3-variedades irreducibles, cada  $X_i$  es s.c. Además  $X_i$  no puede tener toros incompresibles, pues  $\pi_1(X_i)$  es trivial, y por tanto no hay descomposición por toros. Luego  $X_i$  admite una estructura geométrica. Como  $X_i$  es s.c.,  $X_i$  es un espacio homogéneo  $G/H$ , y de la clasificación de tales espacios, el único s.c. es  $X_i = S^3$ . Luego  $X = S^3$ .

EL FLUJO DE RICCI

Richard Hamilton introdujo un método para encontrar la mejor métrica que predice el programa de geometrización de Thurston, usando la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales en variedades (ver [2]). La clave está en usar una ecuación de evolución natural en el espacio de métricas de la 3-variedad, e intentar probar que el flujo existe y que converge a un límite geométrico. En el caso de que el flujo no converja, las métricas correspondientes degeneran, y es necesario estudiar las degeneraciones y relacionarlas con la topología de  $X$ .

Hay esencialmente un flujo natural en el espacio de métricas. Supongamos que  $X$  tiene coordenadas  $(x_1, \dots, x_n)$  y que hemos fijado una métrica inicial  $g_0 = \sum g_{ij} dx_i dx_j$ . El flujo de Ricci es la familia 1-paramétrica de métricas Riemannianas  $g_t$  que satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2Ric(g_t) \tag{6}$$

donde  $Ric(g_t)$  es el operador de Ricci de  $g_t$  (si  $R^l_{ijk}$  es la curvatura de Riemann, entonces el operador de Ricci es su traza  $Ric_{ij} = \sum_k R^k_{ikj}$ ). La constante 2 es por conveniencia y puede ser cambiada reescalando el parámetro tiempo  $t$ , sin embargo el signo  $-$  es de vital importancia. La razón por la que (6) es el único flujo natural es básicamente la misma que llevó a las ecuaciones de Einstein en relatividad general. El tensor de Ricci es una forma bilineal simétrica, y es la única dependiendo en a lo más las segundas derivadas de la métrica, e invariante por cambio de coordenadas.

Reescalando la métrica de forma que el volumen de  $(M, g_t)$  es constante obtenemos la ecuación

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = -2Ric(g_t) + \lambda(t)g_t \tag{7}$$

donde  $\lambda(t)$  es una constante que depende de  $t$ . Si elegimos un sistema de coordenadas armónicas, es decir, en el que las funciones coordenadas son funciones armónicas en la métrica  $g_t$ . Entonces la ecuación toma la forma

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \Delta_{g_t} g_t + Q \left( g_t, \frac{\partial g_t}{\partial x_i} \right),$$

donde  $\Delta_{g_t}$  es el operador de Laplace-Beltrami en  $X$  con respecto a la métrica  $g_t$  y  $Q$  es un término cuadrático en  $g_t$  y sus derivadas parciales primeras. Ésta

es una ecuación en derivadas parciales parabólica no lineal para  $g_t$  del tipo *ecuación del calor*. Del estudio teórico de las mismas, se sabe la existencia y unicidad de soluciones al flujo de Ricci para algún intervalo de tiempo, comenzando en cualquier métrica inicial. Ésta es la razón para el signo menos en (6). Un signo más hubiera dado una ecuación del calor hacia atrás, que en general no tiene solución.

Los puntos estacionarios de (7) son exactamente las métricas de Einstein, es decir, métricas de curvatura de Ricci constante. En dimensión 3, tales métricas son de curvatura constante y por tanto dan geometrías de tipo  $S^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  o  $\mathbb{H}^3$ . Más en general, si  $Ric(g_t)(x) > 0$ , entonces el flujo contrae la métrica  $g_t$  cerca de  $x$ . Si  $Ric(g_t)(x) < 0$  entonces el flujo expande  $g_t$  cerca de  $x$ . En general, hay direcciones en las que la curvatura de Ricci es positiva y negativa, a lo largo de las cuales la métrica contraerá o expandirá. Además, el flujo de Ricci conmuta con la acción del grupo de difeomorfismos, y conserva todas las isometrías de la métrica inicial. Por tanto las 3-variedades geométricas permanecen geométricas. En las geometrías mixtas, un factor se contrae y el otro se expande.

La pieza fundamental en el análisis del flujo de Ricci es la formación de singularidades que aparecen en tiempo finito. En el caso de métricas iniciales con curvatura de Ricci *positiva*, Hamilton [8] probó que el flujo de (7) existe para todo tiempo y converge a una métrica de curvatura constante positiva. Sin embargo, en los casos de variedades no irreducibles, el flujo de Ricci desarrolla singularidades [10]. Tales singularidades ocurren frecuentemente en EDPs no lineales, y han sido estudiadas en diversos contextos geométricos en las últimas décadas. El método habitual consiste en reescalar la solución cerca del lugar donde se está produciendo la singularidad para pasar al límite la renormalización. Este límite sirve de modelo para la singularidad. Un fenómeno similar en el que la solución puede explotar en diversos sitios (conocido como *bubbling*) aparece en muchos otros problemas de carácter variacional, tales como aplicaciones armónicas, curvas pseudo-holomorfas, teoría de Yang-Mills, métricas de Einstein, etc.

Muy recientemente han surgido tres trabajos del matemático ruso Grigory Perelman [18, 19, 20] en los que anuncia la resolución de las dificultades. Esto concluiría una prueba completa de la CG basada en las ideas de Hamilton y como consecuencia una prueba de la CP. Por el momento su trabajo se encuentra bajo escrupuloso escrutinio; algunos matemáticos de reconocido prestigio lo han dado informalmente por válido, mientras otros muestran sus reticencias ante la dificultad de localizar posibles errores serios en argumentos analíticos tan delicados. En todo caso, las ideas que contienen sus trabajos suponen un gran avance en el campo de las 3-variedades.

## REFERENCIAS

- [1] E. ABBOTT, *Flatland: a Romance of many dimensions*, Second Edition, 1884.



G. Perelman explicando su trabajo en Princeton en Abril de 2003

- [2] M. ANDERSON, Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow, *Notices Amer. Math. Soc.* **51** (2004), 184–193.
- [3] CLAY MATHEMATICS INSTITUTE, *Millenium Problems*,  
<http://www.claymath.org/millennium/>
- [4] S. DONALDSON, An application of gauge theory to four-dimensional topology. *J. Diff. Geom.* **18** (1983), 279–315.
- [5] M. FREEDMAN, The topology of four-dimensional manifolds. *J. Diff. Geom.* **17** (1982), 357–453.
- [6] W. JACO Y P. SHALEN, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. 21, no. 220 (1979).
- [7] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math. 761, Springer, 1979.
- [8] R. HAMILTON, Three-manifolds with positive Ricci curvature, *J. Diff. Geom.* **17** (1982), 255–306.
- [9] R. HAMILTON, The Ricci flow on surfaces, *Contemporary Math.* **71** (1988), 237–262.
- [10] R. HAMILTON, Formation of singularities in the Ricci flow, *Surveys in Differential Geometry*, Vol. 2, International Press, 1995, 7–136.
- [11] H. KNESER, Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten, *Jahresber. Deutsch. Maht. Verein.* **38** (1929), 248–260.
- [12] P. KRONHEIMER Y T. MROWKA, Witten’s conjecture and property P. *Geom. Topol.* **8** (2004), 295–310.

- [13] W. S. MASSEY, *A basic course in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Maths, Vol. 127, Springer-Verlag, 1991.
- [14] J. MILNOR, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math. (2)* **64** (1956), 399–405.
- [15] J. MILNOR, Towards the Poincaré Conjecture and the classification of 3-manifolds, *Notices Amer. Math. Soc.* **50** (2003), 1226–1233.
- [16] E. MOISE, Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Ann. of Math. (2)* **56** (1952), 96–114.
- [17] J. MUNKRES, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms. *Bull. Amer. Math. Soc.* **65** (1959), 332–334.
- [18] G. PERELMAN, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, <http://xxx.lanl.gov/math.DG/0211159>
- [19] G. PERELMAN, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, <http://xxx.lanl.gov/math.DG/0303109>
- [20] G. PERELMAN, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, <http://xxx.lanl.gov/math.DG/0307245>
- [21] H. POINCARÉ, Analysis situs, *J. de l'École Polytechnique* **1** (1895), 1–121.
- [22] H. POINCARÉ, Second complément a l'analysis situs, *Proc. London Math. Soc.* **32** (1900), 277–308.
- [23] H. POINCARÉ, Cinquième complément a l'analysis situs, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **18** (1904), 45–110.
- [24] H. POINCARÉ, *Oeuvres*, Tome VI, Paris, 1953.
- [25] H. POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1902.
- [26] H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, Dover Publications, Inc. New York, 1957.
- [27] D. ROLFSEN, *Knots and links*. Mathematics Lecture Series, 7. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.
- [28] S. SMALE, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), 391–406.
- [29] J. STALLINGS, Polyhedral homotopy-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* **66** (1960), 485–488.
- [30] W. THURSTON, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 357–381.
- [31] E. ZEEMAN, The generalised Poincaré conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* **67** (1961), 270.
- [32] FOTOGRAFÍAS,  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Poincare.html>



- [33] INTERNET ENCYCLOPEDIA OF PHILOSOPHY,  
<http://www.utm.edu/research/iep/p/poincare.htm>
- [34] PLANETMATH ENCYCLOPEDIA,  
<http://planetmath.org/encyclopedia/Poincare.html>
- [35] THE MAC TUTOR HISTORY OF MATHEMATICS ARCHIVE,  
<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Poincare.html>

Vicente Muñoz  
Instituto de Matemáticas y Física Fundamental  
Consejo Superior de Investigaciones Científicas  
C/ Serrano 113 bis  
28006 Madrid  
Correo electrónico: [vicente.munoz@imaff.cfmac.csic.es](mailto:vicente.munoz@imaff.cfmac.csic.es)